Table des matières

Introduction

Une des préoccupations essentielles de la théorie des singularités est la variation du type topologique d'espaces singuliers le long d'une famille. C'est à cet égard que dans les années 60 R. Thom [Th] et H. Whitney [Wh] ont été amenés à introduire les stratifications.

De nombreuses conditions de régularité ont été ensuite définies sur celles-ci au cours des dernières décennies, donnant des informations plus ou moins précises sur la géométrie de l'espace considéré. La condition (b) de Whitney assure la trivialité topologique des submersions stratifiées. C'est un résultat célèbre connu sous le nom de théorème d'isotopie de Thom-Mather ([Ma-2] ou [Th]). Plus tard, en 1976, J. L. Verdier [V] a établi le même résultat à partir d'une autre condition : la condition w de Kuo-Verdier.

Dans les années 80, T. Mostowski [Mo] propose une autre condition qui s'intéresse au type lipschitzien. Cette condition est plus forte que celle de Verdier mais nous renseigne sur la stabilité du type métrique des familles ainsi stratifiées. En 1964 , R. Thom a également défini la condition t, qui est une condition sur les transversales aux espaces stratifiés. Cete condition a ensuite été généralisée par D. Trotman [T1] [T2] dans puis dans [T-W]. Bien qu'elle se soit avérée insuffisante à l'obtention des théorèmes d'isotopie (la condition (b) de Whitney est sensiblement plus forte), elle a permi d'établir des théorèmes de stabilité des types topologiques des espaces singuliers avec une transversale. En fait on s'est aperçu ([Ku-T] ou [T-W]) que cette condition est reliée à la condition (w) de Verdier à travers des transformations de type pull-back. Les théorèmes de stabilité topologique des sections transverses étaient alors des conséquences du résultat de J. L. Verdier.

La question de savoir si une application est, à une équivalence près déterminée par son expansion de Taylor est un problème classique de la théorie des singularités. De nombreux auteurs s'y sont intéressés ([Wa],[Ku-3], [Ku-5], [Ku-T], [T-W], [Ma-1], [Ta], [Y], [Ko-1], [Wi-1],) donnant des critères plus ou moins forts suivant le type d'équivalence considéré. Ces résultats permettent de ramener l'étude d'une fonction différentiable à celle d'un polynôme dont l'étude est plus simple. Ceci permet aussi de ramener l'étude de l'espace des fonctions à celle de l'espace des jets qui se plonge dans un espace euclidien de dimension finie [Ma-1].

Les théorèmes de détermination finie donnés dans [T-W] sont démontrés à partir de la théorie des stratifications. L'idée est de considérer les axes de coordonnées définissant le graphe de la fonction comme un espace stratifié. Par exemple le lieu des zéros est ainsi l'intersection du graphe avec l'axe source. Les théorèmes de détermination du lieu des zéros d'une application découlent donc des théorèmes de détermination des sections transverses à un espace stratifié mentionnés plus haut.

En particulier (cf [T-W]) il suffit de savoir si l'espace stratifié en question vérifie la condition t^i pour s'assurer de la suffisance du jet d'ordre i.

Dans ce travail on généralise ces travaux autour de la condition w, et on s'interesse à la condition L de Mostowski pour avoir des théorèmes de suffisance lipschitz des jets via la théorie des stratifications (ou plutôt d'une généralisation de celle-ci). Ce qui est intéressant c'est que l'on obtient également des théorèmes de détermination C^1 à partir de la théorie des stratifications. Ceux-ci sont même un peu meilleurs que ceux donnés dans [Wa] ou [Ta] dans la mesure où ils donnent un jet un peu plus court.

Contenu de la thèse. La thèse donne des théorèmes de suffisance des jets pour des applications différentiables. On s'intéresse à trois types de détermination : la détermination rugueuse "à l'ordre i", la détermination lipschitzienne "à l'ordre $(i;k)$", la détermination C^1. On entend en mentionnant l'ordre de la détermination donner une majoration de ce qui sépare l'équivalence de l'identité (on donne au chapitre 5 des propriétés géométriques de ce que cela peut induire). Dans chaque chapitre, on commence donc par le cas rugueux, pour ensuite se consacrer aux cas lipschitzien et C^1. Tout l'intérêt d'appliquer la théorie des stratifications à la suffisance des jets est de n'avoir à démontrer qu'un seul théorème d'isotopie pour les trois problèmes de détermination que nous considérerons (détermination des transversales, de l'application ou du lieu de ses zéros).

Le premier chapitre compare les fonctions qui définissent les critères de suffisance des jets donnés dans [Wa], [Ku-2] et [T-W]. On définit ensuite nos propres fonctions qui sont destinées à l'étude lipschitzienne. On étudie leurs propriétés qui nous serviront essentiellement au chapitre 3.

Le chapitre 2 définit des conditions de régularité sur les stratifications après quelques rappels sur les conditions $(t^{i,j})$. On généralise ensuite la condition (L) de Mostowski pour l'appliquer au problème de la suffisance des jets. On tente alors de rapprocher le passage de $L(i;j;k)$ à (L) de celui de la condition (t^i) à la condition (w).

Le chapitre 3 établit des théorèmes de type pull-back généralisant ceux de [T-W]. Le theórème 3.1.3 généralise le cas rugueux aux ordres supérieurs, le théorème 3.2.5, le corollaire 3.2.8 et la proposition 3.2.9 en sont la généralisation lipschitzienne (le corollaire 3.2.8 concerne le cas au moins t régulier et la proposition 3.2.9 la dimension 1, dans ces cas on a un meilleur résultat), la proposition 3.3.1 est le cas C^1. On donne aussi une version lipschitz du blowing-up de T. C. Kuo et D. Trotman [Ku-T-X]. Il est intéressant de voir que la condition (L) induit la trivialité C^1 de l'éclatement (théorème 3.3.3).

Le chapitre 4 détaille les théorèmes d'isotopie dont nous aurons besoin après avoir appliqué les théorèmes de pull-back (théorm̀e 4.1.3 pour le cas rugueux et 4.2.10 pour le cas lipschitzien). On donne aussi une condition que l'on appelle $r(ln^{\beta})$ qui nous permet de généraliser des résultats de [H-M], [O-T] ou [Hi]. En effet on démontre un théorème d'isotopie (théorème 4.1.9) à partir de cette condition qui implique la pseudo-platitude normale. Ce théorème d'isotopie permettra aussi au chapitre 5 de voir que cette condition est suffisante à la continuité de la fonction densité le long des strates dans le cas sous-analytique.

Le chapitre 5 étudie les volumes et leur variation dans une famille stratifiée sous-analytique. On démontre que la condition (w) le long d'une strate implique que la densité est une fonction lipschitzienne le long de cette strate (corollaire 5.2.13). Plus généralement on démontre aussi que la condition (w) d'exposant i implique la constance des termes d'ordre inférieurs à i du développement log-analytique du volume (proposition 5.2.11 ou corollaire 5.2.12). On s'intéresse aussi aux multiplicités d'une projection linéaire et on étudie leur invariance le long d'un espace stratifié (proposition 5.2.15). On généralise ainsi des résultats de [Co3] ou [Hi]. On ennonce les mêmes théorèmes pour la variation du volume de l'ensemble lui même dans la section 5.2.2.

La propositon 5.2.4 constitue l'argument essentiel des démonstrations de cette section, puisqu'elle établit l'égalité des multiplicités de deux ensembles reliés par un homéomorphisme approchant suffisament l'identité, dans le complémentaire d'une partie dont on sait majorer la mesure. En intégrant on obtient une majoration de la différence entre les volumes des deux ensembles.

Le chapitre 6 donne des théorèmes de détermination de chacun des trois types étudiés. Des cas particuliers sont ensuites dégagés donnant des conditions plus explicites. La détermination rugueuse à l'ordre i est une conséquence du théorème de pullback 3.1.3 qui induit la condition w^i et permet d'appliquer 4.1.3. L'intérêt de ces théorèmes est d'obtenir des théorèmes de détermination des volumes des transversales à un espace stratifié (proposition 6.1.6 et corollaire 6.1.7 pour la densité), des volumes du lieu des zéros d'une application sous-analytique (corollaire 6.1.10). On donne aussi des théormes de suffisance lipschitz des jets. Ils sont donnés "à l'ordre $(i; k)$" mais le cas le plus intérssant est le cas lipschitzien (i. e. $k = 0$) qui donne la suffisance lipschizienne). Le théorème 6.2.12 ($k = 0$) donne des critères pour la $SV-$suffisance lipschitz et le corollaire 6.2.15 pour la $\mathcal{R}-$suffisance lipschitz (voir les remarques qui suivent pour une version plus explicite des critŕes à l'aide des fonctions définies au chapitre 1). On améliore là des résultats de Yomdim. Le chapitre 3 donnait 3 théroèmes de pull-back (des versions un peu meilleures sont obtenues dans le cas t régulier et $dim\, Y = 1$ i. e. le cas des fonctions) on donne donc en section 6.2.1 plusieurs théorèmes de détermination lipschitz des sections transverses aux espaces stratifiés suivant le théorème de pull-back appliqué. La même chose peut ètre faite pour la $SV-$suffisance (cf remarque 6.2.13).

On compare les résultats avec ceux de [Wa] ou [Ta] et on s'apercoit les critères donnés sont ostensiblement plus faibles (corollaire 6.3.13 et 6.3.14). Signalons aussi que nous les généralisons aux espaces à singularité isolée (corollaire 6.3.12). On donne aussi à la fin une interprétation d'un de ces critères en termes de clôture intégrale sur le modèle de [G-T-W].

Le chapitre 7 est un peu indépendant. Il s'agit d'un travail avec Dwi Juniati et David Trotman sur la condition (L) de Mostowski [J-T-V]. On démontre que celle-ci se préserve par section hyperplane générique. C'est une des propriétés de la condition (b) de Whitney ([N] ou [N-T]).

Chapitre 1

Estimation de la transversalité

On étudie dans ce chapitre certaines fonctions définies sur des espaces d'applications linéaires. Ces fonctions sont destinées à estimer la "singularité" des applications linéaires. Il est classique, pour établir des théorèmes de suffisance des jets de considérer de telles fonctions. Dans [Wa], C. T. C. Wall utilise le déterminant de la matrice de Gram, dans [Ku-2] ou [T-W] on introduit d'autres fonctions. Dans un premier temps on relie ces trois fonctions, ce qui nous permet de les comparer (et nous permettra de comparer les critères de suffisance des jets au chapitre 6). On généralise ensuite certaines définitions de [T-W] et on introduit des fonctions plus adaptées au cas lipshitzien. Au chapitre 2 nous utiliserons ces fonctions pour définir la condition $L(i;j;k)$ qui se comportera comme la condition t pour l'étude topologique.

Soient m et n deux entiers. On pose $Y = \{0\} \times \mathbb{R}^m$, $N = \mathbb{R}^n \times \{0\}$, $\mathbb{R}^d = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. On note $Lin(R^n; R^m)$ l'espace des applications linéaires de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ et $\partial_1, \ldots, \partial_m$ la base canonique de $\mathbb{R}^m$. Si F est une partie d'un espace vectoriel normé E, on notera $d(x; F)$ la distance du point x de E à F.

1.1 Estimation de la singularité

1.1.1 Trois fonctions sur les applications linéaires

Soit $v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une application linéaire. On notera $v_1, \ldots, v_m$ les gradients des composantes de l'application v pour la métrique euclidienne. Trois fonctions sont définies sur l'espace de telles applications qui estiment la "singularité" de l'application. On compare ces trois fonctions. Ceci nous permettra de comparer les critéres de suffisance des jets qu'elles définissent (cf la discussion aprś la remarque 6.3.14).

Une première introduite par T. C. Kuo (cf [Ku-2],[Ku-3],[Ku-5]) :

Définition 1.1.1. Soit V_i l' espace engendré par les v_j, $j \neq i$. On pose alors

$$\begin{aligned} \nu(v) &= \min d(v_i; V_i) \\ &= \min |\pi_i^\perp(v_i)| \end{aligned}$$

où $\pi_i^\perp$ désigne la projection sur $V_i^\perp$.

Une autre fonction due à D. Trotman et L. Wilson est équivalente (voir [T-W]) :

Définition 1.1.2. On note $K = \{x \in \ker v^{\perp} / |x| = 1\}$. On pose alors :

$$\begin{aligned} d(v) &= \min_{u \in K} |v(u)| \quad \text{si} \quad rg\, v = m \\ d(v) &= 0 \qquad \text{sinon.} \end{aligned}$$

Enfin une troisième fonction utilisée notamment par C.T.C. Wall (voir [Wa]) :

Définition 1.1.3. On note :

$$\begin{aligned} N(v) &= \det(vv^t) \\ &= \text{la somme des carrés des mineurs d'ordre } m. \end{aligned}$$

Nous allons voir que la fonction N est reliée aux deux autres. On établit une formule explicite entre N et ν.

Proposition 1.1.4. *Soit $i_1, ..., i_m$ une permutation. Pour $j \leq m$, on note W_j^i l'espace engendré par $(v_{i_{j+1}}, ..., v_{i_m})$. Alors :*

$$N(v) = d(v_{i_1}; W_1^i)^2. \ldots .d(v_{i_m}; W_m^i)^2.$$

Démonstration. Tout d'abord les deux fonctions s'annulent si et seulement si le rang est strictement inférieur à m. On peut donc se contenter de vérifier la formule dans le cas où la famille $(v_1^t; \ldots; v_m^t)$ est libre. Remarquons ensuite que si P est une matrice orthogonale, $N(vP^t) = N(v)$ et puisque P préserve la distance $d(Pv) = d(v)$. On peut donc (en travaillant modulo une application orthogonale qui envoie $\mathbb{R}^m \times \{0\}$ sur l'espace engendré par les v_i) supposer que les v_i engendrent $\mathbb{R}^m \times \{0\}$. Dans la matrice de v le seul mineur susceptible de ne pas être nul est celui qui considère les m premières colonnes car les suivantes sont nulles puisque $< v_1; \ldots; v_m >= \mathbb{R}^m \times 0$. Calculons celui-ci. On note π_k la projection sur W_k^i et $\pi_k^{\perp}$ la projection sur son orthogonal. Il vient :

$$\begin{aligned} \det(v_1, \ldots, v_m) &= \det(\pi_1^{\perp}(v_1), v_2, \ldots, v_m) + \det(\pi_1(v_1), v_2, \ldots, v_m) \\ &= \det(\pi_1^{\perp}(v_1), v_2, \ldots, v_m) \\ &= \det(\pi_1^{\perp}(v_1), \ldots, \pi_m^{\perp}(v_m)) \quad \text{en itérant l'étape précédente} \\ &= |\pi_1^{\perp}(v_1)|. \ldots .|\pi_m^{\perp}(v_m)| \end{aligned}$$

car le déterminant d'une famille dont les vecteurs sont orthogonaux deux à deux est égal au produit des normes. □

Remarquons que $V_{i_1} = W_1^i$. En conséquence si l'on choisit une permutation telle que i_1 soit l'indice qui réalise le minimum des $d(v_k; V_k)$ la proposition précédente nous permet de déduire l'inégalité suivante :

$$N(v) = \nu(v)^2.d(v_{i_2}; W_2^i)^2. \ldots .d(v_{i_p}; W_m^i)^2.$$

Par récurrence on déduit alors :

$$N(v) = \nu(v)^2.\nu(v_1^j)^2. \ldots .\nu(v_{m-1}^j)^2 \tag{1.1}$$

où $(j_1; \dots; j_m)$ est une permutation et v_k^j désigne l'application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^{m-k}$ dont les gradients des composantes sont les $(v_{j_{k+1}}; \dots; v_{j_m})$. De plus, d'après la définition, il est clair que $\nu(v_k^j) \geq \nu(v)$. Ceci nous permet d'écrire :

$$N(v) \geq \nu(v)^{2m}.$$

Pour $|v|$ dans un compact on peut également déduire de (1.1) qu'il existe une constante C telle que :

$$N(v) \leq C\nu(v)^2.$$

Enfin nous pouvons conclure que pour tout compact de l'espace des applications linéaires de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ il existe une constante C telle que :

$$\nu(v)^{2m} \leq N(v) \leq C\nu(v)^2. \tag{1.2}$$

Montrons maintenant que les fonctions N et ν^2 ne sont pas équivalentes et que l'on ne peut espérer mieux que la première inégalité de (1.2). Dans l'exemple suivant l'égalité est réalisée.

Exemple 1.1.5. Soit $v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ définie par $v = \epsilon I_n$.
Alors $N(v) = \epsilon^{2n}$ et $\nu(v) = \epsilon$.

1.1.2 μ_1 et ν_1 d'une application

Nous définissons ici une quatrième fonction. La fonction introduite par T. C. Kuo, ou celle de D. Trotman et L. Wilson, est adaptée à l'étude topologique des singularités. Celle de C. T. C. Wall est utile pour l'étude C^k de tels ensembles ou fonctions. Nous définissons une condition intermédiaire qui donnera des conditions plus faibles que celles données par C. T. C. Wall pour la suffisance des jets mais qui nous garantira la détermination lipschitz et même différentiable (cf la discussion aprś la remarque 6.3.14).

On définit une fonction qui se rapproche de celle qui est donnée dans [T-W] de la manière suivante (comparer avec celle de la définition 1.1.2) :

Définition 1.1.6. On pose :

$$\mu_1(v) = \inf_{\substack{u \in \ker v^\perp \\ |u|=1}} \inf_{\substack{u' \in \ker v^\perp, |u'|=1 \\ u' \perp u}} |v(u)|\,|v(u')| \quad \text{si} \quad rg\ v = m \tag{1.3}$$

et $\mu_1(v) = 0$ sinon.

La fonction ν_1 peut être définie de manière analogue. Il suffit de poser :

$$\nu_1(v) = \min_{i \neq j}\ d(v_i; V_i)\,.\,d(v_j; V_{i,j})$$

où $V_{i,j}$ désigne l'espace engendré par les v_l, $l \neq i, j$.

Alors μ_1 et ν_1 sont équivalentes pour les mêmes raisons que μ et ν (cf propositions 1.2.1 et 1.2.4). Si l'on choisit une permutation où i_1 et i_2 sont les deux indices qui réalisent le minimum définissant ν_1, ν_1 est constitué de deux termes du produit de l'égalité (1.1) (sans le carré). On en déduit donc l'égalité suivante :

$$N(v) = \nu_1(v)^2.\dots.\nu(v^j_{m-1})^2 \tag{1.4}$$

pour une permutation j. Ce qui permet d'écrire l'inégalité suivante :

$$N(v) \geq \nu_1(v)^2.\nu^{2m-2}(v).$$

Et donc pour v dans un compact il existe une constante C telle que :

$$\nu_1(v)^2.\nu^{2m-2} \leq N(v) \leq C\nu_1(v)^2 \tag{1.5}$$

De plus (cf exemple 1.1.5) il est facile de construire des exemples où la première inégalité est une équivalence de fonctions. Ceci montre que la fonction ν_1 est explicitement plus grande que la fonction N. Elle nous donnera un critère plus faible pour estimer la singularité.

1.2 Estimation de la transversalité

1.2.1 Généralisation des fonctions μ et ν

On généralise des définitions données dans [T-W]. Ceci nous permettra de mesurer la transversalité d'un graphe à un espace stratifié. Le chapitre 6 donne des théorm̃es de stabilité des sections transverses á un espace stratifiés. Ces fonctions nous servirons donc au chapitre 2, lorsque nous définirons les conditions de régularité qui induiront au chapitre 6 les théorèmes de suffisances des jets. Le lien entre les fonctions mesurant les angles entre les espaces vectoriels et celles s'intéressant aux appliations relativement á un sous-espace permettra de donner des critéres portant plus explicitement sur les applications et aussi de faire le lien avec les critéres existants (cf [T-W] ou [Wa], vpir aussi les remarques qui suivent les théorèmes de détermination au chapitre 6).

Soit γ un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. Lorsque l'on ne spécifiera pas γ pour désigner les fonctions utilisées c'est que l'on considèrera le produit scalaire euclidien de $\mathbb{R}^d$.

On définit donc pour $T \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$,

$$\mu_\gamma(v;T) = \inf\{|\pi^\gamma_T(\sum_{j=1}^m \alpha_j(\partial^\gamma(v_j - \pi_j))|_\gamma / \sum \alpha_j^2 = 1\} \tag{1.6}$$

où l'on note π^γ_T la projection orthogonale sur T relativement au produit scalaire γ, ∂^γ le gradient relativement à ce produit scalaire, v_i la $i^{\text{ème}}$ composante de v et $|.|_\gamma$ la norme qui en est issue. Soit V_i l'espace engendré par les $\pi^\gamma_T(\partial^\gamma(v_j - \pi_j))$, $j \neq i$. On pose :

$$\nu_\gamma(v;T) = \min_{0\leq i\leq m} d_\gamma(\pi^\gamma_T(\partial^\gamma(v_i - \pi_i)); V_i). \tag{1.7}$$

Alors μ_γ et ν_γ dépendent de γ mais donnent des fonctions équivalentes quand γ varie.

Le vecteur $\pi_T^\gamma(\partial^\gamma v_i)$ est le gradient de la restriction de la forme linéaire v_i à T pour le produit scalaire γ. La norme d'une forme linéaire est celle de son gradient. On a donc en fait :

$$\mu_\gamma(v;T) = \inf\{|\sum \alpha_j (v_j - \pi_j)_{|T}|_\gamma / \sum \alpha_j^2 = 1\} \tag{1.8}$$

$$\nu_\gamma(v;T) = \min_{1\le i\le p} |(v_i - \pi_i)_{|\bigcap\limits_{j\neq i} \ker(v_j-\pi_j)\cap T}|_\gamma, \tag{1.9}$$

où $|.|_\gamma$ désigne la norme des formes linéaires construite à partir de la norme $|.|_\gamma$ à la source. Comme toutes les normes de $Lin(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$ sont équivalentes on en déduit que tous les μ_γ sont équivalents entre eux. C'est à dire que pour tout produit scalaire γ il existe des constantes C_γ et C'_γ telles que :

$$C_\gamma \mu_\gamma(v;T) \le \mu(v;T) \le C'_\gamma \mu_\gamma(v;T) \tag{1.10}$$

où $\mu(v;T)$ désigne μ_γ quand γ est la métrique euclidienne. Et bien sûr la même chose est vraie pour ν_γ.

Proposition 1.2.1. *Pour toute application linéaire v de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$,*

$$\mu_\gamma(v;T) \le \nu_\gamma(v;T) \le \sqrt{m}\, \mu_\gamma(v;T). \tag{1.11}$$

Démonstration. Soit $u = \sum \alpha_i \partial^\gamma(v_i - \pi_i)$, $\sum \alpha_i^2 = 1$. Soit $\alpha_i = \max|\alpha_j|$. Alors $|\alpha_i| \ge \frac{1}{\sqrt{m}}$. Soient $x = \pi_T^\gamma(u)$ et $w_i = \pi_{V_i}^{\gamma\perp}(v_i)$. On note w_i le vecteur $\pi_{V_i}^{\gamma\perp}(\partial^\gamma(v_i - \pi_i))$. Il vient :

$$\begin{aligned} |x|_\gamma &\ge |\pi_{V_i}^{\gamma\perp}(x)|_\gamma \\ &= |\pi_{V_i}^{\gamma\perp}(\sum \alpha_j \partial^\gamma(v_j - \pi_j))|_\gamma \\ &= |\alpha_i||w_i|_\gamma \\ &\ge \frac{1}{\sqrt{m}} \nu_\gamma(v;T) \end{aligned}$$

Ce qui montre la deuxième inégalité. Montrons maintenant la première. Soit i un entier. Soit w le vecteur de l'espace engendré par les $\partial^\gamma(v_j - \pi_j)$, $j \ne i$ tel que $\pi_T^\gamma(w) = \pi_{V_i}^\gamma(\partial^\gamma(v_i - \pi_i)$; on dira que $w = \sum\limits_{i\neq j} \beta_j \partial^\gamma(v_j - \pi_j)$. Alors il vient :

$$\begin{aligned} |\pi_{V_i}^{\gamma\perp}(v_i)|_\gamma &= |\pi_T^\gamma(\partial^\gamma(v_i - \pi_i)) - \pi_{V_i}^\gamma(\partial^\gamma(v_i - \pi_i))|_\gamma \\ &= |\pi_T(\partial(v_i - \pi_i) - w)| \\ &= |\pi_T(\sum \alpha_j(\partial^\gamma(v_j - \pi_j)))|_\gamma \quad (\text{avec } \alpha_i = 1,\ \alpha_j = -\beta_j,\ j \ne i) \\ &= \sqrt{\sum_j \alpha_j^2}\quad |\pi_T^\gamma(\sum \frac{\alpha_j}{\sqrt{\sum \alpha_j^2}} (\partial^\gamma(v_j - \pi_j)))|_\gamma \\ &\ge \mu_\gamma(v;T) \qquad (\text{car } \sum \alpha_j^2 \ge 1). \end{aligned}$$

□

Remarque 1.2.2. En fait on peut voir que $\mu(v;N) = \inf_{\substack{u\in\ker v^\perp \\ |u|=1}} |v(u)|$ et donc μ coincide donc avec d dans le cas $T = N$ et γ le produit scalaire euclidien.

Pour l'étude du cas lipschitzien ou C^1, μ_γ ou ν ne nous suffira pas. On introduit $\mu_{1,\gamma}$ (et $\nu_{1,\gamma}$ de manière analogue).

Définition 1.2.3. Soit $K_\gamma = \{\sum \alpha_j \partial^\gamma (v_j - \pi_j)/\sum \alpha_j^2 = 1\}$. Posons :

$$\mu_{1,\gamma}(v;T) = \inf\{|\pi_T^\gamma(u)|_\gamma \ |\pi_T^\gamma(u')|_\gamma/u,\ u' \in K_\gamma,\ \gamma(u;u') = 0\} \tag{1.12}$$

On note $V_{i,j}$ l'espace engendré par les $\pi_T^\gamma(\partial^\gamma v_{j'} - \partial_{j'}$ avec $j' \notin \{j,i\}$. Posons :

$$\nu_{1,\gamma}(v;T) = \min_{i\neq j} d_\gamma(\pi_T^\gamma(\partial^\gamma(v_i - \pi_i)); V_i) d_\gamma(\pi_T^\gamma(\partial^\gamma(v_j - \pi_j)); V_{i,j}) \tag{1.13}$$

On montre de la même manière que pour la proposition 1.2.1 que :

Proposition 1.2.4.

$$\mu_{1,\gamma}(v;T) \leq \nu_{1,\gamma}(v;T) \leq m\mu_{1,\gamma}(v;T) \tag{1.14}$$

Démonstration. La preuve est analogue à celle de la proposition 1.2.1. □

On pourra donc utiliser indifférement une fonction ou l'autre pour définir les conditions au chapitre 2, car elles ne varient pas à une équivalence près. En fait dans notre travail nous nous servirons de μ_1 mais en pratique il est plus simple de vérifier le critère que nous donnerons à partir de ν_1. La fonction ν_1 est définie par un inf qui se porte seulement sur les champs gradient des composantes alors que μ_1 est l'inf sur la sphère et cela permet de réduire les calculs.

On définit enfin une fonction μ entre les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^d$ reliée aux fonctions précédemment définies sur les applications. On utilisera ces fonctions au chapitre 2 pour définir la condition $L(i;j;k)$.

Définition 1.2.5. Soient A et B deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. Soient γ un produit scalaire de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. On pose :

$$\mu_\gamma(A;B) = \inf\{|\pi_B^\gamma(u)|_\gamma, u \in A, |u|_\gamma = 1\} \tag{1.15}$$

et

$$\mu_{1\gamma}(A;B) = \inf\{|\pi_B^\gamma(u)|_\gamma |\pi_B^\gamma(u')|_\gamma/u, u' \in A, |u|_\gamma = |u'|_\gamma = 1, \gamma(u;u') = 0\}.$$

On ennonce maintenant des propriétés qui nous serviront au chapitre 3 pour établir le théorème de pull-back (théorm̀e 3.2.5).

Propriétés 1.2.6. *On a :*

$$\mu_\gamma(A;\pi_B^\gamma(A)) = \mu_\gamma(A;B),$$

$$\mu_{1,\gamma}(A;\pi_B^\gamma(A)) = \mu_{1,\gamma}(A;B)$$

et

$$\mu(A;B) = 0 \iff A^\perp \not\pitchfork B.$$

De plus si A et B sont deux sous-espaces de même dimension :

$$\mu_\gamma(A;B) = \mu_\gamma(B;A)$$

et

$$\mu_{1,\gamma}(A;B) = \mu_{1,\gamma}(B;A)$$

Démonstration. Les deux premières égalités sont claires puisque projeter un vecteur de A sur B ou sur $\pi_B^\gamma(A)$ revient au même.

Etant donnés deux espaces de même dimension on peut trouver une application préservant le produit scalaire qui les échange. Cette application préserve donc μ et μ_1 ce qui démontre les deux dernières inégalités. □

Proposition 1.2.7. *Soient T un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. Alors :*

$$\mu(Y;T) = \mu(0;T)$$

et,

$$\mu_1(Y;T) = \mu_1(0;T)$$

où 0 désigne l'application nulle de $Lin(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$.

Démonstration. D'après les propriétés de μ et la définition :

$$\begin{aligned} \mu(Y;T) &= \mu(Y;\pi_T(Y)) \\ &= \mu(\pi_T(Y);Y) \\ &= \inf_{\substack{u\in\pi_T(Y) \\ |u|=1}} |\pi_Y(u)| \\ &= \mu(0;T). \end{aligned}$$

La même chose est vraie pour μ_1. □

1.2.2 Métrique d'une application linéaire

Une application linéaire v induit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. Celle-ci fait de $\{0\} \times \mathbb{R}^m$ l'orthogonal du graphe de v dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. Elle sera utilisée au chapitre 2 (cf proposition 2.1.5 et définition2.3.4). Il suffit de poser, pour tout couple $(u;u')$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$

$$< u;u' >_v = < (u_1;u_2 - v(u_1));(u'_1;u'_2 - v(u'_1)) >$$

où $u = (u_1;u_2)$ et $u' = (u'_1;u'_2)$. Le gradient de l'application $v_i - \pi_i$ pour cette forme bilinéaire est alors le vecteur ∂_i.

On note μ_v et $\mu_{1,v}$ les fonctions μ_γ et $\mu_{1,\gamma}$ obtenues lorsque γ est la forme bilinéaire symétrique issue de l'application v.

On a alors le résultat suivant :

Proposition 1.2.8.
$$\mu_v(Y;T) = \mu_v(v;T),$$
et
$$\mu_{1,v}(Y;T) = \mu_{1,v}(v;T).$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\mu_v(Y;T) &= \mu_v(Y;\pi_T^v(Y)) \\
&= \inf_{\sum \alpha_i^2=1} |\pi_T^v(\sum \alpha_i \partial_i)|_v \\
&= \inf_{\sum \alpha_i^2=1} |\pi_T^v(\sum \alpha_i \partial^v(v_i - \pi_i))|_v \\
&= \inf_{\sum \alpha_i^2=1} |(\sum \alpha_i \partial^v(v_i - \pi_i))_{|T}|_v \\
&= \inf_{\sum \alpha_i^2=1} |\sum \alpha_i (v_i - \pi_i)_{|T}|_v \\
&= \mu_v(v;T) \qquad \text{cf (1.8).}
\end{aligned}$$

□

En conséquence $\mu_v(Y;T)$ et $\mu_{1,v}(Y;T)$ sont équivalents à $\mu(v;T)$ et $\mu_1(v;T)$ respectivement (d'après (1.10)). C'est à dire :

Proposition 1.2.9. *Pour tout compact K de l'espace des applications linéaires de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ il existe des constantes C et C' telles que :*

$$C'\mu_v(Y;T) \leq \mu(v;T) \leq C\mu_v(Y;T). \tag{1.16}$$

Et,

$$C'\mu_{1,v}(Y;T) \leq \mu_1(v;T) \leq C\mu_{1,v}(Y;T). \tag{1.17}$$

Chapitre 2

Des conditions de régularité

On généralise la condition $t^{i,j}$ définie dans [T-W] et [Wi-2]. On généralise aussi certaines définitions données dans [V] et on donne diverses caractérisations qui unifient les conditions de rugosité et de transversalité. Le but est de donner une caractérisation des conditions $t^{i,j}$ en termes de projections linéaires des vecteurs tangents à Y ce qui nous amènera naturellement au cas lipschitzien.

Dans un deuxième temps on étend donc ce type de condition au cas lipschitzien. On introduit la condition $L(i;j;k)$ qui se rapproche de la condition L de T. Mostowski. On s'efforce de mettre en évidence le parallèle entre le passage de (t) à (w) et le passage de $L(i;j;k)$ à (L).

Etant donné un couple $(q;q')$ de $\mathbb{R}^d$ on pose $\theta(q;q') = \max(d(q;Y);d(q';Y))$. On note π la projection orthogonale sur Y. Pour un sous-espace vectoriel A de $\mathbb{R}^d$ on notera π_A la projection orthogonale sur A.

On rappelle que n et m sont deux entiers fixés, que Y désigne $\mathbb{R}^m$, N désigne $\mathbb{R}^n$ et que $\mathbb{R}^d = N + Y$.

2.1 Définitions et préliminaires

On note $\mathbb{R}_+$ l'ensemble des nombres réels avec en indice le signe $+$ (i. e. a_+ avec $a \in \mathbb{R}$).

On étend à $\mathbb{R} \cup \mathbb{R}_+$ la relation d'ordre de $\mathbb{R}$ de la manière suivante. Soient j et k deux nombres réels. On dira que $k_+ \leq j_+$ si $k \leq j$, $k_+ < j$ si $k < j$ et que $i \leq i_+$ pour tout réel i. On fait alors de i_+ le suivant de i dans $\mathbb{R}$. On étend aussi l'addition en posant :

$$k + j_+ = (k+j)_+.$$

et,

$$k_+ + j_+ = (k+j)_+.$$

Soient f et g deux fonctions définies sur un partie de $\mathbb{R}^d$. On écrira $f \lesssim g$ s'il existe une constante strictement positive C et un voisinage U de l'origine tels que $f(q) \leq Cg(q) \quad \forall q \in U$. On écrira $f(q) \lesssim g(q)^{k_+}$ une fonction ψ définie partout où f et g sont définies, et un voisinage U de l'origine tels que $f(q) \leq g(q)^k \psi(q)$ avec $\psi(q)$ tendant vers zéro quand q tend vers zéro.

Soient j, k dans $\mathbb{R} \cup \mathbb{R}_+$. Avec les notations définies ci-dessus si $|f(q)| \lesssim d(q;Y)^j$ et $|g(q)| \lesssim d(q;Y)^k$ alors $|f(q).g(q)| \lesssim d(q;Y)^{j+k}$.

Définition 2.1.1. Une *transversale directe* à Y est la donnée d'un germe d'application $v : N \to Y$, au moins C^1 de dérivée lipschitzienne. On notera Γ_v son graphe.

Définition 2.1.2. Soit ψ une fonction continue dans un voisinage de zéro privé de l'origine dans $\mathbb{R}^d$. On appelle voisinage d'ordre j de v un voisinage du type :

$$H(v;j;C) = \{q = (x;t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m / |v_i(x) - t_i| \leq C|x|^j\},$$

avec $C \in \mathbb{R}$. On appelle voisinage d'ordre k_- de v un voisinage du type :

$$H(v;j;\psi) = \{q = (x;t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m / |v_i(x) - t_i| \leq \psi(q)|x|^j\}.$$

avec ψ tendant vers l'infini à l'origine.

Pour $j \in \mathbb{R} \cup \mathbb{R}_-$, on notera $\mathcal{H}(v;j)$ l'ensemble des voisinages d'ordre j de v.

On définit une application de $\mathbb{R} \cup \mathbb{R}_-$ dans $\mathbb{R} \cup \mathbb{R}_+$ qui étend l'application $j \mapsto -j$. Pour $j \in \mathbb{R}_-$ on pose $-(j_-) = (-j)_+$. De même on pose $-(j_+) = (-j)_-$. On a alors une relation d'ordre qui fait de j_- le précédent de j.

Pour $i \in \mathbb{R} \cup \mathbb{R}_+ \cup \mathbb{R}_-$ on notera σ l'application qui "omet le signe" i. e. on pose : $\sigma(j_+) = \sigma(j_-) = \sigma(j) = j \quad \forall\ j \in \mathbb{R}$. Soit $\rho \in \mathbb{R} \cup \mathbb{R}_-$. On note $[\rho]$ le plus petit entier inférieur ou égal à ρ (c'est à dire que l'on a $[1_-] = 0$).

Une application $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, dérivable au voisinage de l'origine (sauf peut-être en zéro), sera dite C^ρ (resp. $C^{\rho-}$) si elle est $C^{[\omega]}$ et si pour tout multi-index ω, $0 \leq |\omega| \leq [\rho]$, $d^\omega(f-p)(x) \ll |x|^{\rho-|\omega|}$ (resp. $\leq C|x|^{\rho-|\omega|}$ pour une constante C), où p est le polynôme de degré $[\rho]$ représentatif de $j^{[\rho]}f(0)$. Une fonction C^{1-} est une fonction lipschitzienne dérivable en dehors de l'origine.

Définition 2.1.3. Soit A une partie de $\mathbb{R}^d$et k un élément de $\mathbb{R} \cup \mathbb{R}_+$. Une fonction $w : A \to \mathbb{R}$ sera dite rugueuse d'exposant i (relativement à Y) si pour tout point q de A.

$$|w(q) - w(\pi(q))| \lesssim d(q;Y)^i. \tag{2.1}$$

Elle sera dite lipschitzienne d'exposant k si elle est rugueuse d'exposant $k+1$ et si en outre pour tout couple $(q;q') \in A \times A$ tel que $|q - q'| \leq \frac{1}{2c} d(q;Y)$ (pour un $c > 1$) :

$$|w(q) - w(q'))| \lesssim d(q;Y)^k |q - q'|. \tag{2.2}$$

Remarque 2.1.4. (i) Pour une application qui induit l'application constante sur Y on peut omettre la restriction sur les couples $(q;q')$ et l'hypothèse que "rugueuse d'exposant $k+1$" dans la défintion des fonctions lipschitz d'exposant k à condition de renforcer l'inégalité à satisfaire. Plus précisément :

une fonction est lipschitzienne d'exposant k si et seulement si pour tout couple $(q;q') \in A \times A$:

$$|w(q) - w(q'))| \lesssim \theta(q;q')^k |q - q'| \tag{2.3}$$

(ii) Une application lipschitz d'exposant 0_+ dérivable en dehors de Y est une application C^1 au sens de Whitney.

Nous avons vu au paragraphe 1.2.2 qu'une application linéaire induisait une forme bilinéaire. Soit $v : N \to Y$ une transversale directe. On définit le difféomorphisme local ϕ_v de $\mathbb{R}^d$ par $\phi_v(x;t) = (x; t - v(x))$. Celle-ci induit une métrique riemannienne, qui vaut au point $q = (x;t)$ la métrque induite par $d_x v$, en posant pour tout point q dans un voisinage de l'origine :

$$< a; b >_{v,q} = < d_q\phi_v(a); d_q\phi_v(b) > \qquad a, b \in \mathbb{R}^d. \tag{2.4}$$

Pour une fonction f définie au voisinage de zéro dans $\mathbb{R}^n$ on désignera par $\partial^v f$ son vecteur gradient relativement à cette métrique.

Proposition 2.1.5. *Soit $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ définie au voisinage de zéro dans $\mathbb{R}^d$. Soient X une sous-variété de $\mathbb{R}^d$ et u et v deux transversales directes. Soit $q \in \phi_{-u-v}(X)$. On pose $q' = \phi_v(q)$ alors :*

$$\partial_q^{u+v}(f \circ \phi_{u+v}) = d\phi_v^{-1}(q')\partial_{q'}^u(f \circ \phi_u)$$

et,

$$\partial_q^{u+v}(f \circ \phi_{u+v})_{|X} = d\phi_v^{-1}(q')\partial_{q'}^u(f \circ \phi_u)_{|\phi_v(X)}.$$

Et par conséquent pour $r \in \{1, \dots, m\}$:

$$\partial^v(\pi_r \circ \phi_v) = \partial_r,$$

$$\partial^v(\pi_r \circ \phi_v)_{|X} = d\phi_v^{-1}(q')P_{q'}(\partial_r).$$

Démonstration. Soit $q'' = \phi_u(q') = \phi_{u+v}(q)$. Il découle des définitions que $\partial_{q'}^u(f \circ \phi_u) = d\phi_u^{-1}(q'')\partial_{q''}f$. De plus $\phi_u \circ \phi_v = \phi_{u+v}$. Donc :

$$\begin{aligned} d\phi_v^{-1}(q')\partial_{q'}^u(f \circ \phi_u) &= d\phi_v^{-1}(q')d\phi_u^{-1}(q'')\partial_{q''}f \\ &= d\phi_{v+u}^{-1}(q'')\partial_{q''}f \\ &= \partial_q^{u+v}(f \circ \phi_{u+v}). \end{aligned}$$

Même chose pour les restrictions. □

Définition 2.1.6. Soit X une partie de $\mathbb{R}^d$. Un $Y-$fibré vectoriel de $\mathbb{R}^d$ sur X est un fibré vectoriel $G : \Lambda \to X$ tel que $\Lambda_{|Y \cap X} = Y \cap X \times Y$. Un $Y-$fibré vectoriel $G : \Lambda \to X$ étant fixé on notera Λ_q la fibre au dessus du point $q \in X$ et $\mathcal{G}_G$ (où $\mathcal{G}$ s'il n'y a pas de confusion) l'espace de ses fibres i. e. :

$$\mathcal{G}_G = \{q \times \Lambda_q / q \in X\}.$$

Ceci va nous permettre de généraliser à la catégorie lipschitz les conditions de stabilité sur les transversales données par D. Trotman et L. Wilson.

2.2 Rugosité et transversalité

2.2.1 Des conditions pour les fibrés vectoriels

On définit ici les fibrés vectoriels rugueux d'exposant i. On généralise à l'ordre i la définition donnée par Verdier dans [V]. Soit $i \in \mathbb{R} \cup \mathbb{R}_+$.

Définition 2.2.1. Soit X une partie de $\mathbb{R}^d$, v une transversale directe et soit G un $Y-$fibré au dessus de X. $(v; G)$ est dit rugueux d'exposant i s'il admet une trivialisation (en tant que fibré vectoriel) $H : U \times Y \to G^{-1}(U)$ vérifiant pour une constante C :

$$|h_q - Id| \leq C\, d(q; Y)^i$$
$$|h_q^{-1} - Id| \leq C\, d(q; Y)^i$$

et,

$$\pi^v \circ h_q = Id_{|Y},$$

où π^v dénote la projection sur Y pour la métrique issue de v, $h_q : Y \to \Lambda_q$ l'application linéaire $H(.; q)$ et $|.|$ désigne la norme des applications linéaires de Y à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ et U un ouvert de X.

Remarque 2.2.2. Un $Y-$fibré vectoriel est rugueux d'exposant i si et seulement s'il admet un système de sections $(w_1; \ldots; w_m)$ rugueuses d'exposant i vérifiant pour tout $r = 1, \ldots, m$:

$$\pi^v(w_r(q)) = \partial_r.$$

2.2.2 Stratifications t^i régulières

La condition t^i est une condition introduite par D. Trotman. Elle généralise une condition introduite par R. Thom qui correspond au cas des variétés C^∞. On en rappelle la définition qui est celle de [T-W] ou [Wi-2]. Soit $G^d = \bigcup_{j=m}^d G(d; j)$ où $G(d; j)$ est la grassmannienne des plans de dimension j dans $\mathbb{R}^d$.

Dans tout ce qui suit on notera X une partie de $\mathbb{R}^d$, et $\mathcal{G}$ le graphe d'une application Λ de X dans G^d. Etant donnée une telle partie on notera P_q^v la projection sur Λ_q relativement à la métrique induite par v, et $\mathcal{G}_Y^v$ le graphe de la fonction Λ_Y définie par $\Lambda_Y(q) = P_q^v(Y)$. C'est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^d \times G^d$.

Dans [T-W] et [Wi-2] il est défini la fonction τ. Nous en rappelons la définition ici :

$$\begin{aligned}\tau(U; V) &= \sup_{u \in U - \{0\}} \inf_{v \in V - \{0\}} \tan\, \theta(u; v) \\ &= \sup \frac{|\pi_V^\perp(u)|}{|\pi_V(u)|}\end{aligned}$$

où $\theta(u; v)$ désigne l'angle entre u et v.

Soit $\Sigma(T) = \{v \in Lin(N; Y) / \Gamma_v \not\pitchfork T\}$.

On commence par rappeler la définition des conditions $t^{j,i}$. Comme dans [T-W], pour $i \in \mathbb{R}$, on dira que une suite (y_s) est i-plate par rapport à (x_s) si $|y_s| \ll |x_s|^i$. On dira que une suite (y_s) est i_--plate par rapport à x_s si $|y_s| \lesssim |x_s|^i$.

Définition 2.2.3. Soient $i, j \in \mathbb{R} \cup \mathbb{R}_-$. On dira que $(v; \mathcal{G})$ est $t^{j,i}$ si aucune suite $(x_s; y_s; T_s)$ de points de $\mathcal{G}$ tendant vers 0 ne vérifie : $|y_s - v(x_s)|$ soit j-plate et $d(d_{x_s}v; \Sigma(T_s))$ soit i-plate.

On dira que le couple $(v; \mathcal{G})$ est t^i en 0 s'il est $t^{i,i-1}$. C'est à dire on dira que le couple $(v; \mathcal{G})$ est t^i en 0 si aucune suite $(x_s; y_s; T_s)$ de points de $\mathcal{G}$ tendant vers 0 ne vérifie :

$$\begin{aligned} |y_s - v(x_s)| &\ll |x_s|^i \quad \text{et} & (2.5)\\ d(d_{x_s}v; \Sigma(T_s)) &\ll |x_s|^{i-1}. & (2.6) \end{aligned}$$

Et de même on dira que $(v; \mathcal{G})$ est t^{i-} en 0 si aucune suite $(x_s; y_s; T_s)$ de points de $\mathcal{G}$ tendant vers 0 ne vérifie :

$$\begin{aligned} |y_s - v(x_s)| &\lesssim |x_s|^i \quad \text{et} & (2.7)\\ d(d_{x_s}v; \Sigma(T_s)) &\lesssim |x_s|^{i-1}. & (2.8) \end{aligned}$$

Dans le cas d'une stratification la condition t^i se caractérise par la transversalité aux autres strates des transversales à Y. Soit $\mathcal{S} = (X_b)_{b \in B}$ une famille de variétés. Soit $v : N \to Y$ est une transversale directe.

Définition 2.2.4. Soit $r \in \mathbb{R} \cup \mathbb{R}_-$ supérieur ou égal à 1. On dira que $(v; \mathcal{S})$ est t^r à l'origine si pour toute transversale C^r z ayant le même $r-$jet que v à l'origine, il existe un voisinage de l'origine tel que Γ_z soit transverse à toutes les variétés X_b dans ce voisinage.

On désigne par $\mathcal{G}(\mathcal{S})$ la réunion des ensembles des fibres des fibrés tangents aux variétés X_b. Alors un résultat dû à D. Trotman et L. Wilson (cf [T-W]) $(v; \mathcal{G}(\mathcal{S}))$ satisfait la condition t^r si et seulement si $(v; \mathcal{S})$ la satisfait.

2.2.3 Caractérisations des conditions de Trotman-Wilson

Nous allons caractériser les conditions t^r à l'aide de la métrique induite par la transversale v que nous avons introduite précédemment. On généralise ainsi des résultats connus pour la transversale nulle qui utilisent la métrique euclidienne. Tout d'abord on introduit la fonction τ_v qui généralise de manière naturelle la fonction τ à la métrique induite par v. $\mathcal{G}$ désigne encore le graphe d'une application Λ de X dans G^d.

On pose :

$$\tau_v(U; V)_q = \sup_{\substack{u \in U \\ |u|=1}} \frac{|\pi_V^{v^\perp}(u)|_{v,q}}{|\pi_V^v(u)|_{v,q}}. \tag{2.9}$$

Comme $|\pi_V^{v^\perp}(u)|^2_{v,q} + |\pi_V^v(u)|^2_{v,q} = 1$ le numérateur est maximal quand le dénominateur est minimal. Alors :

$$\begin{aligned} \tau_v(U;V)_q &= \frac{\sup\limits_{\substack{u\in U\\ |u|=1}} |\pi_V^{v^\perp}(u)|_{v,q}}{\inf\limits_{\substack{u\in U\\ |u|=1}} |\pi_V^{v}(u)|_{v,q}} \\ &= \frac{|\pi^{v^\perp}_{V_{|U}}|_{v,q}}{\mu_v(U,V)_q} \\ &= \frac{\delta_v(U;V)_q}{\mu_v(U,V)_q}. \end{aligned} \tag{2.10}$$

On rappelle le résultat suivant :

$$\delta(A\cap B; C\cap B) \leq \frac{\delta(A\cap B;C)}{\mu(B^\perp;C)} \tag{2.11}$$

pour A, B, C trois sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^d$. C'est une conséquence des définitions. On pourra se rapporter au chapitre 7, preuve du théorème 7.2.1 pour la démonstration.

On va alors généraliser un lemme de [T-W]. En effet il est démontré pour tout $T \in G^d$:

$$\tau(Y;T) = 1/d(0;\Sigma(T)). \tag{2.12}$$

Lemme 2.2.5. *Pour tout $T \in G^d$,* $\quad \tau_v(Y;T)_q = 1/d(d_x v;\Sigma(T))$.

Démonstration. Remarquons d'abord que $\tau_v(Y;\Lambda_q)_q = \tau(Y; d\phi_v(q)\Lambda_q)$ puisque par définition $d\phi_v(q)$ réalise un isomorphisme de $\mathbb{R}^d$ muni du produit scalaire euclidien sur $\mathbb{R}^d$ muni du produit scalaire induit par v. On commence par démontrer que $L \in \Sigma(T)$ si et seulement si $(L - d_x v) \in \Sigma(d_q\phi(T))$.

Soit $L \in \Sigma(T)$. Alors $\Gamma_L \not\pitchfork T$, ce qui équivaut à $d_q\phi_v(\Gamma_L) \not\pitchfork d_q\phi_v(T)$, ce qui revient à dire que $\Gamma_{(L-d_x v)} \not\pitchfork d_q\phi_v(T)$ (car $d_q\phi_v = (\pi^\perp; \pi^\perp - d_x v)$).

Par conséquent $d(d_x v;\Sigma(T)) = d(0;\Sigma(d_q\phi_v(T)))$. Et donc :

$$\begin{aligned} \tau_v(Y;T_qX)_q &= \tau(Y; d\phi(q)\Lambda_q) \\ &= 1/d(0;\Sigma(d_q\phi(T))) \quad \text{d'après (2.12)} \\ &= 1/d(d_x v;\Sigma(T)). \end{aligned}$$

□

Ceci nous améne à une caractérisation de la condition t^i qui fait le lien avec l'inégalité (2.15) de la définition de la condition L.

Proposition 2.2.6. *Soient $i, j \in \mathbb{R}\cup\mathbb{R}_-$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) Le couple $(v;\mathcal{G})$ est $t^{j,i}$-régulier.

(ii) Pour tout point $q \in X$ dans un voisinage d'ordre j de v et pour tout vecteur unitaire u dans Y :

$$|\, P_q^{v\perp}(u)| \lesssim \; |P_q^v(u)| d(q;Y)^{-i}.$$

(iii) Pour tout point $q \in X$ dans un voisinage d'ordre j de v :

$$|\,P_q^{v\perp}\pi| \lesssim\ \mu_v(Y;\Lambda_q)_q d(q;Y)^{-i}.$$

(iv) Pour tout point $q \in X$ dans un voisinage d'ordre j de v :

$$\tau_v(Y;\Lambda_q)_q \lesssim\ d(q;Y)^{-i}.$$

Démonstration. Soit $i \in \mathbb{R}$(resp. $\in \mathbb{R}_-$). $(v;\mathcal{G})$ est t^i si et seulement si aucune suite ne vérifie les égalités (2.5) et (2.6) (resp. (2.7) et (2.8)). Or le lemme 2.2.5 nous dit que ceci est équivalent à $\tau_v(Y;\Lambda_q)_q \lesssim d(q;Y)^{-i}$ dans tous les cas (on rappelle que par convention $-k_- = (-k)_+$) pour tout point q de X dans un voisinage d'ordre j de v. Ceci montre que (i) est équivalent à (iv).

L'équivalence de (iv) avec la propriétés (ii) découle de l'égalité (2.9) et l'équivalence de (iv) avec (iii) découle de (2.10). □

Pour $i \geq 1$ la condition t^i s'interprète en termes de transversalité. On peut également la caractériser uniquement à l'aide de $\mu_v(Y;\Lambda_q)_q$.

Proposition 2.2.7. *Soient i et $j \in \mathbb{R} \cup \mathbb{R}_-$ supérieurs à 1. Le couple $(v;\mathcal{G})$ vérifie la condition $t^{j,i}$ si et seulement s'il existe un voisinage d'ordre j de v tel que pour tout point $q \in X$ dans ce voisinage :*

$$\frac{1}{\mu_v(Y;\Lambda_q)_q} \lesssim d(q;Y)^{-i}. \tag{2.13}$$

Démonstration. C'est une conséquence de la caractérisation (iii) de la proposition 2.2.6. La condition est clairement suffisante à (2.13) puisque $|P_q^{v\perp}\pi|$ est borné. Il reste à montrer qu'elle est nécéssaire.

En fait $|P_q^{v\perp}\pi|^2 + \mu_v(Y;\Lambda_q)_q^2 = 1$ par définition de μ_v. Donc si $|P_q^{v\perp}\pi| \leq \frac{1}{2}$ alors $\frac{1}{\mu_v(Y;\Lambda_q)_q} \leq 2$ et, comme i est supérieur à 1 on a : $2 \lesssim d(q;Y)^{-i}$. L'inégalité (2.13) s'avère donc.

Si $|P_q^{v\perp}\pi| \geq \frac{1}{2}$ il est clair que (iii) implique l'inégalité (2.13). □

Remarque 2.2.8. Si le couple $(v;\mathcal{G})$ vérifie la condition t^i pour un réel $i \leq -1$ alors la fonction $\mu_v(Y;\Lambda_q)_q$ est bornée inférieurement par un réel strictement positif.

Il en est de même pour la fonction $\mu_{1v}(Y;\Lambda_q)_q$ (puisque $\mu_v^2 \leq \mu_{1,v} \leq \mu_v$).

Une autre conséquence de 2.2.6 est que , pour i négatif, la condition t^i avec $i \in \mathbb{R}$ est en fait la condition w de Verdier avec exposant $-i$. La condition t^{0,i_-} est la condition w forte de Verdier avec exposant $-i$ (c'est à dire $\tau_v(Y;\Lambda_q)_q \ll d(q;Y)^i$). Nous noterons donc parfois la condition w^i avec $i \in \mathbb{R}\cup\mathbb{R}_+$ pour désigner la condition $t^{0;1-i}$ (on rapelle que $-(i_+) = (-i)_-$).

La condition t^i peut être caractérisée en termes de relèvement des champs de vecteurs tangents à Y.

Proposition 2.2.9. *On suppose que $\tau_v(Y;\Lambda_q)_q < \infty$. Alors :*

(i) Tout champ de vecteur u de Y est π_v relevable à un champ w tel que $w(q) \in \Lambda_q$ et $|w(q) - u| \leq |u|\tau_v(Y;\Lambda_q)_q$.

(ii) *Si tout vecteur u de Y est π_v relevable à un champ w tel que $w(q) \in \Lambda_q$ et satisfaisant $|w(q) - u| \leq C|u|$, alors $\tau_v(Y; \Lambda_q)_q \leq C$.*

Démonstration. Puisque $\Lambda_Y(q) = P_q^v(Y)$ on a : $\tau_v(Y; \Lambda_q)_q = \tau_v(Y; \Lambda_Y(q))_q$ et, comme $dim\ Y = dim\ \Lambda_Y(q)$, $\tau_v(Y; \Lambda_Y(q))_q = \tau_v(\Lambda_Y(q); Y)_q$. Comme $\tau_v(Y; \Lambda_q)_q < +\infty$, $\pi_{v|\Lambda_Y(q)}$ est un isomorphisme. On pose $w(q) = (\pi_{v|\Lambda_Y^v(q)})^{-1}(u)$. Et comme $\frac{|w - \pi_v(w)|}{|\pi_v(w)|} \leq \tau_v(Y; \Lambda_q)_q$, le point (i) est démontré.

Démontrons le point (ii). On peut relever une base de Y. Ce relèvement engendre un sous-espace de Λ_q que l'on note $\mathcal{D}(q)$. Alors $\tau_v(Y; \mathcal{D}(q)) \leq C$ et, puisque $\tau_v(Y; \Lambda_q)_q \leq \tau_v(Y; \mathcal{D}(q))_q$, le point (ii) est démontré. □

Proposition 2.2.10. *Soit G un $Y-$fibré. Le couple $(v; \mathcal{G})$ satisfait la condition t^i si et seulement si $(v; G(\mathcal{G}))$ est un fibré rugueux d'exposant $(1 - i)$ au dessus d'un voisinage d'ordre i de v dans X. En d'autres termes le couple $(v; \mathcal{G})$ satisfait la condition t^i si et seulement s'il existe une constante C et un voisinage $H \in \mathcal{H}(v; i)$ telle que tout vecteur u de Y soit π_v-relevable à un champ w satisfaisant $|w(q) - u| \leq C|u|d(q; Y)^{1-i}$, $\forall\, q \in H \cap X$.*

Démonstration. D'après la proposition 2.2.6 $(v; \mathcal{G})$ satisfait la condition t^i si et seulement si $\tau_v(Y; \Lambda_q)_q \lesssim d(q; Y)^{1-i}$. La proposition est alors une conséquence de la proposition précédente. □

2.3 Conditions de type lipschitzien

2.3.1 Le cas des Y-fibrés

Dans toute cette section on se donne un Y-fibré G au dessus d'un espace X.

Définition 2.3.1. Soit X une partie de $\mathbb{R}^d$ et soit G un $Y-$fibré au dessus de X. $(v; G)$ est dit lipschitzien d'exposant ks'il est rugueux d'exposant $k + 1$ si la trivialisation vérifie en outre :

il existe une constante C telle que pour tout couple $(q; q') \in X \times X$ tel que $|q - q'| \leq \frac{1}{2c} d(q; Y)$, h_q vérifie :

$$|h_q - h_{q'}| \leq C|q - q'|d(q; Y)^k,$$

et,

$$|h_q^{-1} - h_{q'}^{-1}| \leq C|q - q'|d(q; Y)^k.$$

Remarque 2.3.2. Pour k positif il n'est pas nécéssaire d'imposer des conditions sur h_q^{-1}. Celles-ci découlent des conditions sur h_q.

De même que pour les fibrés rugueux, un Y-fibré vectoriel est lipschitzien d'exposant k si et seulement s'il admet un système de sections $(w_1; \ldots; w_m)$ rugueuses d'exposant $k + 1$ et lipschitziennes d'exposant k vérifiant pour tout $r = 1, \ldots, m$:

$$\pi^v(w_r(q)) = \partial_r.$$

Pour l'étude lipschitzienne la condition t^i ne nous suffira pas. Nous avons introduit μ_1 au premier chapitre. Nous allons définir la condition t_1^i qui est l'analogue de la condition t^i pour la fonction μ_1 (cf proposition 2.2.7).

Définition 2.3.3. On dira que $(v; G)$ satisfait la condition t_1^i si pour tout point q dans un voisinage d'ordre i de $\Gamma_v \cap X$:

$$\frac{1}{\mu_{1v}(Y; \Lambda_q)_q} \lesssim d(q; Y)^{1-i}. \tag{2.14}$$

On définit maintenant la condition $L(i; j; k)$. Dans la section précédente nous avons fait le lien entre t^i pour le couple $(v; \mathcal{G})$ et la première assertion de la condition L de Mostowski en utilisant la métrique induite par la transversale v. Soient k et i deux éléments de $\mathbb{R} \cup \mathbb{R}_+$ tels que $i \geq k$ et j un élément de $\mathbb{R} \cup \mathbb{R}_-$. Soit $\mathcal{G}$ le graphe d'une application Λ de X dans G^d.

Il est important de voir que les réels i et k peuvent être négatifs.

Définition 2.3.4. On dira que $(v; \mathcal{G})$ est $L(i; j; k)$ régulier si les conditions suivantes sont vérifiées :

(i) Il existe un voisinage $H_1 \in \mathcal{H}(v; -i)$ tel que pour tout point $q \in X \cap H_1$:

$$| P_q^{v\perp} \pi | \lesssim \ \mu_v(Y; \Lambda_q)_q d(q; Y)^{i+1}. \tag{2.15}$$

(ii) Il existe un voisinage $H_2 \in \mathcal{H}(v; j)$ tel que pour tout couple $(q; q') \in X \cap H_2 \times X \cap H_2$ satisfaisant $|q - q'| \leq \frac{1}{2c} d(q; Y)$:

$$| (P_q^v - P_{q'}^v) \pi | \lesssim \ C \, |q - q'| d(q; Y)^k \ \mu_v(Y; \Lambda_q)_q \mu_{1v}(Y; \Lambda_q)_q. \tag{2.16}$$

On dira que $(v; G)$ est $L(i; j; k)$ régulier si $(v; \mathcal{G}(G))$ l'est.

Exemple 2.3.5. Si $\mathcal{S}$ est une stratification satisfaisant la condition L de Mostowski alors le fibré tangent à Y s'étend à un fibré G lipschitzien d'exposant 0. Alors on peut voir que $L(0; 0; 0)$ est satisfaite pour $(v; \mathcal{G}(G))$.

2.3.2 Le cas des stratifications

Ici on se limitera au cas des espaces stratifiés comportant deux strates. Cependant les résultats de stabilité lipschitz des germes d'intersection des transversales aux espaces stratifiés que nous obtiendrons au chapitre 6 concernerons les espaces stratifiés dans leur généralité car les conditions porteront sur des fibrés tangents aux strates. Il serait intéressant de donner une condition aussi explicite que celle de Mostowski pour que le fibré tangent à Y s'étende en un fibré $L(i; j : k)$ régulier tangent aux strates.

Dans cette section X désigne donc une variété lisse telle que Y soit incluse dans la fermeture de X. On note P_q^v la projection sur T_qX relativement à la métrique induite par v. Soit $\mathcal{S}$ la stratification formée du couple $(X; Y)$.

Définition 2.3.6. On dira que $(v; \mathcal{S})$ est $L(i; j; k)$ régulier si les conditions suivantes sont vérifiées :

(i) Il existe un voisinage $H_1 \in \mathcal{H}(v; -i)$ tel que pour tout point $q \in X \cap H_1$:

$$|P_q^{v\perp}\pi| \lesssim \mu_v(Y; T_qX)d(q; Y)^{i+1}. \tag{2.17}$$

(ii) Il existe un voisinage $H_2 \in \mathcal{H}(v; j)$ tel que pour tout couple $(q; q') \in X \cap H_2 \times X \cap H_2$ satisfaisant $|q - q'| \leq \frac{1}{2c}d(q; Y)$:

$$|(P_q^v - P_{q'}^v)\pi| \lesssim C\,|q - q'|d(q; Y)^k\, \mu_v(Y; T_qX)\mu_{1,v}(Y; T_qX). \tag{2.18}$$

Remarque 2.3.7. Le couple $(v; \mathcal{G})$ vérifie la condition t_1^i (resp.$L(i; j; k)$) si et seulement si le couple $(v; \mathcal{G}_Y^v)$ la satisfait. En effet il revient au même de projeter un vecteur de Y sur Λ_q ou sur le projeté orthogonal de Y sur Λ_q.

2.3.3 Sur les conditions L

Remarque 2.3.8. Soit i un élément de $\mathbb{R} \cup \mathbb{R}_+$. Pour $i \geq -1$ la restriction $|q - q'| \leq \frac{1}{2c}d(q; Y)$ peut être omise à condition de remplacer la condition (2.16) par :

$$|(P_q^v - P_{q'}^v)\pi| \lesssim |q - q'| \max(d(q; Y); d(q'; Y))^k\, \mu(Y; \Lambda_q)\mu_1(Y; \Lambda_q).$$

En effet pour $i \geq -1$, $\mu(Y; \Lambda_q)$ et $\mu_1(Y; \Lambda_q)$ sont bornées inférieurement. L'inégalité (2.16) équivaut donc à :

$$|(P_q^v - P_{q'}^v)\pi| \lesssim |q - q'| \max(d(q; Y); d(q'; Y))^k. \tag{2.19}$$

Et pour $(q; q')$ satisfaisant $|q - q'| \geq \frac{1}{2c}d(q; Y)$:

$$\begin{aligned}
|(P_q^v - P_{q'}^v)\pi| &= |(P_q^{v\perp} - P_{q'}^{v\perp})\pi| \\
&\lesssim |P_q^{v\perp}\pi| + |P_{q'}^{v\perp}\pi| \\
&\lesssim d(q; Y)^{i+1} + d(q'; Y)^{i+1} \\
&\lesssim 2c|q - q'|(d(q; Y) + d(q'; Y)) \\
&\lesssim |q - q'|\ \max(d(q; Y)^i; d(q'; Y)^i) \\
&\lesssim |q - q'|\ \max(d(q; Y)^k; d(q'; Y)^k) \quad \text{car}\ \ k \leq i.
\end{aligned}$$

Proposition 2.3.9. *On suppose que i est un réel supérieur ou égal à -1. Alors la condition $L(i; j; k)$ peut de manière équivalente être écrite à partir de la métrique issue de n'importe quelle transversale.*

Démonstration. Pour $i \geq -1$, d'après la remarque 2.2.8, $|P_q^v(\partial_r)|$ ne tend pas vers zéro. D'après la proposition 2.2.9 on peut alors relever les champs $\partial_1, \ldots, \partial_m$ à des champs $w_1, \ldots, w_m$, tangents à $\mathcal{G}$ et vérifiant :

Pour tout point $q \in H_1$

$$|w_r(q) - \partial_r| \lesssim \tau_v(Y; \Lambda_q)_q$$

Pour tout couple $(q; q') \in H_2$ satisfaisant $|q - q'| \leq \frac{1}{2c}d(q; Y)$,

$$|w_r(q) - w_r(q')| \lesssim |q - q'|d(q; Y)^k.$$

Et donc :

$$\begin{aligned} |Pq^{\perp}(\partial_r)| &\lesssim |w_r(q) - \partial_r| \\ &\lesssim d(q;Y)^{i+1}. \end{aligned}$$

Ceci montre que (2.15) est vérifiée par $(v;\mathcal{G})$. Mais aussi :

$$\begin{aligned} |(P_q - P_{q'})(\partial_r)| &\leq 2|w_r(q) - w_r(q')| + |P_q - P_{q'}|(w(q) - \partial_r)| \\ &\lesssim |q-q'|d(q;Y)^k + |P_q - P_{q'}|\tau_v(Y;\Lambda_q)_q \\ &\lesssim |q-q'|d(q;Y)^k. \end{aligned}$$

Ceci montre que (2.16) est vérifiée pour la métrique euclidienne.

L'implication réciproque se démontre de la même manière. □

La condition $L(i;j;k)$ peut elle aussi être caractérisée en termes de relèvement de champs de vecteurs. Il s'agira cette fois d'obtenir des relèvements lipschitziens de champs pour π_v.

Proposition 2.3.10. *Soit G un Y-fibré. On suppose que i est supérieur ou égal à -1 . $(v;\mathcal{G}_G)$ est $L(i;j;k)$ si et seulement s'il existe $H_1 \in \mathcal{H}(v;i)$ et $H_2 \in \mathcal{H}(v;j)$ tels que $(v;G_{|H_1})$ soit un fibré rugueux d'exposant $i+1$ et $(v;G_{|H_2})$ soit un fibré lipschitzien d'exposant k.*

Démonstration. Si $(v;\mathcal{G}_G)$ vérifie la condition $L(i;j;k)$, $w_r = P_q(\partial_r)$ nous donne un système de sections de G. Comme $\nu_1(Y;\Lambda_q)$ est bornée inférieurement on peut alors facilement construire une famille qui relève $\partial_1,\ldots,\partial_m$.

Réciproquement d'après la proposition 2.2.10, s'il existe H_1, voisinage d'ordre $-i$, tel que $(v;G_{H_1})$ soit un fibré rugueux d'exposant $i+1$, alors la condition (2.15) est vérifiée. Comme i est supérieur ou égal à -1, on peut démontrer (2.16) pour la métrique euclidienne. De plus d'après la proposition 2.2.7 (cf remarque 2.2.8) μ est alors bornée inférieurement. Il suffit donc de montrer : $|P_q - P_{q'}| \lesssim |q-q'|\max(d(q;Y);d(q';Y))^k$ dans un voisinage d'ordre j. Mais si $(v;\mathcal{G}_{|H_2})$ est un fibré lipschitzien d'exposant k, on peut relever une base de Y à des sections w_r qui engendrent Λ_q et $\Lambda_{q'}$ respectivement et le résultat est alors clair. □

Dans le cas des fibrés $dim\,\Lambda_q = dim\,Y$. Dans le cas $i \geq -1$ peut alors omettre la projection π dans (2.16). Pour $i \leq -1$ on peut écrire :

$$\begin{aligned} |P_q - P_{q'}| &= \delta(\Lambda_q;\Lambda_{q'}) \\ &\leq \sup_{w\in Y} |P_{q'}^{\perp}P_q\frac{w}{|P_q(w)|}| \\ &\leq \frac{|(P_q - P_{q'})(w)}{\mu(Y;\Lambda_q)} \end{aligned}$$

Ce qui donne lorsque (2.16) est vérifiée :

$$|P_q - P_{q'}| \lesssim d(q;Y)^k|q-q'|\mu_1(Y;\Lambda_q). \tag{2.20}$$

Chapitre 3

Pullback et condition $L(i;j;k)$

On va maintenant donner plusieurs théorèmes de type “pull-back” pour les espaces stratifiés vérifiant les conditions définies au chapitre précédent. Nous allons regarder les effets qu'ont des applications particulières, les déformations de transversales, sur les conditions définies au chapitre 2 et voir qu'elles permettent d'augmenter fortement la régularité. Dans [T-W] il est montré par exemple que si le contact est suffisament bon les conditions de transversalité de type t^k peuvent induire la condition (w). Dans un premier temps on généralise ce résultat à l'ordre i c'est à dire que l'on donne un théorème où la condition w^i apparait dans un pull-back. Nous verrons au chapitre 5 les conséquences de la condition w^i sur le type métrique des stratifications sous-analytiques. En conséquence de ces deux chapitres nous verrons au chapitre 6 les conséquences de la condition t^k sur les types métriques des sections transverses.

Dans un second temps nous montrons que la condition L possède des propriétés analogues. En particulier nous obtiendrons des conditions suffisantes à la trivialité bilipschitz des strates le long de Y. Dans le cas d'un espace stratifié comportant seulement deux strates on obtient même la différentiabilité des fibrés (au sens de Whitney) après pull-back. Dans un troisième temps on s'intéresse à l'éclatement de Kuo-Trotman [Ku-T] qui est un cas particulier de pull-back à travers une déformation de transversale (modulo une carte de la grassmannienne). On obtient un analogue lipschitz de ce résultat. On généralise ainsi un résultat qui concerne les stratifications $a-$régulière (voir [Ku-T-X] ou [Ku-T]). En particulier, une conséquence de ce théorème est que, pour un couple de strates satisfaisant la condition L de Mostowski l'éclatement induit un fibré C^1 au sens de Whitney.

Dans ce chapitre m' désignera un entier naturel ; nous noterons Y' l'ensemble $\{0\} \times \mathbb{R}^{m'}$ et $\mathbb{R}^{d'}$ désignera $N + Y'$. G sera un Y-fibré.

Etant donnée une application $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ (resp.$f : \mathbb{R}^{d'} \to \mathbb{R}^{d'}$) on notera f_N sa composante suivant N, f_Y (resp $f_{Y'}$) sa composante suivant Y (resp. Y'), et f_{Y_s} (resp. $f_{Y'_s}$) la s^{eme} composante de f_Y (resp. $f_{Y'}$) dans la base canonique de Y (resp. Y').

On introduit donc comme dans [T-W] la notion de déformation de transversales.

Soit U un voisinage de zéro dans $\mathbb{R}^{d'}$. Soient $g, h_1, \ldots, h_{m'} : N \to Y$, des applications C^1 sur U, de dériveé lipschitzienne avec $|h_r| \lesssim |x|^\rho$ et $|d_x h_r| \lesssim |x|^{\rho-1}$ pour tout r. Alors,

$$F : N \times U \to N \times Y,$$

$$\begin{aligned} F(x;u) &= (x, f(x,u)) = (x, f_u(x)) \\ &= \left(x,\ g(x) + \sum_{r=1}^{m'} u_r h_r(x)\right) \end{aligned}$$

est appelée déformation d'ordre ρ.

Les déformations de transversales induisent des transformations de type pull-back pour les fibrés vectoriels et même plus généralement pour les graphes d'applications de $N+Y$ dans G^d. On définit cela comme dans [T-W].

On définit d'abord le push-forward d'une transversale. Soit u une transversale à Y' . On notera F^*u la transversale définie par $v(x) = g(x) + \sum_{r=1}^{m'} u_r(x)h_r(x)$. L'application F envoie alors le graphe de u sur le graphe de v.

Si en chaque point $p \in \mathbb{R}^{d'}$, d_pF est transverse à $\Lambda_{F(p)}$ on peut définir $F_*\mathcal{G}$ en posant $F_*\Lambda_p = d_pF^{-1}(\Lambda_{F(p)})$. En particulier si $\mathcal{G} = \mathcal{G}_G$, on définit ainsi un Y'-fibré.

L'application $F_*\Lambda_p$ est définie de l'ensemble $F^{-1}(X)$(que l'on notera F_*X) dans $G^{d'} = \cup_{k=m'}^{d'} G_k^{d'}$. Remarquons que si X est lisse (resp. stratifié) et si F est transverse à X (resp. aux strates), F_*X est lisse (resp. stratifié). Si G est un $Y-$fibré, $F^*\mathcal{G}(G)$ définit alors naturellement un $Y'-$fibré dont l'espace des fibres est $F_*\mathcal{G}_G$. On le notera F_*G.

3.1 Pullback et condition w stricte

Dans cette section $\mathcal{G}$ désigne le graphe d'une application Λ de X dans G^d, où X est une partie de $\mathbb{R}^d$. Sauf mention contraire ρ désignera un élément de $\mathbb{R} \cup \mathbb{R}_+$ et F une déformation d'ordre ρ.

3.1.1 Transversalité et régularité de Kuo-Verdier

On rappelle un des résultats importants démontrés par D. Trotman et L. Wilson dans [T-W]. La terminologie a été modifiée pour l'adaptation au lipschitz que nous aborderons ensuite. On énonce ici les résultats de D. Trotman et L. Wilson dans la terminologie définie précédemment.

Théorème 3.1.1. *Soit i tel que $i-\rho \geq 0_-$. Si $(F^*v;\mathcal{G})$ satisfait la condition t^i alors $(v;F_*\mathcal{G})$ satisfait la condition $t^{i-\rho}$.*

En particulier pour tout réel positif i :

(i) Si F est une déformation d'ordre i et $(F^*v;\mathcal{G})$ satisfait la condition t^i alors $(v;F_*\mathcal{G})$ satisfait la condition t^0 (condition w).

(ii) Si F est une déformation d'ordre i_+ et $(F^*v;\mathcal{G})$ satisfait la condition t^i alors $(v;F_*\mathcal{G})$ satisfait la condition t^{0-} (condition w forte).

3.1.2 Généralisation aux ordres supérieurs

On explicite ici le résultat à l'aide de la fonction τ_v.

Théorème 3.1.2. *Soient i et j deux éléments de $\mathbb{R} \cup \mathbb{R}^-$ tels que $i \geq j+1 \geq 1$. On suppose que le couple $(v;\mathcal{G})$ satisfait la condition t^i. Alors il existe un voisinage $H \in \mathcal{H}(v; i-\rho)$ tel que pour tout point $p \in F^{-1}(X) \cap H$:*

$$\tau_u(Y;F_*\Lambda_p)_p \lesssim \tau_{F^*u}(Y;\Lambda_{F(p)})_{F(p)}\ d(p;Y')^\rho. \tag{3.1}$$

Démonstration. D'après la proposition 2.2.6 la condition t^i implique qu'il existe un voisinage $H_1 \in \mathcal{H}(v;i)$ tel que pour tout point $q \in H_1$:

$$\tau_v(Y;\Lambda_q)_q \lesssim d(q;Y)^{1-i}.$$

Si H_1 s'écrit $H_1 = \{q \in \mathbb{R}^d / |v(x)-t| \leq \psi(q) d(q;Y)^{\sigma(i)}\}$, et si pour tout k on a $|h_k(x)| \leq \psi_1(x)|x|^\rho$ on pose

$$H = \{p \in \mathbb{R}^d / |u(x)-t| \leq \frac{1}{C}\psi(F(p))\psi_2(x) d(p;Y')^{\sigma(i)-\sigma(\rho)}\}$$

où $\psi_2(x) = \frac{1}{\max(|x|;\psi_1(x))}$.

Clairement $H \in \mathcal{H}(v;i-\rho)$. Soit $p \in F_*X \cap H$. Pour $q \in X \cap H_1$, soit $\mathcal{D}(q)$ l'espace engendré par les $P_q^v(\partial_r)$. Soit $H_r^v(p) = \sum_{k=1}^{m'}(t_k - u_k(x))\partial_x^v h_{k,r}$. Alors, sur $F_*(X) \cap H$, $|H_r^v(p)| \lesssim \psi(F(p)) d(p;Y')^{\sigma(i)}$. On désigne par α_r un vecteur unitaire appartenant à l'orthogonal dans $\mathcal{D}(q)$ (où $q = F(p)$) de l'espace engendré par les $\pi^v_{\mathcal{D}(F(p))}(\partial_s - H_s(p))$, $s \neq r$.

Pour $s \neq r$ on a :

$$\begin{aligned} |<\alpha_r;\partial_s>| &\leq |<\alpha_r;\partial_s + H_s^v(p)>| + |<\alpha_r;H_s^v(p)>| \\ &\leq |<\alpha_r;H_s^v(p)>| \\ &\leq |H_s^v(p)|. \end{aligned} \tag{3.2}$$

De plus $|\pi^v(\alpha_r)| \geq \mu_v(Y;\Lambda_q)_q$ et $\frac{1}{\mu_v(Y;\Lambda_q)_q} \lesssim d(q;Y)^{1-i}$. Alors comme $|H_r^v(p)| \lesssim \psi(F(p)))d(p;Y')^{\sigma(i)}$ on en déduit $|H_r^v(p)| \ll |\pi^v(\alpha_r)|$. Et par suite de (3.2) :

$$|<\alpha_r;\partial_r>| \sim |\pi^v(\alpha_r)|.$$

Et à nouveau en utilisant $|H_r^v(p) \ll |\pi^v(\alpha_r)|$, on peut écrire :

$$|<\alpha_r;\partial_r - H_r^v(p)>| \sim |\pi^v(\alpha_r)|. \tag{3.3}$$

On pose maintenant :

$$w_r(p) = \frac{\alpha_r}{<\alpha_r;\partial_r - H_r^v(p)>}.$$

Et on déduit de (3.3) que $|\pi_v^\perp(w_r(p))| \sim \frac{|\pi_v^\perp(\alpha_r)|}{|\pi_v(\alpha_r)|} \leq \tau_v(Y;\Lambda_q)_q$. Alors par définition de w_k on a $< w_k(p);\partial_s - H_s^v(p) >_{v,q} = \delta_{ks}$. Ce qui implique :

$$< w_k(p);\partial_s - (\partial_x v_s + \sum_{l=1}^{m'}(t_l - u_l(x))\partial_x h_l) >= \delta_{k,s}.$$

Or : $\partial_x v_s = \partial_x g_s + \sum_{l=1}^{m'} h_{l,s}(x)\partial_x u_l + \sum_{l=1}^{m'} u_l(x)\partial_x h_{l,s}$. On en déduit :

$$< w_k(p); \partial_s - (\partial_x g_s + \sum_{l=1}^{m'} t_l \partial_x h_{l,s} + \sum_{l=1}^{m'} h_{l,s}(x)\partial_x u_l + \sum_{l=1}^{m'} t_l \partial_x h_{l,s}) >= \delta_{ks}.$$

Et donc :

$$< w_k(p); \partial_x g_s + \sum_{l=1}^{m'} t_l \partial_x h_{l,s} >= w_{k,s}(p) - \delta_{ks} - \sum_{l=1}^{m'} h_{l,s}(x) < \partial_x u_l; w_k(p) > . \quad (3.4)$$

On pose enfin pour $p \in F_* X \cap H$ et $1 \leq r \leq m'$:

$$\xi_k(p) = (w_{k,N}(p);\ w_{k,N}(p).\partial_x u_1\ ; \ldots ;\ w_{k,N}(p).\partial_x u_{m'})$$

Et :

$$\zeta_r(p) = \partial_r + \sum_{k=1}^{m} h_{r,k}(x)\xi_k(p) \quad (3.5)$$

On a :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x}(p) &= (Id; \partial_x g_1 + \sum_{l=1}^{m'} t_l \partial_x h_{l,1}; \ldots ; \partial_x g_{m'} + \sum_{l=1}^{m'} t_l \partial_x h_{l,m}) \\
\frac{\partial F}{\partial t_l}(p) &= (0; \ldots ; 0; h_{l,1}(x); \ldots ; h_{l,m}(x))
\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}
d_p F(\xi_k(p))_N &= d_p F_N(\xi_k(p)) \\
&= \xi_{k,N}(p) \\
&= w_{k,N}(p),
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
d_p F(\xi_k(p))_{Y,s} &= \frac{\partial F_{Y,s}}{\partial x}(\xi_{k,N}(p)) + \sum_{l=1}^{m} \frac{\partial F_{Y,s}}{\partial t_l}.\xi_{k,Y,l}(p) \quad (3.6)\\
&= < w_k(p); \partial_x g_s + \sum_{l=1}^{m'} t_l \partial_x h_{l,s} > + \sum_{l=1}^{m'} h_{l,s}(x) < \partial_x u_l; w_k(p) > \\
&= w_{k,s}(p) - \delta_{ks} \quad \text{d'après (3.4)} \quad (3.7)
\end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned}
d_p F(\zeta_r(p))_{Y,s} &= \frac{\partial F_{Y\,s}}{\partial x}(\sum_{k=1}^{m} h_{r,k}(x)\xi_k(p)) + h_{r,s}(x) \\
&= \sum_{k=1}^{m} h_{r,k}(x) w_{k,s}(p) + h_{r,s}(x) - h_{r,s}(x) \ \ \text{(d'après (3.6))} \\
&= \sum_{k=1}^{m} h_{r,k}(x) w_{k,s}(p).
\end{aligned}$$

On en déduit que $d_pF(\zeta_r(p)) = \sum_{k=1}^m h_{r,k}(x)w_k(p)$. Et par conséquent $\zeta_r(p) \in F_*\Lambda_p$. De plus :

$$\begin{aligned} < \zeta_r(p); \partial_s >_{u,p} &= < \zeta_r(p); \partial_s - \partial_x u_s > \\ &= \delta_{rs} \end{aligned}$$

par définition de ζ_r. Par conséquent ζ_r relève ∂_r pour π_u. Alors en utilisant la proposition 2.2.9 (ii) :

$$\begin{aligned} \tau_u(Y'; \Lambda_q^*) &\lesssim \max(|\zeta_r(p) - \partial_r|) \\ &\lesssim \max(|h_{r,k}(x)|) \max(|\pi^\perp(w_k(p))|) (\text{d'après } (3.5)) \\ &\lesssim d(q; Y)^\rho \tau_v(Y; \Lambda_q)_q \quad \text{car} \quad |h_{r,k}(x)| \lesssim d(q; Y)^\rho \end{aligned}$$

□

Une conséquence immédiate de ce résultat est la généralisation du résultat dû à D. Trotman et L. Wilson. On obtient la condition w^k dans un pullback à partir de la condition t^i.

Corollaire 3.1.3. *Soit $i \in \mathbb{R} \cup \mathbb{R}_-$ et $\rho \in \mathbb{R} \cup \mathbb{R}_+$. Soit F une déformation d'ordre ρ avec $\rho - i \geq 0$.*

Si $(F^*v; \mathcal{G})$ satisfait la condition t^i alors $(v; F_*\mathcal{G})$ satisfait la condition $w^{\rho-i+1}$ en tout point de Y'.

Démonstration. D'après la proposition 2.2.6 (iv), $(F^*v; \mathcal{G})$ satisfait la condition t^i si et seulement si $\tau_{F^*v}(Y; \Lambda_q)_q \lesssim d(q; Y)^{1-i}$ dans un voisinage d'ordre i de F^*v. On applique le théorème précédent avec $j = i - 1$ pour en déduire qu'il existe H, un voisinage d'ordre $i - \rho$ de v, tel que sur H :

$$\tau_v(Y; F_*\Lambda_p)_p \lesssim d(p; Y')^{1-i} d(q; Y)^\rho.$$

Alors puisque $d(q; Y) = d(p; Y')$, on en déduit que sur H,

$$\tau_v(Y; F_*\Lambda_p)_p \lesssim d(p; Y)^{1-i+\rho}$$

et donc $(v; F_*\mathcal{G})$ satisfait la condition $w^{i-\rho+1}$. □

Exemple 3.1.4. Soit l'hypersurface de $\mathbb{R}^3$ définie par $X = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 / y^5 = z^8x^3 + x^7\}$. On peut stratifier cet ensemble par $\mathcal{S} = (X \setminus O_z; O_z)$. Cette stratification vérifie la condition a de Whitney c'est à dire que $(v; \mathcal{S})$ vérifie la condition $t^{0-;0-}$ pour tout v . Soit $F(x; y; t; u) = tx^3 + uy^2$. F est une déformation d'ordre 2. Alors $F^*X = \{(x; y; t; u) / y^5 = (tx^3 + uy^2)^8 x^3 + x^7\}$ stratifié par $(F^*X \setminus \{0\} \times \mathbb{R}^2; \{0\} \times \mathbb{R}^2)$ satisfait la condition w^{2+} en tout point de $[0; 1]$. Nous verrons que cela implique la constance des développements des volumes des fibres jusqu'à l'ordre 3, et des volumes de l'ensemble lui-même jusqu'à l'ordre 5.

3.2 Le cas lipschitzien

On énonce maintenant des théorèmes sur les conditions $L(i; j; k)$, analogues à ceux obtenus dans le cas rugueux.

Dans cette section on se donne G un $Y-$fibré au dessus d'une partie X de $\mathbb{R}^d$, v une transversale directe et F une déformation d'ordre ρ.

3.2.1 L'ordre zéro

On énonce maintenant des résultats qui nous serviront au paragraphe suivant. Ils permettront de ramener notre étude au cas particulier où v est la transversale nulle.

Proposition 3.2.1. *On suppose que l'une des trois conditions suivantes est vérifiée.*

(i) Il existe $H \in \mathcal{H}(v;j)$ telle que pour tout $(q;q') \in H \cap X \times H \cap X$ satisfaisant $|q-q'| \leq \frac{1}{2c} d(q;Y)$:

$$|d_x v - d_{x'} v| \lesssim |x-x'|\, |x|^k \mu_v(Y;\Lambda_q)_q \mu_{1_v}(Y;\Lambda_q)_q. \tag{3.8}$$

(ii) i est supérieur ou égal à -1.

(iii) Y est de dimension 1.

Alors $(v;G)$ est $L(i;j;k)$ régulière si et seulement si $(v+u;\phi_u^* G)$ l'est.

Démonstration. La condition (2.15) se préserve dans le pull-back sans les hypothèses $(i),(ii)$ ou (iii). Ceci est une conséquence du théorème dû à Trotman et Wilson (corollaire 3.9 dans [T-W]). Ici ϕ_v est une déformation d'ordre 0. Pour tout point $q \in X$: $d\phi_u(q)\partial_t = \partial_t$. De plus

$$d\phi_u(q) P^v_{\phi_{-u}(q)}(d\phi_{-u}(q)w) = P_q^{u+v}(w)$$

pour tout point $q \in \phi_u^* X$. La même chose est bien sûr vraie pour $P_q^{v\perp}$. Comme $|d\phi_u(q)w| \sim |w|$ il s'en suit que $(v+u;\phi_u^* G)$ vérifie la condition t^i.

On pose $p = \phi_{-u}(q)$, $p' = \phi_{-u}(q')$. On suppose (i). Par conséquent (attention ici P_p^v désigne la projection sur Λ_q relativement à la métrique de v, alors que P_q^{u+v} désigne la projection sur $d\phi_u^{-1}\Lambda_q$ relativement à la métrique $u+v$) :

$$\begin{aligned} |(P_q^{u+v} - P_{q'}^{u+v})\partial_r| &\leq |d\phi_u(q) P_p^v(\partial_t) - d\phi_u(q') P_{p'}^v(\partial_r)| \\ &\leq |d\phi_u(q)||(P_q^v - P_{q'}^v)(\partial_t)| + |d\phi_u(q) - d\phi_u(q')||P_q^v(\partial_r)| \end{aligned}$$

Et comme (i) implique que $|d\phi_v(q) - d\phi_v(q')| \leq |q-q'||x|^k \mu_v(Y;\Lambda_q)_q \mu_{1_v}(Y;\Lambda_q)_q$, le résultat est démontré.

On suppose (ii) maintenant. Alors de même que pour (i) :

$$\begin{aligned} |(P_q^{u+v} - P_{q'}^{u+v})\partial_r| &\leq |(P_q^{u+v\perp} - P_{q'}^{u+v\perp})\partial_r| \\ &\lesssim |d\phi_u(q)||(P_q^{v\perp} - P_{q'}^{v\perp})(\partial_r)| + |d\phi_u(q) - d\phi_u(q')||P_q^{v\perp}(\partial_r)| \\ &\lesssim |q-q'|d(q;Y)^k + |q-q'| + |q-q'|d(q;Y)^{i+1} \\ &\lesssim |q-q'|d(q;Y)^k \qquad \text{car} \qquad i \geq k. \end{aligned}$$

Enfin supposons $dim Y = 1$ et $i < -1$. Alors k est négatif et

$$\begin{aligned} |d\phi(q) - d\phi(q')||P_q^v(\partial_t)| &\lesssim |q-q'|\mu_v(Y;\Lambda_q)_q \\ &\lesssim |q-q'|\mu(Y;\Lambda_q)^2 d(q;Y)^{i+1} \quad \text{(d'aprés (2.15))} \\ &\lesssim |q-q'|\mu(Y;\Lambda_q)^2 d(q;Y)^k \qquad \text{(car} \quad k \leq i), \end{aligned}$$

et alors

$$|(P_q^{u+v} - P_{q'}^{u+v})\partial_r| \quad \lesssim \quad |d\phi_u(q)||(P_q^v - P_{q'}^v)(\partial_t)| + |D\phi(q) - D\phi(q')||P_q^v(\partial_r)|.$$

□

Définition 3.2.2. On dira que $(v; G)$ satisfait la condition $l_{j,k}$, pour $j \in \mathbb{R} \cup \mathbb{R}_-$ et $k \in \mathbb{R} \cup \mathbb{R}_+$, si elle satisfait la condition (i) de la proposition 3.2.1.

La condition $l_{j,k}$ est reliée aux conditions t^i et t_1^j. Plus précisément on peut obtenir celle-ci à partir de la condition t^i ou t_1^j. Les conditions que nous donnons dans la proposition qui suit ne sont pas nécéssaires mais elles permettront de donner des critères de détermination avec un nombre réduit de conditions. Soit v une application C^r. On définit le réel $r_0(v)$ comme le plus grand entier inférieur ou égal à r tel que $|v(x)| \lesssim |x|^{r_0(v)}$.

Proposition 3.2.3. *Soient i et j deux éléments de $\mathbb{R} \cup \mathbb{R}^-$ avec $i \leq j$. On a :*

(i) Si $(v; G)$ satisfait t^i et t_1^j alors $(v; G)$ est $l_{j;r_0(v)-j-i}$-régulier.

(ii) Si $(v; G)$ satisfait t_1^j alors $(v; G)$ est $l_{j;r_0(v)-2j}$-régulier.

(iii) Si $(v; G)$ satisfait t^j alors $(v; G)$ est $l_{j;r_0(v)-3j}$-régulier.

Démonstration. D'après le théorème des accroissements finis pour tout couple $(x; x')$ satisfaisant $|x - x'| \leq \frac{|x|}{2}$ on a $|d_x v - d_{x'} v| \lesssim |x|^{r_0(v)-2}|x - x'|$. Et comme t^i nous donne $\frac{1}{\mu_v(Y;\Lambda_q)_q} \lesssim |x|^{i-1}$ et t_1^j nous donne $\frac{1}{\mu_{1v}(Y;\Lambda_q)_q} \lesssim |x|^{j-1}$ le point (i) est démontré. Le point (ii) vient du fait que t_1^j implique t^j. Le point (iii) se déduit du fait que t^i implique t_1^{2i}. □

Remarque 3.2.4. En fait on a $|d_x v - d_{x'} v| \lesssim |x|^{\max(r_0(v)-2;0)}|x - x'|$. Le résultat est donc toujour vrai avec $\max(2; r_0)$.

3.2.2 Pullback de fibrés vectoriels

Soient i et k des éléments de $\mathbb{R} \cup \mathbb{R}_+$ tels que $i \geq k$. Soit $j \in \mathbb{R} \cup \mathbb{R}_-$ et $\rho \in \mathbb{R} \cup \mathbb{R}_+$, tels que $j \geq 0$, $\rho - j \geq 0$ et $i \geq k \geq -j$.

Théorème 3.2.5. *Soit v une transversale directe. Si $(F^*v; G)$ est $L(i; j; k)$, $t_1^{\sigma(\rho)}$ et $l_{j,k}$-régulier alors $(v; F_*G)$ est $L(i + \rho; j - \rho; k + \rho)$.*

Soit F une déformation d'ordre ρ. On note $\mathcal{D}_r$ la distribution engendrée par les $P_q(\sum_{l=1}^{m'} t_l \partial_x h_{l,s} - \partial_s)$, $\quad s \neq r$, où $q = F(p)$. Soit $\pi_{r,p}$ la projection sur l'orthogonal de $\mathcal{D}_{r,p}$ dans Λ_q. On démontre quelques propositions qui nous seront utiles pour la démonstration de ce théorème.

Proposition 3.2.6. *On suppose les mêmes hypothèses que dans le théorème 3.2.5 pour la transversale $v = 0$. Alors il existe $H \in \mathcal{H}(0; j - \rho)$ tel que :*

(i) $\mu(Y;\Lambda_q) \lesssim |\pi_{r,p}(\sum_{l=1}^{m'} t_l\partial_x h_{l,r} - \partial_r)|$

(ii) Pour tout couple $(p;p') \in H\cap X \times H \cap X$ *satisfaisant* $|p-p'| \leq \frac{1}{2c}d(p;Y')$ *:*

$$|\pi_{r,p} - \pi_{r,p'}| \lesssim |p-p'|d(q;Y)^k|\pi_{r,p}(\sum_{l=1}^{m} t_l\partial_x h_{l,r} - \partial_r)|^2.$$

où $q = F(p) = (x;t_1;\ldots;t_r)$.

Démonstration. On traite le cas $j \in \mathbb{R}$ le cas $j \in \mathbb{R}_-$ se traite de manière analogue.

Soient H_1 et H_2 les voisinages d'ordre $-i$ et j respectivement, donnés par la définition de la condition $L(i;j;k)$. Comme $-i \leq j$ on peut supposer que $H_2 \subset H_1$. Si H_2 s'écrit

$$H_2 = \{q \in \mathbb{R}^d/|t| \leq \psi(q)d(q;Y)^{\sigma(j)}\},$$

et si ψ_1 est une fonction telle que $|\sum_{j=0}^{m'} h_{j,s}(x)| \lesssim \psi_1(p)d(p;Y')^{\sigma(\rho)}$, on pose

$$H = \{p \in \mathbb{R}^d/|t| \leq \frac{1}{C}\psi(F(p))\psi_2(p)d(p;Y')^{\sigma(j-\rho)}\}.$$

où $\psi_2(p) = \frac{1}{\max(|x|;\psi_1(p))}$. Alors $H \in \mathcal{H}(0;j-\rho)$ et si $p \in H$ alors $q = F(p) \in H_2$.

On raisonne par l'absurde pour démontrer (i). Supposons $|\pi_{r,p}(\partial_r - \sum_{l=1}^{m'} t_l\partial_x h_{l,r})| \ll \mu(Y;\Lambda_q)$ sur H.

Soient $p \in H$, $q = F(p)$. Soit $\widehat{\pi}_{r,p}$ la projection orthogonale sur $\mathcal{D}_r(p)$. On a $\widehat{\pi}_{r,p} + \pi_p = P_q$. Soit $w(p)$ le vecteur de $\mathcal{D}_r(p)$ qui se projette sur $\widehat{\pi}_{r,p}(\partial_r - \sum_{l=1}^{m'} t_l\partial_x h_{l,r})$ par P_q. Alors $P_q(\sum_{l=1}^{m'} t_l\partial_x h_{l,r} - \partial_r) = P_q(w) + \pi_{r,p}(\sum_{l=1}^{m'} t_l\partial_x h_{l,r} - \partial_r)$ et donc :

$$|P_q(\sum_{l=1}^{m'} t_l\partial_x h_{l,r} - \partial_r - w(p))| = |\pi_{r,p}(\sum_{l=1}^{m'} t_r\partial_x h_{l,r} - \partial_r)| \ll \mu(Y;\Lambda_q).$$

D'après (2.15) $\frac{1}{\mu(Y;\Lambda_q)} \lesssim Cd(q;Y)^{i+1}$. De plus, puisque $p \in H$, on a $|t_r| \lesssim |x|^{j-\rho}$ et comme $|\partial_x h_{l,r}| \lesssim |x|^{\rho-1}$, on en déduit :

$$|t_l\partial_x h_{l,r}| \ll |x|^{j-1} \tag{3.9}$$

pour tout l compris entre 1 et m'.

Or la condition (2.15) dit que $\frac{1}{\mu(Y;\Lambda_q)} \lesssim |x|^{i+1}$. Comme $j \geq -i$ il vient $|\sum_{l=1}^{m'} t_l\partial_x h_{l,r}| \ll \mu(Y;\Lambda_q)$. Alors :

$$|P_q(\partial_r - w(p))| \ll \mu(Y;\Lambda_q).$$

Ce qui contredit la définition de $\mu(Y;\Lambda_q)$ et démontre le point (i).

Montrons le point (ii). Puisque $\widehat{\pi}_{r,q} + \pi_q = P_q$, il suffit de démontrer (ii) pour les projections $\widehat{\pi}_{r,p}$ et P_q à la place de $\pi_{r,p}$.

Soient $(p;p') \in H\cap X \times H \cap X$ tels que $|p-p'| \leq \frac{1}{2c}d(p;Y')$. On pose $q = F(p)$, $q' = F(p')$ alors, comme F est lipschizienne $|q-q'| \leq C|p-p'|$ et donc puisque $(p;p')$ satisfait $|p-p'| \leq \frac{1}{2c}d(p;Y')$, $(q;q')$ satisfait à une égalité du même type si c est choisi assez grand et d'après (2.20) on a :

$$\begin{aligned} |(P_q - P_{q'})(\sum_{l=0}^{m'} t_l \partial_x h_{l,r})| &\lesssim |P_q - P_{q'}||\sum_{l=0}^{m'} t_l \partial_x h_{l,r}| \\ &\lesssim |q-q'|d(q;Y)^k \mu(Y;\Lambda_q)\ d(q;Y)^{\rho-1} \\ &\lesssim |q-q'|d(q;Y)^k \mu(Y;\Lambda_q)\mu_1(Y;\Lambda_q) \qquad (3.10) \end{aligned}$$

De plus pour tout l, $1 \leq l \leq m'$, on a :

$$\begin{aligned} |t_l \partial_x h_{l,r} - t'_l \partial_{x'} h_{l,r}| &\leq |t_l - t'_l||\partial_x h_{l,r}| + |\partial_{x'} h_{l,r} - \partial_x h_{l,r}||t'r| \\ &\lesssim |p-p'|(d(q;Y)^{\rho-1} + d(q;Y)^{\rho-2}) \\ &\lesssim |p-p'|\mu(Y;\Lambda_q)d(q;Y)^{i+1}d(q;Y)^{(\rho-2)} \\ &\lesssim |p-p'|\mu(Y;\Lambda_q)\mu_1(Y;\Lambda_q)d(q;Y)^{i+1}d(q;Y)^{(\rho-2)} \\ &\lesssim |p-p'|\mu(Y;\Lambda_q)\mu_1(Y;\Lambda_q)d(q;Y)^k. \qquad (3.11) \end{aligned}$$

En ajoutant (2.16), (3.11) et (3.10) il vient la majoration suivante :

$$|P_q(\sum_{l=1}^{m'} t_l \partial_x h_{l,r} - \partial_r) - P_{q'}(\sum_{l=1}^{m'} t'_l \partial_{x'} h_{l,r} - \partial_r)| \leq |p-p'|d(q;Y)^k \mu(Y;\Lambda_q)\mu_1(Y;\Lambda_q).$$

Ceci montre en particulier que la condition (ii) est vérifiée pour la projection P_q. D'après la proposition 1.2.4 on peut remplacer μ_1 par ν_1.

De plus $\nu_1(Y;\Lambda_q) \leq d(P_q(\partial_r);V_r).\min\{|P_q(w)|/w \perp \partial_r,\ |w|=1, w \in Y\}$ par définition de ν_1 (on rappelle que V_r désigne le sous-espace de Λ_q engendré par les $P_q(\partial_s)$, $s \neq r$). Et comme, pour tout entier s, $|\sum_{l=1}^{m'} t_l \partial_x h_{l,s}| \ll \mu_1(Y;\Lambda_q)$ (en vertu de t_1^γ et $\rho - j \geq 0$), on a en particulier $|\sum_{l=1}^{m'} t_l \partial_x h_{l,s}| \ll \min_{\substack{w \perp \partial_r \\ |w|=1}}(|P_q(w)|)$ et $|\sum_{l=1}^{m'} t_l \partial_x h_{l,r}| \ll |d(P_q(\partial_r);V_r)|$ au voisinage de zéro. Par conséquent :

$$d(P_q(\partial_r);V_r) \sim d(P_q(\partial_r - \sum_{l=1}^{m'} t_l \partial_x h_{l,r});V_r). \qquad (3.12)$$

De plus si $w \in Y$ est un vecteur unitaire tel que $w \perp \partial_r$, en notant $\mathcal{D}'_r(p)$ l'espace $vect((\sum_{l=1}^{m'} t_l \partial_x h_{l,s} - \partial_s)_{s \neq r})$:

$$d(w, \mathcal{D}'_r(q)) \leq \max_s(|\sum_{l=1}^{m'} t_l \partial_x h_{l,s}|)$$

et donc :

$$\min_{\substack{w \in \mathcal{D}'_r(q) \\ |w|=1}}(|P_q(w)|) \sim \min_{\substack{w \in Y, w \perp \partial_r \\ |w|=1}}(|P_q(w)|). \qquad (3.13)$$

De (3.12) et (3.13) on déduit :

$$\mu_1(Y;\Lambda_q) \lesssim d(P_q(\partial_r - \sum_{l=1}^{m'} t_l \partial_x h_{l,r});V_r) \min_{\substack{w \in \mathcal{D}'_r(q) \\ |w|=1}}(|P_q(w)|). \qquad (3.14)$$

Or, par définition de $\mathcal{D}_r$ tout vecteur w de $\mathcal{D}_r$ vérifie $P_q(w) = \widehat{\pi}_{r,p}(w)$. De plus :

$$\begin{aligned}
d(P_q(\partial_r - \sum_{l=1}^{m'} t_l \partial_x h_{l,r}); V_r) &\leq d(P_q(\partial_r - \sum_{l=1}^{m'} t_l \partial_x h_{l,r}); V_r') + \delta(V_r; V_r') \\
&\leq d(P_q(\partial_r - \sum_{l=1}^{m'} t_l \partial_x h_{l,r}); V_r') + \max_s |\sum_{l=1}^{m'} t_l \partial_x h_{l,s}| \\
&= |\pi_{r,p}(\partial_r - \sum_{l=1}^{m'} t_l \partial_x h_{l,r})| + \max_s |\sum_{l=1}^{m'} t_l \partial_x h_{l,s}|.
\end{aligned}$$

Mais d'après (i) : $\mu(Y;\Lambda_q) \lesssim |\pi_{r,p}(\partial_r - \sum_{l=1}^{m'} t_l \partial_x h_{l,r})|$ et comme $\max_s |\sum_{l=1}^{m'} t_l \partial_x h_{l,s}| \lesssim d(q;Y)^\rho \ll \mu(Y;\Lambda_q)$ on peut écrire :

$$d(P_q(\partial_r - \sum_{l=1}^{m'} t_l \partial_x h_{l,r}); V_r) \lesssim |\pi_{r,p}(\partial_r - \sum_{l=1}^{m'} t_l \partial_x h_{l,r})|.$$

Et donc on déduit de (3.14) que :

$$\mu_1(Y;\Lambda_q) \leq |\pi_{r,p}(\sum_{l=1}^{m'} t_l \partial_x h_{l,r} - \partial_r)| . \min_{\substack{w \perp \partial_r \\ |w|=1}} (|\widehat{\pi}_{r,p}(w)|. \tag{3.15}$$

Et donc pour tout $w \in \mathcal{D}_r'(p)$:

$$\frac{|P_q(w) - P_{q'}(w)|}{|P_q(w)|} \lesssim |p-p'| d(q;Y)^k \mu(Y;\Lambda_q) |\pi_{r,p}(\sum_{l=1}^{m'} t_l \partial_x h_{l,r} - \partial_r)|$$

et par conséquent :

$$\delta(\mathcal{D}_r'(p); \mathcal{D}_r(p')) \lesssim |p-p'| d(q;Y)^k \mu(Y;\Lambda_q) |\pi_{r,p}(\sum_{l=1}^{m'} t_l \partial_x h_{l,r} - \partial_r)|.$$

Ce qui implique en utilisant le point (i) :

$$\delta(\mathcal{D}_r'(p); \mathcal{D}_r(p')) \lesssim |p-p'| d(q;Y)^k |\pi_{r,p}(\sum_{l=1}^{m'} t_l \partial_x h_{l,r} - \partial_r)|.$$

Or comme $\delta(\mathcal{D}_r'(p); \mathcal{D}_r(p')) = |\widehat{\pi}_{r,p} - \widehat{\pi}_{r,p'}|$ on en déduit :

$$|\widehat{\pi}_{r,p} - \widehat{\pi}_{r,p'}| \lesssim |p-p'||x|^k \; |\pi_{r,p}(\sum_{l=1}^{m'} t_l \partial_x h_{l,r} - \partial_r)|^2.$$

Et donc, via (3.11), il vient :

$$|\widehat{\pi}_{r,p}(\sum_{l=1}^{m'} t_l \partial_x h_{l,r} - \partial_r) - \widehat{\pi}_{r,p'}(\sum_{l=1}^{m'} t_l \partial_{x'} h_{l,r} - \partial_r)| \lesssim |p-p'||x|^k \; |\pi_{r,p}(\sum_{l=1}^{m'} t_l \partial_x h_{l,r} - \partial_r)|^2$$

ce qui donne le point (ii). □

Lemme 3.2.7. *On suppose les hypothèses de la proposition 3.2.6. On suppose aussi que i est supérieur ou égal à -1. Alors il existe $H \in \mathcal{H}(v; j-\rho)$ dans $\mathbb{R}^{d'}$ tel que pour tout point $p \in X \cap H$:*

$$|\pi_{r,p}(\partial_r) - \partial_r| \lesssim d(p; Y')^{i+1}$$

pour tout entier $1 \leq r \leq m$.

Démonstration. On construit H comme dans la proposition précédente. Soient $p \in H$ et $q = F(q)$. On note $A(p)$ l'orthogonal de l'espace engendré par les vecteurs de la famille $(\partial_s - \sum_{l=1}^{m'} t_l \partial_x h_{l,s})_{s \neq r}$ et $\mathcal{D}(p)$ l'espace engendré par les vecteurs de la famille $(\partial_r - \sum_{l=1}^{m'} t_l \partial_x h_{l,r})_{1 \leq r \leq m'}$. Alors $\pi_{r,p}$ est la projection sur $A(p) \cap \Lambda_q$. De plus, puisque $\partial_r \in Y \cap A(p)$, il suffit de voir que $\delta(Y \cap A(p); \Lambda_q \cap \Lambda_q) \lesssim d(p; Y')^{i+1}$.

Comme i est supérieur à -1 on a d'après la remarque 2.2.8 $\mu(Y; \Lambda_q) \geq \epsilon > 0$. Et puisque $|\sum_{l=1}^{m'} t_l \partial_x h_{l,s}| \lesssim |x|^\rho$ et $\rho \geq 1$ on en déduit :

$$\mu(\mathcal{D}(p); \Lambda_q) \geq \frac{\epsilon}{2}$$

pour q voisin de zéro.

Mais puisque $A(p)^\perp \subseteq \mathcal{D}(p)$ il vient :

$$\mu(A(p)^\perp; \Lambda_q) \geq \frac{\epsilon}{2} \tag{3.16}$$

Or :

$$\begin{aligned} \delta(Y \cap A(p); \Lambda_q \cap A(p)) &\leq \frac{\delta(Y \cap A(p); \Lambda_q)}{\mu(A(p)^\perp; \Lambda_q)} \\ &\lesssim \delta(Y \cap A(p); \Lambda_q) \quad \text{d'après (3.16)} \\ &\lesssim d(q; Y)^{i+1}. \end{aligned}$$

□

Preuve du théorème 3.2.5. Remarquons d'abord que l'on peut supposer, sans perte de généralité, que v et F^*v sont nulles. En effet on peut poser $\widehat{F} = \phi_v \circ F \circ \phi_{-u}$ et alors $\widehat{F}^*0 = 0$ et d'après le lemme 3.2.1 (i), $(u; F^*\mathcal{G})$ est $L(i; j; k)$ si et seulement si $(0; \phi_{-u}^* F^*\mathcal{G}) = (0; \widehat{F}^*\phi_{-v}^*\mathcal{G})$ est $L(i+\rho; j-\rho; k+\rho)$. De plus comme $i+\rho$ est supérieur ou égal à -1 d'après le lemme 3.2.1 (iii), $(0; \phi_{-v}^*\mathcal{G})$ est $L(i; j; k)$ si et seulement si $(v; \mathcal{G})$ l'est. Il suffit donc de démontrer le résultat pour $\widehat{F}$ avec $(0; \phi_{-v}^*\mathcal{G})$.

D'après le corollaire 3.1.3 il existe un voisinage H_1^* de $\Gamma_0 \cap X$ telle que la condition (2.15) soit vérifiée puisque celle-ci est équivalente à la condition t^{-i}. En vertu de la proposition 2.3.10 le résultat sera démontré si on trouve un voisinage $H^* \in \mathcal{H}(k; 0)$ dans $\mathbb{R}^{d'}$ tel que G admette une section lipschitzienne d'exposant k définie dans ce voisinage.

Soit $H^* \in \mathcal{H}(v; j-\rho)$ le voisinage obtenu dans la proposition 3.2.6.

On pose pour $p \in H^*$ et $r \in \{1, \ldots, m\}$:

$$w_r(p) = \frac{\pi_{r,F(p)}(\partial_r)}{< \partial_r - \sum_{j=1}^{m'} t_j \, \partial_x h_{j,r} \ ; \ \pi_{r,F(p)}(\partial_r) >}$$

On déduit facilement du lemme 3.2.6 (ii) :

$$|w_r(p) - w_r(p')| \lesssim |p - p'| d(q;Y)^k. \tag{3.17}$$

D'autre part d'après la construction de w_r on a, pour $r \neq s$, $< w_r(p); \sum_{j=1}^{m'} t_j \partial_x h_{j,s} - \partial_s >= 0$ et donc pour $s \in \{1, \ldots, m\}$ différent de r :

$$\begin{aligned} < w_r(p); \sum_{j=1}^{m'} t_j \partial_x h_{j,s} > &= < w_r(p); \partial_s > \\ &= w_{r,s}(p). \end{aligned} \tag{3.18}$$

Et puisque $< w_r(p); \partial_r - \sum_{j=1}^{m'} t_j \partial_x h_{j,r} >= 1$, il vient :

$$\begin{aligned} < w_{r,N}(p); \sum_{j=1}^{m'} t_j \partial_x h_{j,r} > &= < w_r(p); \partial_r > -1 \\ &= w_{r,r}(p) - 1. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Alors on pose pour $r \in 1, \ldots, m'$:

$$\zeta_r(p) = (\sum_{j=1}^{m} h_{r,j}(x)\, w_{j,N}(p); 0; \ldots; 1; \ldots; 0)$$

où le 1 est en $r^{\text{ème}}$ position de sorte que :

$$\pi(\zeta_r(p)) = \partial_r.$$

De plus comme :

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x}(p) &= (Id; \sum_{j=1}^{m'} t_j\, d_x h_{j,1}; \ldots; \sum_{j=1}^{m'} t_j\, d_x h_{j,m}) \\ \frac{\partial F}{\partial t_s}(p) &= (0; \ldots; 0; h_{s,1}(x); \ldots; h_{s,m}(x)) \end{aligned}$$

il vient en utilisant (3.18) et (3.19) :

$$\begin{aligned} dF(p)(\zeta_r(p)) &= (\sum_{l=1}^{m} h_{r,l}(x)\, w_{l,N}(p); \sum_{l=1}^{m} h_{r,l}(x) w_{l,Y}(p)) \\ &= \sum_{l=1}^{m} h_{r,l}(x) w_l(p). \end{aligned}$$

Et par conséquent ζ est une section de $F^*\mathcal{G}$.

De plus $(\zeta(p) - \partial_t) = (\sum_{j=1}^{m} h_{r,j}(x) w_{j,N}(q); 0)$. D'après 3.2.6 (i), on a $|w_{r,1}(p)| = \frac{1}{|\pi_{r,F(p)}|} \leq \frac{1}{\mu(Y;\Lambda_q)}$. Pour $i \leq -1$, l'inégalité (2.15) de la condition $L(i;j;k)$ nous dit que

$$\frac{1}{\mu(Y;\Lambda_q)} \lesssim d(q;Y)^{i+1}.$$

Pour $i \geq -1$ on applique le lemme 3.2.7. Ceci montre que $|w_{r,1}(p)| \lesssim d(p;Y)^{i+1}$.

Par conséquent dans tous les cas $|w_{r,N}(p)| \lesssim d(q;Y')^{i+1}$ et donc puisque $|h(x)| \lesssim d(q;Y)^\rho$:

$$|\zeta(p) - \partial_t| \lesssim d(p;Y)^{i+\rho+1}. \tag{3.20}$$

Et donc, sur H^*, ζ_r est une section rugueuse d'exposant $i+\rho+1$ qui relève ∂_r. Comme $i \geq k$, ζ_r est a fortiori une section lipschitzienne d'exposant $k+\rho$. Il reste donc à démontrer que pour $(p;p') \in H^*$ satisfaisant $|p-p'| \leq \frac{1}{2c} d(p;Y')$ on a $|\zeta_r(p) - \zeta_r(p')| \lesssim d(p;Y')^{k+\rho}|p-p'|$.

Or,

$$\begin{aligned} |\zeta_r(p) - \zeta_r(p')| &= |\sum_{j=1}^m h_{r,j}(x) w_{j,N}(p) - \sum_{j=1}^m h_{r,j}(x') w_{r,N}(p')| \\ &\leq |\sum_{j=1}^m (h_{r,j}(x) - h_{r,j}(x'))||w_{r,N}(p)| + |\sum_{j=1}^m h_{r,j}(x')||w_{r,N}(p) - w_{r,N}(p')| \end{aligned}$$

et, comme h possède un ρ-jet nul, on utilise (3.20) et (3.17) pour terminer la démonstration. ☐

Corollaire 3.2.8. *On suppose que $i \geq -1$. Si $(F^*v;\mathcal{G})$ est $L(i;j;k)$ alors $(v;F_*\mathcal{G})$ est $L(i+\rho;j-\rho;k+\rho)$ régulier.*

Démonstration. On peut comme dans le théorème 3.2.5 supposer que v et F_*v sont nulles. En effet puisque i est supérieur ou égal à -1 on peut appliquer le lemme 3.2.1 à la source et au but. Comme $i \geq -1$ et $\rho \geq k+2$ il vient $b \geq 1$. Or, puisque $i \leq -1$, $\mu(Y;\Lambda_q)$ ne tend pas vers zéro et par conséquent $\mu_1(Y;\Lambda_q)$ non plus. La condition t_1 s'avère donc pour le couple $(0;\mathcal{G})$. Comme la fonction nulle satisfait la condition (i) de la proposition 3.2.1, le théorème 3.2.5 s'applique donc pour donner le résultat. ☐

Dans le cas où Y est de dimension 1 on a un résultat meilleur puisque l'on peut omettre la condition $l_{j,k}$.

Théorème 3.2.9. *On suppose que Y est de dimension 1. Si $(F^*v;\mathcal{G})$ est $L(i;j;k)$ et t_1^ρ-régulier alors $(v;F_*\mathcal{G})$ est $L(i+\rho;j-\rho;k+\rho)$ régulier.*

Démonstration. De même que dans la preuve du théorème 3.2.5 on peut supposer que u et v sont nulles en appliquant à la source le lemme 3.2.1 (iii). On note ∂_t le vecteur qui engendre Y. Puisque la condition t_1^ρ est vérifiée on peut démontrer les inégalités (3.10) et (3.11). On en déduit :

$$|P_q(\sum_{l=1}^{m'} t_l\, d_x h_l - \partial_t) - P_{q'}(\sum_{l=1}^{m'} t_l\, d_x h_l - \partial_t)| \lesssim |q-q'| d(q;Y)^k \mu(Y;\Lambda_q)^2$$

car en dimension un $\mu(Y;\Lambda_q)$ et $\mu_1(Y;\Lambda_q)$ coincident.

On pose donc pour $p \in X^*$, $w(p) = \frac{P_{F(p)}(\partial_x h - \partial_t)}{|P_{F(p)}(\partial_x h - \partial_t)|^2}$ et

$$\zeta(p) = (w_N(p), 1).$$

La suite de la démonstration est la même que dans la démonstration du théorèm 3.2.5. ☐

3.3 Pullback et fibrés C^1

Dans le cas où le fibré G est un $Y-$ fibré au dessus d'un voisinage de l'origine qui est lisse en dehors de Y, on peut démontrer que le fibré obtenu après pull-back est C^1 en affaiblissant la condition $L(i;j;k)$. Ces théorèmes nous permettront d'obtenir des critères de détermination C^1 portant simplement sur les dérivées premières et secondes de l'application. Dans cette section k désigne un nombre réel. Pour simplifier on notera $L(k)$ la condition $L(k;-k;k)$.

On se donne donc G un $Y-$fibré au dessus d'un voisinage ouvert U de zéro dans $\mathbb{R}^d$. Soit α une fonction définie sur $U \setminus Y$ prenant des valeurs strictement positives. On dira que $(v;G)$ est $L(i;j;k)$ *localement en tout point* de U si la condition $L(i;j;k)$ est vérifiée pour tous les couples $(q;q')$, tels que $|q-q'| \leq \alpha(q)$ (pour une fonction α quelconque).

Cette condition est plus faible puisque l'on a remplacé $\frac{1}{2c}d(q;Y)$ par une fonction quelconque.

Proposition 3.3.1. *Soit G comme dans le paragraphe qui précède. Soit F une déformation d'ordre k_+. Si $(F^*v;G)$ est $L(-k)$ localement en tout point et satisfait t_1^k et $l_{k,k}$ alors $(v;F_*G)$ est un fibré C^1.*

Soit F une déformation d'ordre k. Si $(F^*v;G)$ est $L(-k_+)$ localement en tout point et satisfait t_1^{k-} et $l_{k_-,-k_+}$ alors $(v;F_*G)$ est un fibré C^1.

Démonstration. La preuve est exactement la même que pour les fibrés vérifiant la condition $L(i;j;k)$. Les sections lipschitz d'exposant 0_+ localement en tout point ont leur dérivée qui tend vers zéro et sont donc C^1 au voisinage de l'origine. □

3.3.1 Eclatement et conditions L

Le blowing-up de T. C. Kuo et D. Trotman [Ku-T] est une transformation sur les espaces stratifiés. Modulo un carte il s'agit là en fait d'un cas particulier de pull-back par une déformation de tranversales.

On se donne $(X;Y)$ un couple de strates c'est a dire que X est une variété lisse telle que $Y \subseteq \overline{X} \setminus X$. On dit que $(X;Y)$ est t^i (resp. $L(i;j;k)$) si $(v;(X;Y))$ l'est pour toute transversale directe v. On définit :

$$\widetilde{Y} = \{(0;P) \in \{0_{R^d}\} \times G^d_{d-m}/P \pitchfork Y\}$$

$$\widetilde{X} = \{(q;P) \in \mathbb{R}^d \times G^d_{d-m}/q \in P \cap X, P \in \widetilde{Y}\}.$$

Alors, un théorème dû a D. Trotman et T. C. Kuo nous dit que :

Théorème 3.3.2. *Soit i un réel supérieur ou égal à 1. Si $(X;Y)$ satisfait la condition t^i alors $(\widetilde{X};\widetilde{Y})$ est une stratification t^{i-1} régulière.*

En particulier si $(X;Y)$ satisfait la condition t alors $(\widetilde{X};\widetilde{Y})$ est une stratification w-régulière.

Ici on énonce :

Théorème 3.3.3. *Si $(X;Y)$ satisfait la condition $L(-1_+;1;1_+)$ alors le fibré tangent à $\widetilde{Y}$ s'étend à un fibré tangent à $\widetilde{X}$, C^1 au sens de Whitney. L'ensemble $\widetilde{X} \cup \widetilde{Y}$ est alors C^1 trivial le long de $\widetilde{Y}$.*

En particulier ceci est vrai pour les stratifications $(X;Y)$ qui satisfont la condition L de Mostowski.

Démonstration. On rappelle que $\mathbb{R}^d = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. Le problème est local.

Modulo une carte de la grassmannienne on peut écrire $\widetilde{X}$ et $\widetilde{Y}$ comme suit :

(i) $\widetilde{Y} = \{0_{\mathbb{R}^d}\} \times U$ où U est un ouvert de $\mathbb{R}^{nm}$.

(ii) $\widetilde{X} = \{(x;t;u) \in \mathbb{R}^d \times U / \sum_{i=1}^n x_i\, u_{ji} = t_j \quad \forall\, j \in \{1,\dots,m\}\}$
où $x = (x_1;\dots;x_n)$, $t = (t_1;\dots;t_m)$, $u = (u_{ji})_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le m}}$.

Soit l'application $p(x;t;u) = (x;u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{nm}$. On pose alors $\widehat{X} = p(\widetilde{X})$ et aussi $F(x;u) = (x; \sum_{i=1}^n u_{1i}x_i; \dots; \sum_{i=1}^n u_{mi}x_i)$. Alors F est une déformation d'ordre 1 . Soit G le $Y-$fibré au dessus de X défini par $\Lambda_q = P_q(Y)$ où P_q désigne la projection sur T_qX. Puisque $(F^*0;(X;Y))$ satisfait la condition $L(-1_+;1;1_+)$ le Y-fibré $(F^*0;G)$ la vérifie aussi et d'après le théorème 3.2.5 il vient que $(0;F_*G)$ satisfait la condition $L(0_+;0;0_+)$. C'est en particulier un fibré C^1 au sens de Whitney en zéro. Par définition du pull-back $F_*X = \widehat{X}$ et par conséquent F_*G induit au dessus de $\widehat{X}$ un sous-fibré du fibré tangent à $\widehat{X}$. Puisque celui-ci est C^1 au sens de Whitney on peut l'étendre à un $\widetilde{Y}$-fibré au dessus de $\mathbb{R}^{(n+1)m}$ tout entier à l'aide du théorème d'extension de Whitney. Soit $\phi : \mathbb{R}^{(n+1)m} \to \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{nm}$ l'application C^∞ définie par $\phi(x;u) = (x; \sum_{i=1}^n x_i u_{1i}; \dots; \sum_{i=1}^n x_i u_{mi}; u)$. On relève alors le $\widetilde{Y}$-fibré $(F^*0;G)$ à un $\widetilde{Y}$-fibré $\widehat{G}$ au dessus de $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{nm}$ en posant $\widehat{\Lambda}_q = d_{p(q)}\phi(\Lambda_{p(q)})$. Comme $\phi \circ p_{|\widehat{X}} = id_{\widehat{X}}$ et F_*G tangent à $\widetilde{X}$, le fibré $\widetilde{G}$ est tangent à $\widetilde{X}$.

□

Exemple 3.3.4. On définit l'ensemble X par : $X = \{(x;y;z;)/y^3 = z^4x^5 + x^7\}$. Alors le lieu singulier de X est l'axe O_z. Il est possible de voir [J] que la stratification $(X \setminus O_z; O_z)$ est une stratification lipshizienne au sens de Mostowski.

Alors, en vertu du théorème précédent l'éclatement grassmannien $\widetilde{X}$ est C^1 trivial le long de l'ensemble des plans transverses à l'axe O_z.

Chapitre 4

Isotopies lipschitz et rugueuses

Ce chapitre donne plusieurs théorèmes d'isotopie sur des espaces stratifiés vérifiant les conditions définies au chapitre 2. Les trivialisations obtenues nous renseignent sur l'évolution des types métriques des fibres d'une famille. On s'interesse d'abord au cas rugueux où l'on généralise les théorèmes donnés par Verdier [V] ou [T-W]. On passe ensuite au cas lipshitzien. Dans les deux cas on majore la distance de la trivialisation à l'identité.

On donne ensuite une condition plus faible que la condition w de Verdier (la condition $r(ln^\beta)$) qui généralise la condition r^e de P. Orro et D. Trotman [O-T]). Le théorème d'isotopie qui en résultera nous permettra au chapitre 5 d'établir que la condition r de T. C. Kuo [Ku-1] implique la continuité de la densité pour les ensembles log-exponentiels. Une autre conséquence de la condition $r(ln^\beta)$ est la pseudo-platitude normale, ce qui étend les théorèmes de [O-T], [H-M] ou [Hi]. Il est intéressant de remarquer que la condition r elle-même ne suffit pas au delà du cadre sous-analytique.

4.1 Trivialisations de familles w^i régulières

Dans cette section on donne des théorèmes de trivialisation à l'ordre i de familles d'espaces stratifiés ou feuilletés. Ces résultats généralisent ceux donnés par J. L. Verdier dans [V] ou par D. Trotman et L. Wilson dans [T-W].

4.1.1 Isotopies rugueuses

On se donne i, un élément de $\mathbb{R} \cup \mathbb{R}_+$.

Définition 4.1.1. Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}^p$, $p \geq 1$. Soient f une application de A dans $\mathbb{R}^n$. On appelle i-approximation de f toute application $g \;: A \to \mathbb{R}^n$ vérifiant :

$$|f(x) - g(x)| \lesssim |x|^i.$$

On donne maintenant une propriété d'extension des champs qui nous servira pour établir notre théorème d'isotopie.

Proposition 4.1.2. *Soit X un sous-ensemble de $\mathbb{R}^d$ fermé contenant Y . On suppose que X possède une stratification $\{Y, X_1, \ldots, X_N\}$ telle que chaque couple $(X_j; X_{j'})$ soit w régulier et que chaque couple $(Y; X_j)$ satisfasse la condition w^i(i. e. $t^{0,1-i}$). Alors tout champ tangent à Y s'étend à un champ rugueux d'exposant i tangent aux strates et rugueux relativement à la stratification (au sens de Verdier).*

Démonstration. Soit w un champ défini sur Y. On définit l'extension sur le k-squelette par récurrence sur k. On suppose donc le champ défini sur le $(k-1)$ squelette. D'après [V] puisque tous les couples de strates vérifient la condition w, ce champ s'étend au k squelette en un champ rugueux $\widehat{w}$ lui aussi. Soit $A_k = \{X_i / dim\, X_i \leq k-1\}$. Soit U un voisinage de A_k suffisament petit pour que $\widehat{w}$ soit lui aussi rugueux d'exposant i par rapport à Y. On étend w aux strates de dimension k en posant $\widetilde{w}(q) = w(\pi(q))$. On recolle alors $\widetilde{w}$ et $\widehat{w}$ à l'aide d'une partition de l'unité subordonnée au recouvrement $(U; A_k \setminus (U \cup Y))$ pour obtenir un champ qui a les propriétés requises. □

On peut énoncer maintenant le théorème d'isotopie suivant :

Théorème 4.1.3. *Soit X comme dans le théorème précédent.*

Alors il existe un voisinage U de zéro et une application $h : \pi^{-1}(U) \to N \times U$ qui préserve les $X_j \cap \pi^{-1}(U)$ au voisinage de Y telle que, pour tout y de U, $h_y : N_y \to N \times \{y\}$ soit i-approximation de l'identité. h est en outre dérivable sur chacun des X_b ainsi qu'au voisinage de chaque point du complémentaire de X.

Démonstration. On démontre ce résultat comme dans [V]. On peut étendre une base de Y à un système de champs tangents rugueux relativement à la stratification et rugueux d'exposant i relativement à Y en vertu de la proposition 4.1.2. Ces champs étant rugueux on en déduit l'existence des courbes intégrales $\phi(q; t)$ comme dans [V]. De plus :

$$d(q; Y)e^{-Cs} \leq d(\phi_r(q; s); Y) \leq e^{Cs} d(q; Y).$$

et donc $d(q; Y) \sim d(\phi_r(q; s); Y)$. De plus d'après le théorème des accroissement finis :

$$\begin{aligned} |\pi^{\perp}(\phi(q; t)) - q| &\leq t \sup_{s \in [0;t]} |\pi^{\perp}(w(\phi(q; s))| \\ &\leq t \sup_{s \in [0;t]} |d(\phi(q; s); Y)|^i \\ &\lesssim td(q; Y)^i. \end{aligned}$$

□

Remarque 4.1.4. Lorsque $i \in \mathbb{R}$, l'homéomorphisme est une i-approximation de l'identité. Elle vérifie donc $|h(q) - q| \leq Cd(q; Y)^i$. En fait dans la preuve précédente $|\pi^{\perp}(\phi(q; t)) - q| \leq Ctd(q; Y)^i$ et par conséquent la constante peut être choisie arbitrairement proche de 0 pourvu que t soit assez petit. Lorsque $i \in \mathbb{R}_+$ l'isotopie vérifie $|\phi_N(q; t) - q_N| \lesssim \psi(|q_N|)|t|$ où ψ est une fonction qui tend vers zéro en zéro.

On donne maintenant une "version feuilletée" de ce résultat. On l'énonce sans démonstration car celle-ci est analogue au théorème précédent. Elle nous servira pour démontrer les théorèmes de $\mathcal{R}-$suffisance rugueuse à l'ordre i des jets d'applications au chapitre 6.

Théorème 4.1.5. *Soit (X_b) une famille de variétés telle que $X_b \cup Y$ soit fermée, et $X = \cup X_b \cup Y$ fermée. Soit G un Y-fibré induisant sur chaque X_b un sous-fibré du fibré tangent à X_b. On suppose que $\mathcal{G}$ est rugueux d'exposant i avec $i \geq 1$.*

Alors il existe un voisinage U de zéro et une application $h : \pi^{-1}(U) \to N \times U$ qui préserve les $X_b \cap \pi^{-1}(U)$ au voisinage de Y telle que, pour tout y de U, $h_y : N_y \to N \times \{y\}$ soit i-approximation de l'identité. h est en outre dérivable sur chacun des X_b ainsi qu'au voisinage de chaque point du complémentaire de X.

En outre h est lisse en tout point où G est lisse.

4.1.2 Isotopies ln^β régulières

Pour avoir des trivialisations qui sont sur chaque fibre des 1-approximations de l'identité il n'est pas nécéssaire de recquérir la condition w de Verdier. On peut affaiblir le théorème en utilisant la condition r^e introduite par D. Trotman et P. Orro dans [O-T]. Ici nous allons généraliser ce qui est fait avec la condition r^e en introduisant la condition $r(ln^\beta)$ un peu plus faible. On généralise le travail fait par P. Orro et David Trotman et on obtient notamment la pseudo-platitude normale. En sous analytique cela revient au même mais en *log*-analytique cette condition est plus faible et se rapproche davantage de la condition (b) de Whitney notamment en dimension 1.

Dans cette section β désigne un réel *strictement supérieur à* 1.

Définition 4.1.6. Une application w définie sur $X \subseteq \mathbb{R}^d$ sera dite $r(\ln^\beta)$ régulière en $t_0 \in Y$ si elle vérifie :

$$|w(q) - w(\pi(q))| \lesssim \frac{d(q;Y)}{|\pi(q) - t_0| \,.\, \ln^\beta |\pi(q) - t_0|}.$$

Définition 4.1.7. Soit X une variété telle que $Y \subseteq \overline{X} \setminus X$. On dira que $(X;Y)$ vérifie la condition $r(ln^\beta)$ en t_0 s'il existe un voisinage de t_0 tel que pour tout point q dans ce voisinage :

$$\delta(Y;T_qX) \lesssim \frac{d(q;Y)}{|\pi(q) - t_0| ln^\beta |\pi(q) - t_0|}. \tag{4.1}$$

Cette condition est bien sur plus faible que la condition r^e donnée dans [O-T]. Toutefois en sous-analytique la condition r de Kuo et la condition $a + r^e$ pour un certain e coincident. Comme $a + r(\ln^\beta)$ est entre ces deux conditions elles coincident toutes les trois dans le cas sous-analytique. En log-analytique on peut construire des stratifications satisfaisant la condition r mais pas $r(\ln^\beta)$ avec $\beta > 1$.

On va donner des théorèmes d'isotopie par des 1-approximations de l'identité, sur des espaces stratifiés vérifiant relativement à Y la condition $r(\ln^\beta)$.

Dans ce qui suit X désigne une partie de $\mathbb{R}^n$ contenant Y et $\mathcal{S}$ désigne une stratification de X, $\mathcal{S} = \{Y, X_1, \ldots, X_N\}$. On suppose que tous les couples $(X_i; X_j)$ satisfont la condition c de Bekka et que tous les couples $(Y; X_i)$ satisfont la condition $r(\ln^\beta)$ et la condition a de Whitney ($(0;\mathcal{S})$ t^1 nous suffirait). Le lecteur qui n'est pas familier avec la condition c pourra la remplacer par la condition b de Whitney. L'ensemble $X \setminus Y$ est stratifié par $\{X_1, \ldots, X_N\}$. Cette stratification étant c-régulière celui-ci peut être muni d'une structure d'espace stratifié abstrait (cf [Be] ou [Ma-2]) $(\pi_i; \rho_i)_{i \in I}$ compatible avec π, puisque tous les couples $(X_i; Y)$ satisfont la condition (a) de Whitney.

Proposition 4.1.8. *Soit w un champ tangent à Y. Alors w est π relevable à un champ continu $r(\ln^\beta)$-régulier controlé relativement au système $(\pi_i; \rho_i)_{i \in I}$.*

Démonstration. On note A_k le k-squelette. On étend w sur A_k par récurrence sur k. Pour $k = m+1$ on pose $w(q) = P_q(w(\pi(q))$ où P_q est la projection sur le tangent au point q de la strate contenant q. Alors w est $r(\ln^\beta)$ régulier en vertu de la condition $r(\ln^\beta)$ et continu en vertu de la condition a.

Supposons w construit sur le k squelette. Alors w s'étend à un champ continu controlé $\widetilde{w}$ dans un voisinage de $A_k \setminus Y$ dans $A_{k+1} \setminus Y$. Ce champ étant continu et $r(\ln^\beta)$-régulier sur $A_k \setminus Y$, il est toujours $r(\ln^\beta)$ régulier dans un voisinage suffisament petit U de $A_k \setminus Y$ dans $A_{k+1} \setminus Y$. De plus, en posant à nouveau pour $q \in A_{k+1} \setminus A_k$: $w(q) = P_q(w(\pi(q))$ où P_q est la projection sur l'espace tangent au point q de la strate contenant q on construit un champ continu sur $A_{k+1} \setminus A_k \cup Y$ qui est $r(\ln^\beta)$-régulier. On note $U' = \{q \in A_{k+1} / d(q; A_k) > d(q; U^c)\}$. Soit $(\alpha_1; \alpha_2)$ une partition de l'unité subordonnée au recouvrement de A_{k+1} donné par $(U; U')$. Le champ $\widehat{w}(q) = \alpha(q)_1 \widetilde{w} + \alpha_2(q) w(q)$ a les propriétés recherchées. □

On déduit de l'existence des champs les théorèmes d'isotopies par des $1-$ approximations de l'identité.

Théorème 4.1.9. *Soit X comme précédemment. Alors il existe un voisinage U de l'origine et une isotopie $H : \pi^{-1}(U) \to \pi^{-1}(0) \times U$ continue, dérivable sur chaque strate et telle que :*

$$|H_N(q; t) - q_N| \leq C d(q; Y) ln^{1-\beta} \, |\pi(q)|. \tag{4.2}$$

Démonstration. On intégre le champ $\eta_i(q) = \frac{w_i(q)}{<\partial_i; w_i(q)>}$ où w_i est le champ donné par la proposition 4.1.8 qui relève le champ $-\partial_i$. Il faut démontrer l'existence et l'unicité des courbes intégrales. On note ∂_t un vecteur de la base cannonique et t la coordonnée suivant ce vecteur. Les courbes intégrales étant controlées, puisque le champ w l'est, elles ne peuvent pas passer d'une strate X_i à une strate X_j. Il faut montrer que les courbes intégrales ne rencontrent pas la strate Y avant $t = \pi(q)$. On procède comme dans [O-T]. On note ϕ le flot de η. On pose $f(t) = |\phi(q; t)\pi(\phi(q; t))|$. Alors :

$$f'(t) = \frac{< \eta(\phi(q;t))\pi(\eta(\phi(q;t))) \; ; \phi(q;t)\pi(\phi(q;t)) >}{|\phi(q;t)\pi(\phi(q;t))|}.$$

et puisque η est $r(\ln^\beta)$ régulier il vient :

$$\frac{|f'(t)|}{f(t)} \leq C \frac{1}{|\pi(\phi(q;t))| ln^\beta |\pi(\phi(q;t))|}$$

où t_0 désigne la coordonée de q suivant t.

La fonction $|xln^{\beta}x|$ est croissante pour $x \leq 1$ et $|t-t_0| \leq |\pi(\phi(q;t))|$. Donc $|\pi(q;t)|ln^{\beta}|\pi(\phi(q;t))| \geq |t-t_0|ln^{\beta}|t-t_0|$.

Or $|\phi(q;t)| \geq |t-t_0|$, on a donc a fortiori :

$$\frac{|f'(t)|}{f(t)} \leq \frac{C}{|t-t_0|\, ln^{\beta}|t-t_0|}. \tag{4.3}$$

On en déduit $\frac{f'(t)}{f(t)} \geq \frac{-C}{|t-t_0|\, ln^{\beta}|t-t_0|}$. Ce qui implique pour $t \leq t_0$:

$$f(t) \geq f(0)\exp(C(ln^{\,1-\beta}|t-t_0| - ln^{\,1-\beta}|t_0|)).$$

Ce qui démontre que la courbe intégrale ne rejoint pas Y avant $t = t_0$ (puisque $\beta > 1$).

De plus on peut déduire de l'inégalité (4.3) :

$$f(t) \leq Cf(0)\exp(C(ln^{1-\beta}|t_0| - ln^{1-\beta}|t-t_0|)).$$

Et donc $f(t) \sim f(0)$.

$$\begin{aligned}
|\phi_N(q;t) - q| &= |\int_0^{t_0} \eta_N(\phi(q;s))ds| \\
&\leq C|\int_0^{t_0} \frac{f(s)}{sln^{\beta}s}ds| \\
&\leq Cf(0)|\int_0^{t_0} \frac{1}{s.ln^{\beta}s}ds| \quad \text{car } f(t) \sim f(0) \\
&\leq Cd(q;Y)\ln^{1-\beta}|t_0|.
\end{aligned}$$

□

Remarque 4.1.10. L'inégalité (4.2) montre que le mouvement latéral des sécantes tend vers zéro. On obtient donc que la condtion $r(\ln^{\beta})$ (avec $\beta > 1$) avec la condition a impliquent la pseudo-platitude normale et la condition n (cf [O-T]).

En dimension 1, pour des stratifications sous-analytiques, la condition b de Whitney implique que le rapport de Kuo tend vers zéro et donc implique $a + r^e$ pour un certain e et donc $r(\ln^{\beta})$ pour tout β. En log-analytique ceci n'est pas vrai.

4.2 Isotopies lipschitziennes

4.2.1 $(i;k)$ approximation de l'identité

Définition 4.2.1. Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$.

Une fonction $h : A \to R^n$ sera appelée $(i;k)$ quasi-isométrie si elle satisfait pour une constante C les conditions suivantes :

(i) Si $i \in \mathbb{R}$:

$$d(q;Y)\ e^{-C|d(q;0)|^i} \leq |h(q) - h(0)| \leq d(q;Y)\ e^{C|d(q;0)|^i}. \tag{4.4}$$

(i') Si $i \in \mathbb{R}_+$:

$$d(q;Y)\ e^{-\psi(q)Cd(q;0)^i} \leq |h(q) - h(0)| \leq d(q;Y)\ e^{\psi(q)Cd(q;0)^i} \tag{4.5}$$

où ψ est une fonction définie sur A qui tend vers zéro quand q tend vers Y.

(ii) On note $\theta_0(q;q') = \max(d(q;0);d(q';0))$.
Si $k \in \mathbb{R}$: pour tout couple $(q;q') \in A \times A$

$$|q - q'|\ e^{-C\theta_0(q;q')^k} \leq |h(q) - h(q')| \leq |q - q'|\ e^{C\theta_0(q;q')^k} \tag{4.6}$$

(ii') Et si $k \in \mathbb{R}_+$

$$|q - q'|\ e^{-\psi(q;q')\theta_0(q;q')^k} \leq |h(q) - h(q')| \leq |q - q'|\ e^{\psi(q;q')\theta_0(q;q')^k} \tag{4.7}$$

où ψ est une fonction définie sur $A \times A$ qui tend vers zéro quand $(q;q')$ tend vers $Y \times Y$.

Définition 4.2.2. Soient f et g deux fonctions C^1. On dit que f est une $(i;k)$-approximation de g à l'origine si les conditions suivantes sont vérifiées :

$$|f(x) - g(x)| \lesssim |x|^{i+1} \tag{4.8}$$

et

$$|D_x f - D_x g| \lesssim |x|^k \tag{4.9}$$

Proposition 4.2.3. *On suppose que k est positif. Alors une $(i;k)$-approximation de l'identité est une $(i;k)$ quasi-isométrie.*

Démonstration. Soit f une $(i;k)$ approximation de l'identité. D'après (4.9) et le théorème des accroissements finis, pour tout couple $(x;x')$ satifaisant $|x - x'| \leq \frac{|x|}{2}$:

$$|f(x) - f(x') - (x - x')| \lesssim |x|^k |x - x'| \tag{4.10}$$

De plus d'après (4.8) on a pour tout couple $(x;x')$ satisfaisant $|x - x'| \geq \frac{|x|}{2}$:

$$|f(x) - f(x') - (x - x')| \lesssim |x - x'| \max(|x|;|x'|)^i \tag{4.11}$$

Ce qui s'écrit :

$$|f(x) - f(x') - (x - x')| \leq \psi(x;x')|x - x'| \max(|x|;|x'|)^{\sigma(i)}$$

avec $\psi(x;x')$ qui tend vers zéro quand $(x;x')$ tend vers $Y \times Y$ si $i \in \mathbb{R}_+$, bornée sinon. On pose $\tilde{\psi}(x;x') = \psi(x;x') \max(|x|;|x'|)^{\sigma(i)-\sigma(k)}$.

Ceci nous donne pour tout couple $(x;x')$:

$$(1 - \tilde{\psi}(x;x')\theta_0(x;x')^k)|x - x'| \leq |f(x) - f(x')| \leq (1 + \tilde{\psi}(x;x')\theta_0(x;x')^k)|x - x'|$$

Et puisque $e^u \sim 1 + u$ la proposition est démontrée. ∎

Remarque 4.2.4. (i) L'inégalité (4.11) peut en fait être substituée à (4.9) pour donner une définition équivalente d'une $(i;k)$-approximation de l'identité. Dans le cas où la fonction f n'est pas C^1 on parlera de f comme d'une $(i;k)$-approximation de l'identité pour dire qu'elle vérifie les inégalités (4.11) et (4.8) pour $g = Id$. C'est à dire :

$$|f(q) - q| \lesssim d(q;Y)^{i+1} \tag{4.12}$$

Et, pour tout couple $(q;q')$ satisfaisant $|q - q'| \leq \frac{1}{2c} d(q;Y)$:

$$|f(q) - f(q') - q + q'| \lesssim d(q;Y)^k |q - q'| \tag{4.13}$$

Evidemment avec cette définition la proposition précédente est toujours valable. De plus une application f est une $(i;k)$-approximation de l'identité si et seulement si $f - Id$ est rugueuse d'exposant $i+1$ et lipschitz d'exposant k.

(ii) Pour k négatif la preuve de la proposition précédente peut être faite. La minoration de l'encadrement final alors obtenu n'a pas d'intérêt puisque le minorant est négatif mais la majoration est beaucoup plus forte que celle d'une $(i;k)$ quasi-isométrie puisque c'est une fraction rationnelle au lieu d'une exponentielle.

4.2.2 Isotopies quasi-isométriques d'espaces singuliers

A l'instar de la condition L de Mostowski les conditions $L(i;j;k)$, pour $i \geq 1$, impliquent l'existence de trivialisation préservant les propriétés métriques des strates à une hauteur plus ou moins significative.

On rappelle premièrement une proposition qui établit l'existence de partitions de l'unité avec des dérivées bornées explicitement en fonction des ouverts. On pourra trouver ce résultat dans [F](3.1.13) sous une forme un peu plus générale.

Proposition 4.2.5. *Il existe une constante C telle que pour toute famille $(U_i)_{i\in I}$ il existe une partition de l'unité C^∞ $(\alpha_i)_{i\in I}$ dont les supports forment un raffinement localement fini de la famille U_i, et dont les dérivées vérifient :*

$$|d_x \alpha_i| \leq \frac{C}{h(x)}$$

où $h(x) = \sup\{\min\{1, d(x;\mathbb{R}^d \setminus U_i)\}/i \in I\}$.

Proposition 4.2.6. *Soit X un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}^n$ contenant Y. Soit $w_0 \in \mathbb{R}$ et soit w une fonction définie sur X, rugueuse d'exposant $i+1$ et lipschitzienne d'exposant k telle que $w_{|Y} = w_0$. Alors w s'étend à $\mathbb{R}^n$ à une fonction elle aussi rugueuse d'exposant $i+1$ et lipschitz d'exposant k.*

Démonstration. Tout d'abord d'après la remarque 2.1.4, puisque $i \geq k$, (2.2) est vraie sans restriction sur les couples $(q;q')$ à condition de remplacer $d(q;Y)$ par $\theta(q;q')$. On fixe donc une constante C telle que pour tout couple $(q;q') \in X \times X$ l'application w satisfasse à :

$$|w(q) - w(q')| \leq C\ |q - q'|\ \theta(q;q')^k \tag{4.14}$$

Soit $A_p = \{q \in \mathbb{R}^n / \frac{1}{3.2^p} < d(q;Y) < \frac{1}{2^p}\}$. Fixons un entier p. Sur A_p, $d(q;Y)$ et $d(q';Y)$ sont inférieurs à $\frac{1}{2^p}$. Par conséquent, d'après (4.14), pour tout couple $(q;q')$ dans $A_p \times A_p \cap X \times X$

$$|w(q) - w(q')| \leq C\frac{|q-q'|}{2^{kp}}. \tag{4.15}$$

On peut donc étendre $w_{|A_p \cap X}$ sur A_p tout entier, à une fonction $\frac{C}{2^{kp}}$ lipschitzienne en lui appliquant le théorème d'extension de Banach (cf [Ba]). Soit $\hat{w}$ cette extension. $\hat{w}$ satisfait (4.15). Donc pour tout couple de points $(q;q')$ dans $A_p \times A_p$:

$$|\hat{w}(q) - \hat{w}(q')| \leq C2^k|q-q'|\theta(q;q')^k. \tag{4.16}$$

On définit les sous-ensembles de A_p :

$$B_p = \{q \in A_p / d(q; A_p \cap X) \leq \frac{2}{3.2^{p(i-k+1)}}\}$$

et

$$C_p = \{q \in A_p / d(q; A_p \cap X) \geq \frac{1}{3.2^{p(i-k+1)}}\}.$$

D'après la proposition précédente il existe une partition de l'unité $(\alpha; 1-\alpha)$ subordonnée au recouvrement de A_p donné par $(B_p; C_p)$ et qui vérifie $|d_x\alpha| \leq \frac{C}{h(x)}$ où $h(q)$ est la fonction définie dans la proposition précédente. Or $h(q) \geq \frac{1}{3.2^{p(i-k+1)}}$ il vient $|d_x\alpha| \leq 3C2^{p(i-k-1)} \quad \forall x \in A_p$. Ceci implique pour $q \in A_p$, $|d_x\alpha| \leq 3.Cd(q;Y)^{k-i-1}$. Alors par le théorème des accroissements finis :

$$|\alpha(q) - \alpha(q')| \leq 3C|q-q'|d(q;Y)^{k-i-1}$$

pour tout couple $(q;q') \in A_p \times A_p$ satisfaisant $|q-q'| \leq \frac{1}{2c}d(q;Y)$.

De plus remarquons que si $q \in B_p$ alors $d(q; A_p \cap X) \leq \frac{2}{3.2^{p(i-k+1)}}$, ce qui implique puisque $q \in A_p$:

$$d(q; A_p \cap X) \leq \frac{2}{3}d(q;Y)^{i-k+1}. \tag{4.17}$$

On pose maintenant $w_p(q) = \alpha(q)\hat{w}(q) + (1-\alpha(q))w_0$. Sur B_p, $\hat{w}$ est une fonction rugueuse d'exposant $i+1$. En effet, soit q un point de B_p et q_0 un point qui réalise la distance à $A_p \cap X$. Alors

$$\begin{aligned} d(q_0;Y) &\leq d(q;Y) + |q-q_0| \\ &\leq d(q;Y) + \frac{2}{3}d(q;Y)^{i-k+1} \quad \text{(d'après (4.17))} \\ &\leq 2d(q;Y) \quad \text{car } k \leq i. \end{aligned} \tag{4.18}$$

Alors il vient en utilisant (4.16) :

$$\begin{aligned} |\hat{w}(q) - w_0| &\leq |\hat{w}(q) - w(q_0)| + |w(q_0) - w_0| \\ &\leq C|q-q_0|\theta(q;q_0)^k + Cd(q;Y)^{i+1} \\ &\leq C|q-q_0|d(q;Y)^k + Cd(q;Y)^{i+1} \quad \text{(d'après (4.18))} \\ &\leq d(q;A_p \cap X)d(q;Y)^k + Cd(q;Y)^{i+1} \\ &\leq d(q;Y)^{i+1} \quad \text{(d'après (4.17))}. \end{aligned}$$

Et par conséquent w_p est lui aussi une fonction rugueuse d'exposant $i+1$. Montrons maintenant que w_p est une fonction lipschtzienne d'exposant k. Soit $(q;q') \in A_p \times A_p$.

$$\begin{aligned}
|w_p(q) - w_p(q')| &\leq |(\alpha(q)\hat{w}(q) - \alpha(q'))\hat{w}(q') + (\alpha(q) - \alpha(q'))w_0| \\
&\leq |\alpha(q)(\hat{w}(q) - w_0) - \alpha(q')(\hat{w}(q) - w_0)| \\
&\leq |\alpha(q) - \alpha(q')||\hat{w}(q) - w_0| + |\alpha(q')||\hat{w}(q) - \hat{w}(q')| \\
&\leq C|q - q'|d(q;Y)^{k-i-1}d(q;Y)^{i+1} + |q - q'|d(q;Y)^k \\
&\leq |q - q'|d(q;Y)^k.
\end{aligned}$$

A nouveau en appliquant la proposition précédente on trouve une partition de l'unité $(\phi)_{p\in\mathbb{N}}$ subordonnée au recouvrement de $\mathbb{R}^d \setminus Y$ par les A_p. Puisque $d(A_p \setminus \bigcup_{q\neq p} A_q; \mathbb{R}^n \setminus A_p) \geq \frac{1}{3.2^p} \quad \forall q \in A_p$ on pourra avoir : $|d_q\phi_p| \leq 3C.2^p$. Ceci implique que $\sup_{A_p}|d_q\phi_p| \leq \frac{3C}{d(q;Y)}$ pour $q \in A_p$. Pour $q \notin A_p$ ceci est encore vrai puisque $D\phi_p(q) = 0$.

Ceci nous implique en vertu de l'inégalité des accroissements finis :

$$|\phi_p(q) - \phi_p(q')| \lesssim \frac{|q - q'|}{d(q;Y)} \tag{4.19}$$

pour tout couple $(q;q') \in A_p \times \mathbb{R}^n \setminus Y$ satisfaisant $|q - q'| \leq \frac{1}{2c}d(q;Y)$.

On pose donc $w(q) = \sum_{p\in\mathbb{N}} \phi_p(q)w_p(q)$. Comme tous les w_p sont rugueux d'exposant $i+1$, il en est de même pour la fonction w. Il reste à voir que w est lipschitz d'exposant k. Soient q et q' deux points de $\mathbb{R}^d$.

Remarquons d'abord que chaque point de $\mathbb{R}^n$ appartient au plus à deux des A_p et que par conséquent dans la somme définissant w au plus deux termes sont non nuls pour chaque point q.

Soient $(q;q')$ satisfaisant $|q - q'| \leq \frac{1}{2c}d(q;Y)$. Alors

$$\begin{aligned}
|w(q) - w(q')| &= |\sum_{p\in\mathbb{N}} \phi_p(q)(w_p(q) - w_0) - \sum_{p\in\mathbb{N}} \phi_p(q')(w_p(q') - w_0)| \\
&\leq |\sum_{p\in\mathbb{N}} |\phi_p(q) - \phi_p(q')|(w_p(q) - w_0)| + \phi_p(q')|w_p(q) - w_p(q')| \\
&\leq 4\frac{|q - q'|}{d(q;Y)}.d(q;Y)^{i+1} + 4|q - q'|d(q;Y)^k \\
&\leq 4|q - q'|d(q;Y)^\beta \qquad \text{car } i \geq k.
\end{aligned}$$

Pour $i \in \mathbb{R}_+$ ou $k \in \mathbb{R}_+$ la preuve est analogue.

□

Remarque 4.2.7. Pour i supérieur à 0_+ une $(i;k)$ approximation de l'identité est alors dérivable à l'origine. Si celle-ci est dérivable en dehors de Y sa dérivée au point q est majorée par $|x|^k$.

Si k est lui aussi supérieur à 0_+ la dérivée approche l'identité à l'ordre k. La fonction est alors continûment dérivable à l'origine avec une dérivée valant l'identité en ce point.

Nous signalons ici une erreur chez C.T.C. Wall dans [Wa]. Il est dit que la fonction ψ, rugueuse à l'ordre i, est alors C^i. Ceci n'est pas nécéssairement le cas. En fait une telle fonction n'est même pas nécéssairement C^1.

Notons que les constantes lipschitz de l'extension peuvent être exprimées en fonction des constantes données initialement et que le rapport peut être majoré par des constantes qui ne dépendent que de la dimension.

La conclusion de la proposition précédente peut être renforcée dans certains cas. On peut obtenir des informations sur la dérivabilité de l'extension (cf [Pa3]).

Notons que dans le cas d'une fonction C^r en dehors de Y la proposition précédente à l'ordre 0_+ et l'addendum qui suit sont des conséquence du théorème d'extension de Whitney.

Addendum 4.2.8. L'extension $\hat{w}$ rugueuse d'exposant $i+1$ et lipschitz d'exposant k pourra vérifier en outre :

(i) $\hat{w}$ est C^∞ sur $\mathbb{R}^n \setminus X$.

(ii) Soit $(W_l)_{l\in L}$ une collection de variétés ouvertes disjointes de X, telle que w soit dérivable en tout point de W_l pour tout l. Alors $\hat{w}$ est dérivable sur un voisinage de W_l dans $\mathbb{R}^d$ pour tout l.

Démonstration. Pour démontrer le point (i) on procède comme dans [Pa3] lemme 1.5. En effet, il suffit de remplacer l'extension utilisée, donnée par le théorème de Banach, par une extension C^∞ dans le complémentaire de X.

Soit $l \in L$ une variété. Comme W_l est ouvert dans X, on peut trouver un voisinage W' qui ne rencontrent aucun autre $W_{l'}$. On étend d'abord w à un voisinage de W_l inclus dans W' en posant $w'(q) = w(\pi_{W_l}(q))$ où π_{W_l} est une rétraction C^r sur W_l. On peut faire cela en supposant que les constantes lipschitz ne dépassent pas le double des constantes initales. Alors les convolées de w tendent vers w avec leurs dérivées et l'extension est C^r. □

On peut aussi approximer une extension donnée pour obtenir une extension qui satisfait aux conclusions de l'addendum précédent.

Proposition 4.2.9. *Soit ϵ un réel strictement positif.*

Les hypothèses sont celles de la proposition 4.2.6. On suppose en outre que l'on possède déjà une extension w_1 rugueuse d'exposant $i+1$ et lipschitz d'exposant k. Alors on peut trouver une extension $\hat{w}$ qui satisfait aux conclusions de la proposition 4.2.6 et à celles de son addendum et qui vérifie $|\hat{w} - w_1| \leq \epsilon$.

Démonstration. La preuve est celle de la proposition 4.2.6 jointe à celle de son addendum. La seule différence est qu'il faut remplacer l'extension utilisée (qui est donnée par le théorème de Banach) par w_1. □

On en vient maintenant à notre théorème d'isotopie. Soit X une partie de $\mathbb{R}^d$ et G un $Y-$fibré au dessus de X. On suppose qu'il existe un voisinage de l'origine tel que G soit un fibré rugueux d'exposant $i+1$ et lipschitzien d'exposant k dans ce voisinage, avec i positif ou nul.Soit $(X_b)_{b\in B}$ une famille finie ou infinie de variétés incluse dans X telles que $X_b \cup Y$ soit localement fermée. On suppose que G est dérivable sur un ouvert W de X réunion d'une famille finie de variétés lisses $(W_l)_{l\in L}$, ainsi que sur les X_b. On suppose aussi que pour tout $b \in B$, $G_{|X_b}$ est un sous-fibré du fibré tangent a X_b.

Théorème 4.2.10. *Soit G comme dans le paragraphe qui précède. Alors il existe un voisinage U de zéro et une application $h : \pi^{-1}(U) \to N \times U$ qui préserve $X \cap \pi^{-1}(U)$ au voisinage de Y ainsi que les X_b telle que pour tout y de U $h_y : N_y \to N \times \{y\}$ soit une $(i+1;k)$ quasi-isométrie, h est en outre dérivable sur chacun des X_b ainsi qu'au voisinage de chaque point de chacun des W_l et de chaque point du complémentaire de X.*

De plus pour k positif H est une $(i;k)$ approximation de l'identité. h induit alors une trivialisation lipschitz de la famille $(X_y)_{y\in U}$.

Démonstration. La preuve de ce théorème utilise un argument classique. On construit un champ de vecteur rugueux et on estime les différences entre les courbes intégrales à l'aide du lemme de Gronwall. Soit $w_1(q),\dots,w_r(q)$ les section de G.Les sections se prolongent à la fermeture de X dans le complémentaire de Y car elles sont des fonctions lipschitz à l'approche de ces points là. D'après la proposition 4.2.6 on peut étendre chaque w_r à un voisinage de zéro dans $\mathbb{R}^d$. Ce champ est localement lipschitzien sur X, il induit donc un flot ϕ_r localement en tout point du complémentaire de Y. Sur Y il induit le champ constant et il est donc clairement intégrable. De plus puisque i est positif ou nul le champ w est rugueux au sens de Verdier, on peut donc en déduire, par le même argument que dans [V], l'existence et l'unicité des courbes intégrales et :

$$d(q;Y)e^{-Cs} \le d(\phi_r(q;s);Y) \le e^{Cs}d(q;Y)$$

Par conséquent pour $s \in U$ et q suffisament proche de l'origine $d(\phi_r(q;s);Y) \sim d(q;Y)$. Il en est donc de même pour θ. De plus :

$$|w(q) - w(q')| \lesssim |q-q'|\theta(q;q')^k$$

Et donc :

$$|w(\phi_r(q;s) - w(\phi_r(q';s))| \lesssim |\phi_r(q;s) - \phi_r(q';s)|\theta(\phi_r(q;s);\phi_r(q';s))$$

Ou encore :

$$|w(\phi_r(q;s) - w(\phi_r(q';s))| \lesssim |\phi_r(q;s) - \phi_r(q';s)|\theta(q;q')^k. \tag{4.20}$$

A nouveau d'après le lemme de Gronwall il vient pour $k \in \mathbb{R}$:

$$|q-q'|\, e^{-s\theta(q;q')^k} \lesssim |\phi_r(q;s) - \phi_r(q';s)| \le |q-q'|\, e^{Cs\theta(q;q')^k} \tag{4.21}$$

Pour $k \in \mathbb{R}^+$, (4.20) devient

$$\begin{aligned} |w(\phi_r(q;s)) - w(\phi_r(q';s))| &\lesssim \psi(\phi_r(q;s);\phi_r(q';s))\frac{|\phi_r(q;s) - \phi_r(q';s)|}{d(q;Y)^k} \\ &\lesssim \sup_s \psi(\phi_r(q;s);\phi_r(q';s))\frac{|\phi_r(q;s) - \phi_r(q';s)|}{d(q;Y)^k} \end{aligned}$$

On pose $\tilde{\psi(q;q')} = \sup\limits_s \psi(\phi_r(q;s);\phi_r(q';s))$. Il est clair que $\tilde{\psi}$ tend vers zéro quand $(q;q')$ tend vers $Y \times Y$. A nouveau d'après le lemme de Gronwall il vient pour $k \in \mathbb{R}$:

$$|q-q'|\, e^{\frac{-Cs\tilde{\psi}(q;q')}{\theta(q;q')^k}} \leq |\phi_r(q;s) - \phi_r(q';s)| \leq |q-q'|\, e^{\frac{Cs\tilde{\psi}(q;q')}{\theta(q;q')^k}}$$

On pose donc $h(x;t) = (\phi_1(\dots\phi_m(x;t_m)\dots;t_1);t)$.

Puisque les fibres Λ_q sont tangentes aux X_i il est clair que h préserve les X_i. h est clairement lisse sur les X_b puisque w l'est.

D'après l'addendum 4.2.8 le champ w peut être étendu à un champ lisse dans le complémentaire de $adh(X)$.

Pour k positif on a d'après le théorème des accroissements finis : :

$$\begin{aligned}
|\phi_r(q;t) - \phi_r(q';t) - (q-q')| &\leq t \sup_{s\in[0;t]} |w(\phi(q;s)) - w(\phi(q';s)| \\
&\lesssim \theta(q;q')^k \sup_{s\in[0;t]} |\phi_r(q;s) - \phi_r(q';s)| \quad \text{d'après (4.20)} \\
&\lesssim |q-q'|\theta(q;q')^k \quad \text{d'après (4.21) et } k \geq 0
\end{aligned}$$

ce qui montre bien que h est une $(i+1;k)$ approximation de l'identité. □

Remarque 4.2.11. Si $k \geq 0_+$ et si W est tout le complémentaire de Y alors w est dérivable au sens de Whitney sur X et son extension le sera aussi. H est alors un difféomorphisme C^1 qui est une $(i;k)$ approximation de l'identité.

Chapitre 5

Sur le volume et la densité des ensembles sous-analytiques

Dans ce chapitre nous allons voir comment la densité et les germes des volumes se comportent à travers des approximations de l'identité au sens défini au chapitre 4. On s'intéresse plus particulièrement aux ensembles sous-analytiques. En conséquence il vient que le long d'une stratification satisfisant la condition w^{i+}, les termes du développement du volume sont constants jusqu'à l'ordre i inclus. Lorsque la stratification est w^i régulière les termes d'ordre strictement inférieurs à i sont constants et le terme d'ordre i est lipschitzien. En conséquence on obtient que la condition w de Verdier implique que la densité varie de manière lipschitz. On renforce ainsi un résultat de G. Comte [Co3] ou [Co1] qui démontre la continuité de la densité d'un ensemble le long des strates. En outre on donne ici des théorèmes qui concernent aussi bien la densité des fibres que celle de l'ensemble lui-même. On établit donc en particulier la continuité de la densité d'une famille $w-$régulière. On donne aussi au passage des propriétés d'équimultiplicité des fibres génériques d'une projection restreinte à un espace stratifié sous-analytique.

5.1 Définitions et notations

Dans cette section i désigne un élément de $\mathbb{R} \cup \mathbb{R}_+$ supérieur ou égal à 0.

Pour r réel positif on note $B(0;r)$ la boule de centre 0 et de rayon r et $S(0;r)$ la sphère de centre zéro et de rayon r.

On appellera famille sous-analytique d'ensembles de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, un ensemble A inclus dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, sous-analytique. Pour $t \in \mathbb{R}^m$, on notera alors A_t la fibre en t de la famille c'est à dire l'ensemble sous-analytique défini par $\{x \in \mathbb{R}^n/(x;t) \in A\}$. Si B est une partie sous-analytique de $\mathbb{R}^m$ on désignera par $A_{|B}$ la restriction de A au sous-ensemble B c'est à dire la famille sous-analytique définie par $\{(x;t) \in A/t \in B\}$.

Etant données deux familles sous-analytiques d'ensembles de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ et α une fonction définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ on définit la notion de $\alpha-$approximation de l'identité.

Définition 5.1.1. On appelle α-approximation de l'identité tout homéomorphisme $h\ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ du type $h(x;t) = (h_t(x);t)$ vérifiant :

$$|h_t(x) - x| \lesssim \alpha(|x|;t).$$

$$|h_t^{-1}(x) - x| \lesssim \alpha(|x|;t).$$

On notera dans ce qui suit $\mathcal{H}^k$ la mesure de Hausdorff k dimensionnelle. Etant donné un ensemble sous-analytique A de $\mathbb{R}^n$ et un réel ϵ on notera A_ϵ le voisinage de A défini par $\{x \in \mathbb{R}^n / d(x;A) < \epsilon\}$.

On va étudier le volume et la densité des ensembles sous-analytiques. L'existence de la densité pour de tels ensemble est prouvée dans [K-R]. Voir aussi [C-R-L] pour le caractère log-analytique des germes des volumes.

Si X est un ensemble sous-analytique on définit les fonctions $\psi(X;r)$, $\widetilde{\psi}$ et $\widehat{\psi}$ de la manière suivante :

$$\psi(X;r) = \mathcal{H}^k(X \cap B(0;r)),$$

$$\widetilde{\psi}(X;r) = \frac{\psi(X;r)}{r^k}$$

et,

$$\widehat{\psi}(X;r) = \mathcal{H}^{k-1}(X \cap S(0;r))$$

où k est la dimension de Hausdorff de X.

Soit A un ensemble sous-analytique de $\mathbb{R}^n$ de dimension l. D'après le théorème de Gabrielov [Ga] (voir Hardt [H] aussi) il existe un entier naturel N tel que pour tout P dans G_l^n, $card(\pi_P^{-1}(q) \cap A) \leq N \quad \forall\, q \in P$ ou $card(\pi_P^{-1}(q) \cap A) = \infty$. Ceci nous donne une partition finie de P par des ensembles sous-analytiques :

$$K_j^P(A) = \{q \in P / card\, \pi_P^{-1}(q) \cap A = j\}.$$

$j \in \{0, \ldots N, \infty\}$. De plus l'ensembles des plans tels que $K_\infty^P(A) = \emptyset$ est dense dans G_l^n.

A partir des entiers j tels que $K_j^P \neq \emptyset$, on définit pour une projection les multiplicités à l'ordre i.

Définition 5.1.2. Soit P un plan de dimension l et i un réel supérieur ou égal à 1. On dit que j est une multiplicité pour P d'ordre i s'il existe une constante C telle que pour tout r suffisament proche de l'origine :

$$\widetilde{\psi}(K_j^P(A \cap B(0;r));r) \geq Cr^i.$$

On note alors $m(P;A;i)$ l'ensemble des multiplicités d'ordre i de A pour P.

En sous-analytique le volume est une fonction logarithmo-exponentielle et possède un développement en série de Puiseux en r et en $logr$. Nous rappelons ce résultat que l'on peut trouver dans [C-R-L].

Proposition 5.1.3. *Soit X un ensemble sous-analytique. Alors la fonction ψ admet le développement suivant :*

$$\begin{aligned}\psi(X;r) &= \sum_{\alpha,\beta\in\mathbb{N}} a_{\alpha\,\beta}\, r^{\frac{\alpha}{q}}.\, \log^{\frac{\beta}{q}} r \\ &= a_{\alpha_0\,\beta_0} r^{\frac{\alpha_0}{q}}.\, \log^{\frac{\beta_0}{q}} r + \ldots o \alpha_0 = \min\{\alpha \in \mathbb{N} / \exists\, \beta,\ a_{\alpha\beta} \neq 0\}\ et\ \beta_0 = \max\{\beta \in N / a_{\alpha_0\beta} \neq 0\}.\ D\end{aligned}$$

(5.2)

Afin de comparer les développements des ensembles homéomorphes par des i ou $(i;k)$-approximations de l'identité on ordonne les couples d'exposants de la manière suivante :

$$(\alpha;\beta) \prec (\alpha';\beta') \quad si \; (\; \alpha < \alpha' \quad ou \quad (\alpha = \alpha' \quad et \quad \beta > \beta')).$$

On dira que deux développements coincident jusqu'à l'ordre $(k;l)$ (resp. $(k;l)_+$) si tous les coefficients précédant des puissances de r inférieures ou égales (resp. strictement inférieures) à $(k;l)$ (pour la relation d'ordre $\prec$) sont égaux. On dira que les développements coincident à l'ordre k (resp k_+) s'ils coincident jusqu'à l'ordre $(k;0)$(resp$(k;0)_+$). Cette définition est motivée par le fait que les log tendent vers l'infini moins vite que n'importe quelle puissance de $\frac{1}{r}$. La fonction $r^{\alpha}log^{\beta}r$ avec α et β réels positifs est très grande devant r^{α} mais très petite devant toute puissance de r inférieure à α. En conséquence $r^{\alpha'}log^{\beta'}r \ll r^{\alpha}log^{\beta}r$ si et seulement si $(\alpha;\beta) \prec (\alpha';\beta')$. Dans la proposition précédente $(\alpha_0;\beta_0)$ est en fait minimum pour la relation $\prec$. On dira que deux développements coincident jusqu'à l'ordre i pour dire qu'ils coincident jusqu'à l'ordre $(i;0)$.

5.2 Volume et i-approximation de l'identité

Un argument clef des démonstrations de cette section est la formule de Cauchy-Crofton. C'est un résultat classique qui relie la mesure de Hausdorff d'un ensemble à celle de ses projections. On en rappelle ici le contenu sans démonstration. Le lecteur pourra se référer à [F].

Proposition 5.2.1. *Soit E un ensemble sous-analytique de dimension l. Alors :*

$$\mathcal{H}^l(E) = \beta(l;n)^{-1} \int_{P\in G(l;n)} \int_{y\in P} card \; (E \cap \pi_P^{-1}(y)) \; d\mathcal{H}^l(y) d\gamma_{l,n}(P). \tag{5.3}$$

où $\beta(l;n)$ est une constante.

Nous nous intéressons maintenant aux volumes des ensembles sous-analytiques. Toutefois les résultats démontrés dans cette section n'utilisent que la finitude des projections génériques ou l'existence des stratifications $b-$régulières et sont donc vraies pour les structures $o-$minimales (en particulier pour les ensembles log-analytiques).

Comme nous l'avons dit dans la section 1, si E est un ensemble sous-analytique le cardinal des fibres des projections est borné. Les entiers j qui ont leur $K_j^P(E)$ non vides sont donc majorés par un entier N et la formule de Cauchy-Crofton s'écrit alors :

$$\mathcal{H}^l(E) = \beta(l;n)^{-1} \int_{P\in G(l;n)} \sum_{j=1}^{N} j.\mathcal{H}^l(K_j^P(E)) \quad d\gamma_{l,n}(P) \tag{5.4}$$

Proposition 5.2.2. *Soit A une famille sous-analytique de $\mathbb{R}^d$ d'ensembles de dimension l et soit K un compact de $\mathbb{R}^m$. Pour tout réel r_0 il existe une constante C telle que pour tout $t \in K$ et pour tout réel $r \leq r_0$:*

$$\psi(A_t; r) \leq Cr^l.$$

Démonstration. Le cas $l = n$ est clair puisque les ensembles sont inclus dans la boule.

Si $l < n$, on peut décomposer aussi les A_t en graphes d'applications lipschiziennes après un éventuel changement de coordonnées. Les volumes de ces parties sont alors équivalents à ceux de leurs projections respectives et on est ramené au cas où $l = n$. □

Proposition 5.2.3. *Soit A une famille sous-analytique d'ensembles de dimension $l < n$ de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ et soit K un compact de $\mathbb{R}^m$. Alors pour tout réel r_0 il existe une constante C telle que pour tout t dans K, pour tout $\epsilon \in [0; 1]$ et pour tout réel $r \leq r_0$:*

$$\psi((A_t)_\epsilon; r) \leq Cr^{n-1}\epsilon. \tag{5.5}$$

De plus si A est une famille d'ensembles de dimension n, alors pour tout réel r_0 il existe une constante C telle que pour tout $t \in K$ et pour tout $r \leq r_0$,

$$\psi((A_t)_\epsilon; r) \leq C\,r^{n-1}\epsilon + \psi(A_t; r)$$

Démonstration. Le jacobien de la fonction distance à une partie de $\mathbb{R}^d$ vaut 1 partout où cette fonction est dérivable. De plus la famille $A' = \{(x; t; \alpha) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}/d(x; A_t) = \alpha\}$ est une famille sous-analytique. Donc d'après la proposition précédente il existe une constante C telle que pour tout $(t; \alpha) \in K \times [0; 1]$ on ait : $\psi(A'_{t,\alpha}; r) \leq Cr^{n-1}$. Alors il vient :

$$\begin{aligned}
\psi((A_t)_\epsilon; r) &= \int_{(A_t)_\epsilon \cap B(0;r)} d\mathcal{H}^n \\
&\leq \int_0^\epsilon \psi(A'_{t,\alpha}; r) d\mathcal{H}^1(\alpha) \\
&\leq Cr^{n-1}\epsilon.
\end{aligned}$$

Dans le cas où les A_t sont de dimension n, on pose $B_t = \overline{A_t} \setminus Int(A_t)$. Alors les B_t forment une famille sous-analytique d'ensembles de dimension strictement inférieure à n. Comme $(A_t)_\epsilon \subseteq (B_t)_\epsilon \cup A_t$, le résultat vient de ce qui vient d'être dit. □

Soient A et B deux familles sous-analytiques d'ensembles de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ dont les fibres sont de dimension l. On suppose qu'il existe un réel positif r_0 tel que pour tout compact V de $\mathbb{R}^m$ il existe une constante C telle que :

$$|\psi(A_t; r) - \psi(A_t, r')| \leq Cr^{l-1}|r - r'| \tag{5.6}$$

pour tout $t \in V$ et pour tout couple $(r; r')$ de réels tels que $r' \leq r \leq r_0$. On suppose la même chose pour la famille B. Soit α une fonction définie sur $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$ vérifiant $\alpha(r; t) < r$. Soit $h : A \to B$ une α-approximation de l'identité et soit P un plan de dimension l inclus dans $\mathbb{R}^d$.

Proposition 5.2.4. *Les hypothèses sont celles du paragraphe qui précède.*

Alors pour tout compact V de $\mathbb{R}^m$ il existe une constante C et une partie sous analytique $K^P(r;t) \subseteq P$ telle que $\psi(P \cap B(0;r) \setminus K^P(r;t)) \leq C\alpha(r;t)r^{l-1}$, et telle que $\forall\, x \in K^P(r;t)$, $\forall t \in V$, card $(\pi_P^{-1}(x) \cap A_t \cap B(0;r)) =$ card $(\pi_P^{-1}(x) \cap B_t \cap B(0;r))$.

Démonstration. On fixe un réel r strictement positif. Comme les familles A et B sont sous-analytiques il existe un entier N tel que $\forall\, j \geq N$ $K_j^P(A) = \emptyset, K_j^P(B) = \emptyset$, et $dim(K_\infty^P(A) \cup K_\infty^P(B)) < l$. Soit

$$H(P;j;A_t;r) = adh(K_j^P(A_t \cap B(0;r))) \setminus int((K_j^P(A_t \cap B(0;r))).$$

On pose

$$H(P;A_t;r) = \bigcup_{j \leq N} H(P;j;A_t;r)_{2\alpha(r;t)}.$$

Les $(H(P;A_t;r))_{\substack{t \in V \\ r \leq r_0 \\ P \in G_n^l}}$ forment une famille sous-analytique d'ensembles indexée sur un ensemble compact. D'après la proposition 5.2.3 il existe une constante C telle que pour tout $t \in V$:

$$\psi(H(P;j;A_t;r)_{2\alpha(r;t)};r) \leq C\alpha(r;t)r^{l-1}. \tag{5.7}$$

De plus, d'après l'hypothèse (5.6), il existe une constante C telle que $\psi(A_t \cap B(0;r) \setminus B(0;r - 2\alpha(r;t))) \leq C\alpha(r;t))r^{l-1}$ et $\psi(B_t \cap B(0;r) \setminus B(0;r - 2\alpha(r;t)) \leq C\alpha(r;t))r^{l-1}$ pour tout t dans V. Soient $A'_t(r) = \pi_P(A_t \cap B(0;r) \setminus B(0;r - 2\alpha(r;t)))$ et $B'_t(r) = \pi_P(B_t \cap B(0;r) \setminus B(0;r - 2\alpha(r;t)))$. Bien sûr a fortiori $\widetilde{\psi}(A'_t(r);r) \leq C\alpha(r;t))r^{l-1}$ et $\widetilde{\psi}(B'_t(r);r) \leq C\alpha(r;t)r^{l-1}$. On en déduit en utilisant la proposition 5.2.3 :

$$\psi(A'_t(r)_{3\alpha(r;t)}) \leq C\alpha(r;t)r^{l-1}$$

et,

$$\psi(B'_t(r)_{3\alpha(r;t)}) \leq C\alpha(r;t)r^{l-1}$$

pour une constante C.

Il suffit donc de montrer la propriété suivante : $\forall x \in P \cap B(0;r) \setminus (H(P;A_t;r) \cup H(P;B_t;r) \cup A'_t(r)_{3\alpha(r;t)} \cup B'_t(r)_{3\alpha(r;t)})$.

$$card\ \pi_P^{-1}(x) \cap A_t \cap B(0;r) = card\ \pi_P^{-1}(x) \cap B_t \cap B(0;r). \tag{5.8}$$

Soit $x \in P \cap B(0;r) \setminus (H(P;r;A_t) \cup H(P;r;B_t) \cup A'_t(r)_{3\alpha(r;t)} \cup B'_t(r)_{3\alpha(r;t)})$. Soient $j = card\ \pi_P^{-1}(x) \cap A_t$ et $j' = card\ \pi_P^{-1}(x) \cap B_t$. Par symétrie des roles de j et j' il nous suffit de prouver $j \leq j'$.

On remarque que par définition de $H(P;r;A_t)$ on a $d(x;\partial K_j^P(A_t)) \geq 2\alpha(r;t)$ et $d(x;\partial K_j^P(B_t)) \geq 2\alpha(r;t)$.

Au dessus de $B(x;r-\alpha(r;t))$ A_t (resp. B_t) est donc la réunion de j (resp. j') composantes connexes $A_1, \ldots, A_j$ (resp. $B_1, \ldots, B_{j'}$) et π_P induit un homéomorphisme de A_i (resp. B_i) sur son image. Remarquons d'abord que j est nul si et seulement si j' l'est. En effet, supposons $j = 0$ et $j' \neq 0$. Soit $q \in \pi_P^{-1}(x) \cap B$ alors comme $|h^{-1}(q) - q| \leq \alpha(r;t)$, pour tout point $q \in B(0;r)$, il vient $|\pi_P(h^{-1}(q)) - x| \leq$

$\alpha(r;t)$. Or comme $d(x;\partial K_j^P(A_t)) \geq 2\alpha(r;t)$ ceci implique que le cardinal de la fibre $\pi_P^{-1}(\pi(h^{-1}(q))) \cap A_t$ vaut j qui est nul, ce qui nous donne une contradiction.

Par hypothèse $|h(q) - q| \leq \alpha(r;t)$, pour tout point $q \in B(0;r)$. Soit $y \in B(x;\alpha(r;t))$. Puisque x n'appartient pas à $A'_t(r)_{3\alpha(r;t)}$, la boule de centre x et de rayon $\alpha(r;t)$ ne coupe pas $A'_t(r)_{2\alpha(r;t)}$ et par conséquent si $q \in A_{j_0} \cap \pi_P^{-1}(y)$, q est dans $B(0;r-2\alpha(r;t))$. Alors puisque $|h_t(q) - q| \leq \alpha(r;t)$ on a $h_t(q) \in B(0;r)$. De plus $\pi_P(h(q)) \in B(x;2\alpha(r;t))$ (toujours puisque $|h_t(q) - q| \leq \alpha(r;t)$) et donc $h_t(q)$ appartient à l'un des B_k. Comme A_{j_0} est connexe et les B_k sont disjoints cet entier ne dépend pas du point q dans $A_{j_0} \cap \pi_P^{-1}(B(x;\alpha(r;t)))$. Soit $\sigma(j_0)$ cet entier.

On a ainsi défini une application de $\{1,\ldots,j\}$ dans $\{1,\ldots,j'\}$. Pour démontrer $j' \leq j$ il suffit de voir que σ est surjective.

Soit i un entier compris entre 1 et j'. Soit q le point de $\pi_P^{-1}(x) \cap B_i$ et soit $p = h^{-1}(q)$. Comme $x \notin B'_t(r)$, q appartient à $B(0;r-\alpha(r;t))$ ce qui implique, en utilisant $|h^{-1}(q) - q| \leq \alpha(r;t)$, que le point p appartient à $B(0;r)$.

De plus (également en utilisant $|h^{-1}(q) - q| \leq \alpha(r;t)$) il est clair que $\pi_P(p) \in B(x;r-\alpha(r;t))$. Alors il existe un entier i_0 tel que $p \in A_{i_0}$ ce qui entraine $\sigma(i_0) = i$. Ceci achève la démonstration. □

Remarque 5.2.5. L'hypothèse (5.6) peut être omise à condition d'inverser l'ordre des quantificateurs $\exists r_0 \forall t$ dans la conclusion. C'est à dire qu'alors r_0 peut dépendre de t. En effet comme le montre la proposition suivante cette propriété est toujours valable pour un ensemble sous-analytique si r et r' sont choisis assez petit (cf remarque 5.2.7).

Plus généralement nous allons démontrer que dans le cas où A est stratifié, r_0 peut être borné inférieurement dans tout compact inclus dans une strate satisfaisant la condition (b) de Whitney relativement à toutes les strates qui lui sont incidentes.

Proposition 5.2.6. *Soit A une famille sous-analytique d'ensembles. Soit $\mathcal{S}$ une stratification de Whitney de A dont Y est une strate. Alors pour tout compact V de Y il existe un réel r_0 et une constante C tels que si $r' \leq r \leq r_0$ alors pour tout $t \in V$:*

$$|\psi(A_t;r) - \psi(A_t,r')| \leq C r^{l-1} |r - r'|.$$

Démonstration. On commence par démontrer que le jacobien $\lambda(q)$ de la fonction distance à l'origine restreinte au lieu régulier de A tend vers 1 quand q tend vers zéro. Si ce n'était pas le cas il existerait un arc analytique γ le long duquel λ tendrait vers un réel strictement supérieur à 1. Le jacobien de la fonction distance vaut 1. Le gradient de la fonction distance est dirigé suivant la sécante $\gamma(t)\pi(\gamma(t))$. Comme toutes les strates vérifient la condition b de Whitney il existe une fonction $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tendant vers zéro à l'origine telle que pour tout t dans V et pour tout $x \in X_t$:

$$\delta(\frac{x}{|x|}; T_x X_{x,t}) \leq \phi(|x|)$$

où $X_{x,t}$ est la fibre de la strate qui contient le point $(x;t)$.

Ceci implique que le jacobien de la restriction tend vers 1 uniformément en t sur $X_{|V}$ puisque la projection du gradient sur le tangent tend vers l'identité.

Soit $B = \{(x;t;r) \in \mathbb{R}^n / rx \in A_t\}$. Si r_0 est assez petit la famille $B_{|\{(t;r)/0 \leq r \leq r_0, t \in K\}}$ est une famille sous-analytique d'ensembles de dimension $(l-1)$. Deux points de

$S(0;r)$ ont leur distance majorée par $2r$ et donc pour $r \leq r_0$: $\mathcal{H}^{l-1}(B_{(r;t)}) = \psi(B_{t,r};2r_0) = \frac{r^{l-1}}{\widehat{\psi}(A_t;r)}$. Or la famille $(B_{t,r})_{\substack{t\in K\\ r\leq r_0}}$ est une famille sous-analytique d'ensembles et donc, d'après la proposition 5.2.2, il existe une constante C telle que :

$$\psi(B_{t,r};2r_0) \leq C.2r_0.$$

Ce qui est équivalent à

$$\widehat{\psi}(A_t;r) \leq Cr^{l-1}$$

pour une constante C.

Ainsi pour $r' \leq r$,

$$\begin{aligned} |\psi(A_t;r) - \psi(A_t,r')| &= |\int_{A_t\cap B(0;r)\setminus B(0;r')} d\mathcal{H}^l| \\ &\leq 2|\int_{A\cap B(0;r)\setminus B(0;r')} \lambda(q)d\mathcal{H}^l(q)| \quad (\text{car}\lambda \text{ tend vers } 1) \\ &= 2\int_{r'}^{r} |\widehat{\psi}(A_t;r)d\mathcal{H}^1(s)| \\ &\leq 2Cr^{l-1}\int_{r'}^{r} d\mathcal{H}^1 \\ &\leq 2Cr^{l-1}|r-r'|. \end{aligned}$$

□

Remarque 5.2.7. En particulier si A est un ensemble sous-analytique on peut trouver un réel r_0 tel que $\forall r' \leq r \leq r_0$:

$$|\psi(A;r) - \psi(A;r')| \leq Cr^{l-1}|r-r'|.$$

Ceci vient du fait que les sous-analytiques sont toujours Whitney stratifiables.

Une première conséquence de la proposition 5.2.4 est l'invariance des volumes par approximation de l'identité. En effet la formule de Cauchy-Crofton établit le lien entre les multiplicités et la mesure de A.

On peut donc à partir de l'égalité des multiplicités sur un ensemble de complémentaire négligeable à un certain ordre établir l'égalité des volumes jusqu'à cet ordre. On énonce donc :

Théorème 5.2.8. *Soient A et B deux familles sous-analytiques d'ensembles de dimension l de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ satisfaisant (5.6). Soit $\alpha : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $\alpha(r;t) \leq \frac{r}{3} \quad \forall t \in \mathbb{R}^m$.*

Soit $h : A \to B$ une $\alpha-$approximation de l'identité. Soit V un compact de $\mathbb{R}^m$.

Alors $\exists C$, $\forall t \in V$:

$$|\psi(A_t;r) - \psi(B_t;r)| \leq C\alpha(r;t)r^{l-1}.$$

Démonstration. D'après la proposition précédente $\forall P \in G_n^l, \quad \exists K^P(r;t)$ telle que $\psi(P\cap B(0;r)\setminus K^P(r;t)) \leq C\alpha(r;t)r^{l-1}$ et $\forall\, x \in K^P(r;t),\ \forall t \in V,\ card\ \pi_P^{-1}(x)\cap A_t\cap B(0;r) = card\ \pi_P^{-1}(x)\cap B_t\cap B(0;r)$.

On en déduit que pour tout $j \geq 1$ et pour tout P dans G_n^l.

$$\psi(K_j^P(A_t \cap B(0;r)) \setminus K_j^P(B_t \cap B(0;r)); r) \leq C\alpha(r;t)r^{l-1}$$

et,

$$\psi(K_j^P(B_t \cap B(0;r)) \setminus K_j^P(A_t \cap B(0;r)); r) \leq C\alpha(r;t)r^{l-1}.$$

Alors $|\psi(K_j^P(B_t \cap B(0;r)); r) - \psi(K_j^P(A_t \cap B(0;r)); r)| \leq C\alpha(r;t)r^{l-1}$. Et donc en vertu de la formule de Cauchy-Crofton :

$$\begin{aligned} |\psi(A_t; r) - \psi(B_t; r)| &\lesssim \int_P \sum_{j=1}^N j|\psi(K_j^P(A_t \cap B(0;r)) - \psi(K_j^P(B_t \cap B(0;r))|dP \\ &\lesssim \alpha(r;t)r^{l-1}. \end{aligned}$$

□

On s'intéresse maintenant aux multiplicités. Nous allons voir qu'elles sont invariantes à travers une i_+ approximation de l'identité et donc qu'elles sont constantes le long d'une strate Y fortement w^i régulière (cf proposition 5.2.10).

La proposition qui suit est alors une conséquence de la proposition 5.2.4.

Proposition 5.2.9. *Soient A une famille sous-analytique d'ensembles de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ et V un compact de $\mathbb{R}^m$. Soit $\alpha(r;t)$ une fonction vérifiant $\alpha(r;t) \leq r$. On suppose qu'il existe une trivialisation $h : A_{|V} \to A_0 \times V$ de la famille $A_{|V}$ telle que $|h(q) - q| \leq \alpha(r;t)r^i$, $\forall\, q \in B((0;t);r) \cap A_t$. Alors $\exists\, \epsilon \in \mathbb{R}$, $\forall\, t \in V$ tel que $\alpha(r;t) \leq \epsilon r$ on ait $m(P; A_0; i) \subseteq m(P; A_t; i)$.*

Démonstration. D'après la remarque 5.2.7 tous les A_t vérifient (5.6) pour un $r_0(t)$ assez petit. Les multiplicités des A_t ne dépendent que du germe des A_t. On peut alors remplacer la famille A par une famille constituée par un voisinage de 0 dans chaque A_t vérifiant (5.6). On obtient alors une famille qui vérifie (5.6).

Soit $j \in m(P; A_0; i)$. Alors il existe une constante C telle que $\widetilde{\psi}(K_j^P(A_0 \cap B(0;r)) \geq Cr^i$.

De plus d'après la proposition précédente $\forall\, t \in V$:

$$|\widetilde{\psi}(K_j^P(A_0 \cap B(0;r)); r) - \widetilde{\psi}(K_j^P(A_t \cap B(0;r)); r)| \leq C\alpha(r;t)r^i.$$

Ceci implique bien sûr lorsque $\alpha(r;t) \leq \epsilon$:

$$|\widetilde{\psi}(K_j^P(A_t \cap B(0;r); r) - \widetilde{\psi}(K_j^P(A_0 \cap B(0;r); r)| \leq C\epsilon r^i$$

chaque fois que α est majoré par ϵ. Par conséquent si ϵ est choisi assez petit : $\widetilde{\psi}(K_j^P(A_t \cap B(0;r); r) \geq \frac{C}{2}r^i$. Et donc $j \in m(P; A_t; i)$. □

Une autre conséquence de la proposition 5.2.4 est l'invariance des multiplicités à travers un homéomorphisme qui est une i_+ approximation de l'identité. Plus précisément :

Proposition 5.2.10. *Soient A et B deux ensembles sous-analytiques de $\mathbb{R}^n$. Soit P un plan de $\mathbb{R}^n$ de dimension l tel que la projection sur P restreinte à A et B soit finie. On suppose qu'il existe un homéomorphisme $h : A \to B$ qui soit une $(i_+ + 1)$-approximation de l'identité. Alors $m(P; A; i) = m(P; B; i)$.*

Démonstration. D'après la remarque 5.2.7 A et B vérifient (5.6) pour r suffisament petit. On procède alors de la même manière que dans la proposition précédente.

Soit $j \in m(P; A; i)$. Alors il existe une constante C telle que $\widetilde{\psi}(K_j^P(A \cap B(0; r)) \geq Cr^i$. D'après la proposition 5.2.8 :

$$|\widetilde{\psi}(K_j^P(A \cap B(0; r)); r) - \widetilde{\psi}(K_j^P(B \cap B(0; r)); r)| \ll r^i.$$

Ceci implique bien sur :

$$\widetilde{\psi}(K_j^P(B \cap B(0; r)); r) \geq \frac{C}{2} r^i.$$

Et donc $j \in m(P; B; i)$. En raisonnant sur h^{-1} on démontre l'inclusion réciproque. □

5.2.1 Volumes des fibres d'une famille

Dans cette section on se place dans la même situation que dans la section 4.1 avec l'hypothèse que A est un ensemble sous-analytique.

On se donne donc A, une famille sous-analytique d'ensembles de dimension l contenant Y, localement fermée à l'origine. On suppose que A est stratifié par $\{Y, X_1, \dots, X_N\}$, où tous les couples $(X_j; X_{j'})$ satisfont la condition w de Verdier.

Proposition 5.2.11. *Soit A comme dans le paragraphe qui précède et soit V un compact de Y. Alors pour tout $(t; t')$ dans $V \times V$ et pour tout r inférieur ou égal à un réel r_0 :*

(i) Si tous les couples $(Y; X_j)$ satisfont la condition $w^{i_+ + 1}$,

$$|\widetilde{\psi}(A_t; r) - \widetilde{\psi}(A_{t'}; r)| \ll r^i |t - t'|.$$

(ii) Si tous les couples $(Y; X_j)$ satisfont la condition w^{i+1}, il existe une constante C, telle que

$$|\widetilde{\psi}(A_t; r) - \widetilde{\psi}(A_{t'}; r)| \leq C|t - t'| r^i.$$

Démonstration. Montrons d'abord (i). D'après le théorème 4.1.3 et la remarque 4.1.4, il existe une trivialisation ϕ telle que ϕ_N vérifie :

$$|\phi_N(q; t) - \pi_N(q)| \leq |t| \theta(|q_N|) d(q; Y)^{i+1}$$

où θ est une fonction qui tend vers zéro.

On définit A et B deux familles sous-analytiques d'ensembles de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{2m}$ par $A = \{(x; t; t')/x \in X_t\}$ et $B = \{(x; t; t')/x \in X_{t'}\}$. Soit $\alpha(r; t; t') = \theta(r) r^{i+1} |t - t'|$. Alors on peut construire une $\alpha-$approximation de l'identité en posant $h(x; t; t') =$

$(\phi((x;t);t'-t);t;t')$. Le point (i) découle alors de la proposition 5.2.8. L'hypothèse (5.6) est une conséquence de la condition (w) puisque celle-ci induit la condition (b).

Si $i \in \mathbb{R}$ alors d'après la remarque 4.1.4, h_t vérifie :

$$|\phi_N(q;t) - q| \leq C|t|d(q;Y)^{i+1}.$$

Le point (ii) est donc aussi une conséquence de 5.2.8 avec $\alpha(r;t;t') = C|t-t'|r^{i+1}$. □

Une conséquence immédiate de cette proposition est le corollaire suivant qui permet de comparer les développements log-analytiques des germes des fonctions volume.

Corollaire 5.2.12. *Soit A comme dans ce qui précède. Alors :*

(i) Si tous les couples $(Y;X_j)$ satisfont la condition w avec exposant $i_+ + 1$, le développement log-analytique de $\widetilde{\psi}(A_t;r)$ est constant jusqu'à l'ordre i_+ le long de Y.

(ii) Si tous les couples $(Y;X_j)$ satisfont la condition w avec exposant $i+1$, les termes du développement de $\widetilde{\psi}(A_t;r)$ sont constants jusqu'à l'ordre i et le terme d'ordre i varie de manière lipschitz le long de Y.

En particulier on a :

Corollaire 5.2.13. *(i) Si tous les couples $(Y;X_j)$ satisfont la condition w de Verdier la densité de A_t est lipschitz le long de Y.*

(ii) Si tous les couples $(Y;X_j)$ satisfont la condition w de Verdier forte alors la densité de A_t est constante le long de Y.

Remarque 5.2.14. La proposition 5.2.11 nous donne plus d'informations puisqu'elle permet de comparer les fonctions volume des fibres dans un voisinage de Y et pas simplement les volumes de leur germe.

On donne aussi des propriétés d'équimultiplicité à l'ordre i, quand la condition $w^{i_+ +1}$ est satisfaite, puisque nous venons de voir que celles-ci sont invariantes par i-approximation de l'identité.

Proposition 5.2.15. *Soit A comme dans ce qui précède. Alors :*

(i) Si tous les couples $(Y;X_j)$ satisfont la condition w avec exposant i_+, les mutiplicités des fibres d'ordres inférieurs ou égal à i sont constantes le long de Y.

(ii) Si tous les couples $(Y;X_j)$ satisfont la condition w avec exposant i, les multiplicités des fibres d'ordres strictement inférieurs à i sont constantes et les multiplicités d'ordre i de A_0 sont des multiplicités d'ordre i des fibres suffisament voisines.

Démonstration. On applique le théorème 4.1.3 et la proposition 5.2.10 pour obtenir le point (i). Le point (ii) se démontre de la même manière en appliquant 5.2.9 au lieu de la proposition 5.2.10. □

Une conséquence du corollaire 5.2.13 est la continuité de la densité le long des strates d'une stratification w-régulière. Cependant on peut obtenir un peu mieux puisque nous avons vu que, la condition $r(\ln^\beta)$ était suffisante à obtenir des 1-approximations de l'identité avec des constantes arbitrairement proches de zéro (cf 4.1.10). De plus en dimension 1, pour des strates sous-analytiques, la condition b de Whitney implique la condition $r(\ln^\beta)$. On se place en fait dans le contexte du paragraphe qui précède le théorème 4.1.9.

Théorème 5.2.16. *Soit X un ensemble sous-analytique muni d'une stratification sous-analytique $\mathcal{S}$, satisfaisant la condition $r(\ln^\beta)$ avec $\beta > 1$ et la condition a de Whitney, et soit S une strate. Soit $\pi_S : X \to S$ une rétraction sous-analytique sur S. On note X_t l'ensemble $\pi_S^{-1}(t)$. Alors la densité de X_s est continue le long de S.*

Démonstration. On peut supposer que S est linéaire, modulo une application qui préserve $r(\ln^\beta)$, et que π_S est la projection orthogonale sur S. Alors à l'aide du théorème 4.1.9, on en déduit qu'il existe une trivialisation le long de S telle que $|\pi_S^\perp(h(q;t)) - \pi_S^\perp(q)| \lesssim ln^{1-\beta}t\,.d(q;S)$. Le résultat est alors une conséquence de la proposition 5.2.8 avec $\alpha(r;t) = Cr\,ln^{1-\beta}t$. □

Remarque 5.2.17. Les résultats du début de ce chapitre ont été énoncés dans le cadre des ensembles sous-analytiques. Cependant il est clair que ceux-ci sont également valables sur n'importe quelle structure o-minimale. La démonstration qui précède démontrerait la continuité en o-minimal avec la condition $r(ln^\beta)$ avec β strictement supérieur à 1 en hypothèse. Il est impératif de supposer que β est strictement supérieur à 1. Il existe des stratification log-analytiques satisfaisant $r(ln^1)$ et dont la densité n'est pas continue le long des strates (selon un résultat récent de D. Trotman et L. Wilson). Ceci vient du fait que la condition r n'implique pas la condition r^e comme c'est le cas en sous-analytique.

Corollaire 5.2.18. *Si X est un ensemble sous-analytique décomposé en strates sous-analytiques satisfaisant les conditions de Whitney et si S est une strate de dimension 1 alors la densité des fibres de π_S est continue le long de S.*

Démonstration. En sous-analytique, pour une strate de dimension 1, la condition b implique que le rapport de Kuo tend vers zéro et par l'inégalité de Lojasiewicz ceci implique qu'il décroit plus vite qu'une puissance de la distance à zéro ce qui implique la condition $r(\ln^\beta)$ pour tout β. Le résultat est alors une conséquence du théorème précédent. □

5.2.2 Variation du volume d'un ensemble

Nous avons étudié la variation des volumes des fibres le long des strates d'une stratification sous-analytique. On peut aussi s'intéresser aux variations des volumes de l'ensemble lui même le long des strates. Ce problème a notamment été étudié par Comte dans [Co3] qui a démontré que la condition r de Kuo impliquait la continuité de la densité de X le long des strates. On généralise cela à l'ordre i dans un premier temps puis on démontre le même résultat à l'aide de la condition $r(\ln^\beta)$ pour les ensembles log-analytiques.

On se donne A, une famille sous-analytique d'ensembles contenant Y, localement fermée à l'origine. On suppose que A est stratifié par $\{Y, X_1, \dots, X_N\}$, où tous les couples $(X_j; X_{j'})$ satisfont la condition w de Verdier.

On notera $\psi_t(A; r) = \mathcal{H}^l(A \cap B((0; t); r))$, où $dimA = l$.

Proposition 5.2.19. *Soit A comme dans le paragraphe qui précède. Alors pour tout t dans un voisinage de zéro :*

(i) Si tous les couples $(Y; X_j)$ satisfont la condition $w^{i_+ +1}$,

$$|\widetilde{\psi}_t(A; r) - \widetilde{\psi}_{t'}(A; r)| \ll |t - t'| r^i.$$

(ii) Si tous les couples $(Y; X_j)$ satisfont la condition w^{i+1}, il existe une constante C, telle que

$$|\widetilde{\psi}_t(A; r) - \widetilde{\psi}_{t'}(A; r)| \leq C|t - t'| r^i.$$

Démonstration. Montrons d'abord (i). D'après le théorème 4.1.3, il existe une isotopie ϕ telle que ϕ_t vérifie :

$$|\phi_N(q; t) - q| \leq |t|.\alpha(d(q; Y))d(q; Y)^{i+1}.$$

où α est une fonction qui tend vers zéro en zéro.

On définit A et B deux familles sous-analytiques d'ensembles de $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{2m}$ par $A = \{((x; u); (t; t'))/x \in X_{t'+u}\}$ et $B = \{((x; u); (t; t'))/x \in X_{t+t'}\}$. Soit $\alpha(r; t; t') = \theta(r) r^{i+1}|t - t'|$. Alors on peut construire une $\alpha-$approximation de l'identité entre ces deux familles en posant $h(x; t; t') = (\phi((x; u); t' - t); t; t')$. Le point (i) découle alors de la proposition 5.2.8.

Si $i \in \mathbb{R}$ alors d'après la remarque 4.1.4, h_t vérifie :

$$|h_t(q) - q| \leq C|t| d(q; Y)^{i+1}.$$

Le point (ii) est donc aussi une conséquence de 5.2.8 avec $\alpha(r; t; t') = C|t - t'||x|^i$. □

Une conséquence immédiate de cette proposition est le corollaire suivant qui permet de comparer les développements log-analytiques des germes des fonctions volume.

Corollaire 5.2.20. *Soit A comme dans ce qui précède. Alors :*

(i) Si tous les couples $(Y; X_j)$ satisfont la condition w avec exposant $i_+ + 1$, le développement log-analytique de $\widetilde{\psi}_t(A; r)$ est constant jusqu'à l'ordre i_+ le long de Y.

(ii) Si tous les couples $(Y; X_j)$ satisfont la condition w avec exposant $i + 1$, les termes du développement de $\widetilde{\psi}_t(A; r)$ sont constant jusqu'à l'ordre i et le terme d'ordre i varie de manière lipschitz le long de Y.

En particulier on a :

Corollaire 5.2.21. *(i) Si tous les couples $(Y; X_j)$ satisfont la condition w de Verdier la densité de A est lipschitz le long de Y.*

(ii) *Si tous les couples* $(Y; X_j)$ *satisfont la condition* w *de Verdier forte (i. e.* w^{1+}*) en tout point de* Y *alors la densité de* A *est constante le long de* Y*.*

On donne aussi des propriétés d'équimultiplicité à l'ordre i pour l'ensemble lui-même, quand la condition $w^{i_+ +1}$ est satisfaite, puisque nous venons de voir que celles-ci sont invariantes par i-approximation de l'identité.

Théorème 5.2.22. *Soit* A *comme dans ce qui précède. Alors :*

(i) *Si tous les couples* $(Y; X_j)$ *satisfont la condition* w *avec exposant* i_+*, les mutiplicités en* $(0; t)$ *d'ordres inférieurs ou égal à* i *ne dépendent pas de* t *le long de* Y*.*

(ii) *Si tous les couples* $(Y; X_j)$ *satisfont la condition* w *avec exposant* i*, les multiplicités de* X *en* $(0; t)$ *d'ordres strictement inférieurs à* i *ne dépendent pas de* t *et les multiplicités d'ordre* i *de* X *sont des multiplicités d'ordre* i *des points suffisamment voisins.*

Démonstration. On applique le théorème 4.1.3 et la proposition 5.2.10 pour obtenir le point (i). Le point (ii) se démontre de la même manière en appliquant 5.2.9 au lieu de la proposition 5.2.10. □

On peut également, étant donné un ensemble sous-analytique X, avoir des informations sur la continuité de la densité de l'ensemble X lui-même le long des strates d'une stratification de Whitney. Ce problème à notamment été étudié par G. Comte qui a démontré dans [C] que la densité était continue le long des strates d'une stratification satisfaisant la condition r de Kuo. En fait il s'agit d'un problème plus ancien puisque dans le cas analytique complexe Hironaka a démontré en 1969 [Hi] que la condition b implique la constance de la multiplicité le long des strates d'une stratification de Whitney. Et de même que pour les fibres d'une famille l'équimultiplicité est équivalente à la constance de la densité. En fait il est clair que les isotopies transportent aussi bien les germes des fibres que les germes de l'ensemble X lui-même.

Théorème 5.2.23. *Soit* X *un ensemble sous-analytique muni d'une stratification log-analytique satisfaisant la condition* $r(\ln^{\beta})$ *avec* $\beta > 1$ *et la condition* a *de Whitney. Alors la densité de* X *est continue le long des strates.*

Démonstration. Soit S une strate. On peut supposer que le point est l'origine et que $S = \{0\} \times \mathbb{R}^m$.

Alors à l'aide du théorème 4.1.9, on en déduit qu'il existe une trivialisation le long de S telle que $|\pi_S^{\perp}(h(q;t)) - \pi_S^{\perp}(q)| \lesssim ln^{1-\beta}t\,.d(q;S)$. Le résultat est alors une conséquence de la proposition 5.2.8 avec $\alpha(r;t) = Cr\,ln^{1-\beta}t$.

On pose alors $\widehat{X} = \{((x;t);t') \in X \times \mathbb{R}^m / x \in X_{t+t'}\}$ et $\widetilde{X} = X \times R$. Alors $\widehat{X}$ et $\widetilde{X}$ sont des familles sous-analytiques d'ensembles de $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{2m}$ avec $\theta(\widehat{X}_{t'};0) = \theta(X;(0;t'))$ et bien sur $\theta(\widetilde{X}_{t'};0) = \theta(X;0)$.

De plus on peut définir $h : \widetilde{X} \to \widehat{X}$ par $h(q;t) = (\pi_D^{\perp}(\phi(q;t')); t; t')$. D'après la proposition 5.2.8 ceci implique le résultat. □

Corollaire 5.2.24. *Si X est un ensemble sous-analytique décomposé en strates sous-analytiques satisfaisant les conditions de Whitney et si S est une strate de dimension 1 alors la densité de X est continue le long de S.*

Dans le cas des ensembles analytiques complexes (qui peuvent être vus comme des ensembles sous-anlytiques) ce théorème généralise celui donné par Hironaka. En effet dans [Hi] Hironaka démontre :

Théorème 5.2.25. *(Hironaka) Le long des strates d'une stratification de Whitney d'un ensemble analytique complexe la multiplicité est constante.*

Démonstration. Soient q et q' deux points d'une même strate. Montrons que la multiplicité est la même au point q et au point q'. Soit L le segment $[q;q']$. On définit la stratification $\mathcal{S}'$ constituée des strates de $\mathcal{S}$, exceptée S, de $S \setminus L$ et de L. Alors $\mathcal{S}'$ est lui aussi une stratification de Whitney. Et comme L est de dimension 1 on en déduit que la stratification satisfait la condition $r(\ln^\beta)$ relativament à L pour tout β.D'après le théorème 5.2.23 ceci implique que la densité de X est continue le long de L. D'après le théorème de Draper, dans le cas des ensembles analytiques complexes la multiplicité et la densité sont deux notions qui coincident. La densité est continue et prend des valeurs entières, elle est alors constante. □

L'équimultiplicité était aussi une conséquence de la continuité de la densité des fibres puisque les multiplicités des fibres sont égales à celles de l'ensemble.

Dans le cas sous-analytique on peut avoir (ii) du corollaire 5.2.15 à l'ordre 1 avec la condition b de Whitney puisqu'on peut comme dans le théorème précédent raisonner le long d'un segment et passer de b à $r(\ln^\beta)$ avec $\beta > 1$ et donc avoir des $\alpha-$approximations avec $\alpha(r;t) = rln^{1-\beta}t$. Dans le cas algébrique réel on peut définir la multiplicité modulo 2 pour un plan générique. Il semble possible de démontrer que la condition b implique l'équimultiplicité modulo 2.

5.3 Volumes et (i ;k)-approximation de l'identité

Dans le cas des $(i;k)$-approximations de l'identité on peut obtenir des informations encore plus précises sur la variation du volume. En effet nous allons montrer que les développements sont constants jusqu'à l'ordre $(k+\alpha_0;\beta_0)$ où $(\alpha_0;\beta_0)$ est le premier terme du développement.

Proposition 5.3.1. *Soient X_1 et X_2 deux ensembles inclus dans $\mathbb{R}^d$. On suppose que $\psi(X_1;r) \sim r^a$ et que l'on a :*

$$|\psi(X_1;r) - \psi(X_1;r')| \lesssim r^{a-1} \log^b r \; |r - r'|. \tag{5.9}$$

Soit $h : X_1 \to X_2$ une $(k;k)$ approximation de l'identité où $k \in \mathbb{R} \cup \mathbb{R}_+$ est supérieur ou égal à zéro. Alors pour r suffisament petit :

$$|\psi(X_1;r) - \psi(X_2;r)| \lesssim r^{k+a} \log^b r. \tag{5.10}$$

Démonstration. On fait la démonstration pour $k \in \mathbb{R}$; l'argument est similaire si $k \in \mathbb{R}_+$. Pour q et q' dans $B(0;r)$ on a $\theta(q;q') \leq r$ et par conséquent il existe une constante C telle que :

$$(1 - Cr^k)|q - q'| \leq |h(q) - h(q')| \leq (1 + Cr^k)|q - q'|.$$

Il s'en suit :

$$h(X_1 \cap B(0;(1 - Cr^k)r)) \subseteq h(X_1 \cap B(0;r)) \subseteq h(X_1 \cap B(0;(1 + Cr^k)r)).$$

Et donc :

$$\psi(X_1;(1 - Cr^k)r) \leq \psi(X_2;r) \leq \psi(X_1;(1 + Cr^k)r). \tag{5.11}$$

On remarque ensuite que :

$$|\psi(X_1;r) - \psi(X_1;r \pm Cr^{k+1})| \lesssim r^{k+a} \log^b r,$$

d'après l'inégalité (5.9). Le résultat découle donc de (5.11). □

Comme conséquence de la proposition 5.1.3 et de la proposition 5.3.1 on énonce le résultat suivant :

Proposition 5.3.2. *Soient X_1 et X_2 deux ensembles sous-analytiques. On note $(\alpha_0;\beta_0)$ le premier couple d'exposants du développement de $\psi(X_1;r)$. On suppose qu'il existe une k (resp. k_+) quasi-isométrie $h : X_1 \to X_2$ entre le germe X_1 et celui de X_2. Alors les développements de $\psi(X_1;r)$ et $\psi(X_2;r)$ coincident jusqu'à l'ordre $(\alpha_0 + k;\beta_0)$ (resp. $(\alpha_0 + k;\beta_0)_+$).*

Démonstration. D'après la proposition 5.1.3 $\psi(X_1;r) \sim r^{\alpha_0} \ \ln^{\beta_0} r$. On en déduit que pour $r > 0$ assez petit $\psi'(X_1;r) \sim r^{\alpha_0 - 1} \ \ln^{\beta_0} r$ et par conséquent :

$$|\psi(X_1;r) - \psi(X_1;r')| \lesssim r^{\alpha_0 - 1} \ \ln^{\beta_0} r \,.|r - r'|.$$

Et donc d'après la proposition 5.3.1 on peut en déduire :

$$|\psi(X_1;r) - \psi(X_2;r)| \lesssim r^{k+\alpha_0} \ln^{\beta_0} r,$$

ce qui donne le résultat. □

Chapitre 6

Stabilité lipschitz et rugueuse

Dans ce chapitre on donne un certain nombre de théorèmes de suffisance des jets. On applique les théorèmes du chapitre 3 pour établir des théorèmes de détermination “rugueuse”, lipschitz ou C^1. Dans le cas sous-analytique, ces théorèmes nous donnent bien sûr, via les résultats du chapitre 5, des théorèmes de détermination du volume et des multiplicités. Les théorèmes de détermination sont de trois types : sur la détermination des transversales (étude du germe de l'intersection quand la transversale varie), sur la $SV-$détermination (détermination du lieu des zéros d'une application par ses dérivées), sur la $R-$détermination (étude d'une application modulo la composée d'un homéomorphisme à la source). Chaque section est donc elle-même divisée en trois parties. Les théorèmes de détermination pour l'équivalence à droite ainsi obtenus renforcent ceux donnés par C. T. C. Wall dans [Wa] ou Takens dans [Ta]. On obtient des critères explicitement plus faibles.

On donne ensuite une caractérisation en termes de cloture intégrale de manière analogue à [GTW] pour la condition t. On pourrait améliorer cette caractérisation en procédant comme dans cet article et étendre ces caractérisations à l'ensemble des critères donnés dans ce paragraphe.

Soit k un entier. On appelle $k-$jet d'une application C^j v en zéro l'application polynomiale dont les composantes sont les développements de Taylor à l'ordre k des composantes de v. On le notera $j^k v(0)$.

6.1 Détermination rugueuse à l'ordre i

6.1.1 Détermination rugueuse des transversales

Dans cette section on se donne un espace stratifié $(X; \mathcal{S})$, où $\mathcal{S} = \{Y; X_1, \ldots, X_N\}$. On suppose que les $(X_j; X_{j'})$ sont w-régulier au sens de Verdier. On notera $\mathcal{G}(\mathcal{S})$ la réunion des fibrés tangents aux strates.

Définition 6.1.1. On dira que deux transversales v et u sont $\mathcal{S}$ équivalentes s'il existe une application continue $H : \Gamma_v \times [0; 1] \to \mathbb{R}^d$ telle que :

(i) $H(x; 0) = x \quad \forall x \in \Gamma_v$,

(ii) $H(x; 1) = h(x) \in \Gamma_u$,

(iii) pour tout $t \in [0; 1]$, H_t est un homéomorphisme qui préserve Y et les X_j.

Si pour tout t, H_t est une $i+1$-approximation de l'identité, on dit que H est une $i-\mathcal{S}-$équivalence. Un jet est dit $i-\mathcal{S}$-suffisant dans C^j si toutes les applications u ayant ce jet à l'origine sont $i-\mathcal{S}$ équivalentes.

On donne ici des théorèmes qui généralisent ceux donnés par D. Trotman et L. Wilson dans [T-W].

Proposition 6.1.2. *Soient a et j des réels avec $-j \leq a$.*

(i) Si $(v;\mathcal{G}(\mathcal{S}))$ est t^j alors $z = j^{[j+a]}v(0)$ est $\min(a_+; j+a_+)$-$\mathcal{S}$-suffisant dans $C^{[j+a]}$.

(ii) Si $(v;\mathcal{G}(\mathcal{S}))$ est t^{j-} alors $z = j^{[(j+a)-]}v(0)$ est $\min(a; a+j_+)$-$\mathcal{S}$-suffisant dans $C^{[j+a]}$.

(iii) Si $(v;\mathcal{G}(\mathcal{S}))$ est t^j alors $z = j^{[(j+a)-]}v(0)$ est $\min(a; a+j)$-$\mathcal{S}$-suffisant dans $C^{[j+a]}$.

(iv) Si $(p;\mathcal{G}(\mathcal{S}))$ est t^j pour tout polynome représentatif du $[j]$-jet alors $z = j^{[j+a-1]}v(0)$ est a-$\mathcal{S}$-suffisant dans $C^{[j+a]}$.

Démonstration. Soient u et v deux applications C^{j+a} ayant même $j+a$-jet. Soit $F(x;t) = (x; v(x) + th(x))$, où $h(x) = u(x) - v(x)$. Alors F est une déformation d'ordre $(j+a)_+$ et $F^*0 = v$.

D'après le théorème 3.1.3 $(0; F^*\mathcal{G}(\mathcal{S}))$ est w^{a_+} régulier en tout point de Y'.

D'après le théorème 4.1.3 il existe une isotopie qui est une i-$\mathcal{S}$-équivalence $H : \mathbb{R}^{d'} \to \mathbb{R}^{d'}$ qui préserve les F_*X_b. On pose alors :

$$\begin{array}{rll} \widetilde{H}: & \Gamma_{v+h} & \to \Gamma_v \\ & q & \mapsto \widetilde{H}(q) = \phi_v \circ H_1 \circ \phi_{(-v-h)}(q) \end{array}$$

Il vient :

$$\begin{array}{rcl} |\widetilde{H}(q) - q| & = & |\phi_v(H(\phi_{(-v-h)}(q)) - q| \\ & = & |\phi_v(H(\phi_{(-v-h)}(q)) - \phi_v(\phi_{-v}(q))| \\ & \lesssim & |H(\phi_{(-v-h)}(q)) - \phi_{-v}(q)| \quad \text{car } \ \phi_v \text{ lipschitz} \\ & \lesssim & |H(\phi_{(-v-h)}(q)) - \phi_{-v-h}(q)| + |\phi_{-v-h}(q) - \phi_{-v}(q)| \\ & \lesssim & d(q;Y)^{j+a_+} + d(\phi_{(-v-h)}(q);Y)^{a_+} \quad \text{car } \ j^{[a]}h(0) = 0 \\ & \lesssim & d(q;Y)^{\min(j+a_+;a_+)}. \end{array}$$

Et par conséquent $\widetilde{H_1}$ est une $\min(j+a_+;a_+)$-$\mathcal{S}$-équivalence.

Pour démontrer (ii) et (iii) on procède de la même manière. La seule différence est que la déformation F est d'ordre $j+a$.

Pour démontrer (iv) on procède de la même manière. L'application F est à nouveau d'ordre $j+a$. Il suffit juste de refaire la preuve de (i) à chaque F_t pour en déduire le résultat en tout point de Y. □

Ces théorèmes de i-détermination nous conduisent, via les théorèmes du chapitre 5, à des théorèmes de détermination du volume et de la densité des sections transverses.

Théorème 6.1.3. *On suppose que X est sous-analytique. Soit v une transversale sous-analytique. Si $(v;\mathcal{G}(\mathcal{S}))$ vérifie la condition t^j alors le développement à l'ordre* $\min(a; a+j)$ *de* $\widetilde{\psi}(\Gamma_v \cap X; r)$ *ne dépend que de* $j^{[a+j]}v(0)$.

De plus pour tout plan $P \in G_d^{l'}$, où $l' = dim\ X - m'$, $m(P;\Gamma_v \cap X; \min(a; j+a))$ ne dépend que de $j^{[a+j]}v(0)$.

Démonstration. C'est une conséquence des propositions 5.2.8, 5.2.10 et du théorème précédent. □

Remarque 6.1.4. Comme il est dit dans [T-W] le couple $(v;\mathcal{G}(\mathcal{S}))$ est t^j(resp t^{j-}) si et seulement s'il existe un voisinage du type $\{(x;t)/|v(x)-t| \leq C|x|^j\}$ (resp. du type $\{(x;t)/|v(x)-t| \leq \alpha(x)|x|^j\}$ où α tend vers l'infini à l'origine) tel que pour x dans cet ensemble :

$$\mu(d_x v; T_q X_i) \geq \epsilon d(q;Y)^j \tag{6.1}$$

(resp. $\mu(d_x v; T_x X_i) \gg d(q;Y)^j$) où ϵ est un réel et X_i la strate qui contient le point q.

Nous avons également vu au chapitre 1 que le calcul pouvait se faire indifféremment avec ν ou μ. Le calcul avec ν donne un critère plus explicite car il se fait sur une base au lieu d'avoir à considérer toute la sphère. De plus la fonction ν ne dépend pas (à équivalence près) du choix de la base.

L'inégalité (6.1) nous donne donc un critère explicite de suffisance des jets et de détermination du volume et des multiplicités de la section transverse jusqu'à un ordre donné.

En particulier si X est un ensemble sous-analytique et si v est une fonction sous-analytique à singularité isolée telle que $|\partial_x v| \geq C|x|^{j-1}$ dans un voisinage comme ci-dessus, alors les termes du développement de $\widetilde{\psi}(\Gamma_v \cap X; r)$ jusqu'à l'ordre a sont déterminés par son $j+a$-jet. La densité de l'hypersurface constituée par l'intersection de X avec le graphe de v ne dépend donc que de son j-jet (c'est le cas $a = 0_+$).

Dans le cas où j est négatif le théorème 6.1.2 ne donne pas la $a-\mathcal{S}-$suffisance alors que l'espace obtenu après le pull-back satisfait la condition w avec exposant a.

Le problème vient en fait de h qui ne décroit pas suffisament rapidement. On peut tout de même avoir le résultat suivant.

Soit v une transversale directe et A un plan directement transverse à Y. Soit π_A la projection sur A parallèlement à Y. Alors π_A induit un difféomorphisme de Γ_v sur A. Soit $\mathcal{S}_A^v$ la stratification dont les strates sont données par $\pi_A(X_i \cap \Gamma_v)$ et $\pi_A(\Gamma_v \setminus X)$.

Théorème 6.1.5. *Soit j un réel. On suppose $j \geq -a$.*

(i) On suppose que le couple $(v;\mathcal{G}(\mathcal{S}))$ est t^{j-} régulier. Soit u une application au moins $C^{[j+a]}$ qui a le même $(j+a)_-$-jet que v. Alors il existe un homéomorphisme $h : (N;\mathcal{S}_A^u) \to (N;\mathcal{S}_A^v)$ préservant les strates qui est une a_+-approximation de l'identité.

(ii) On suppose que le couple $(v;\mathcal{G}(\mathcal{S}))$ est t^j régulier. Soit u une application au moins $C^{[j+a]}$ qui a le même $(j+a)_-$-jet que v. Alors il existe un homéomorphisme stratifié $h : (N;\mathcal{S}_A^u) \to (N;\mathcal{S}_A^v)$ qui est une a-approximation de l'identité.

(iii) *On suppose que le couple* $(v; \mathcal{G}(\mathcal{S}))$ *est* t^j *régulier. Soit* u *une application au moins* $C^{[j+a]}$ *qui a le même* $(j+a)$*-jet que* v*. Alors il existe un homéomorphisme* $h : (N; \mathcal{S}_A^u) \to (N; \mathcal{S}_A^v)$ *préservant les strates qui est une* a_+*-approximation de l'identité.*

(iv) *On suppose que pour tout polynôme* p *représentatif de* $j^{[j-1]}v(0)$*,* $(p; \mathcal{G}(\mathcal{S}))$ *satisfait la condition* t^j*. Alors la conclusion de (ii) reste valable pour toute application* u *possédant le même* $[j+a-1]$*-jet.*

Démonstration. Bien sûr dans tous les cas on pose $F(q) = v(x) + t(u(x) - v(x))$ où $q = (x; t)$.

Les F_*X_i sont en fait les ensembles $\{(x; t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n'} / (x; F_t(x)) \in X_i\}$ c'est à dire que $F_*X_i \cap (N \times \{t\}) = \pi^\perp(X_i \cap \Gamma_{F_t})$. Donc $F_*X_i \cap N \times \{0\} = \pi^\perp(X_i \cap \Gamma_v)$ et $F_*X_i \cap N \times \{1\} = \pi^\perp(X_i \cap \Gamma_u)$. On pose $h = (\pi^\perp_{|A})^{-1} \circ H_1 \circ \pi^\perp$ où H_1 est construite comme dans la preuve du théorème 6.1.2. Alors h est une approximation de l'identité au même ordre que H_1, ce qui donne le résultat. $\square$

En conséquence on peut énoncer des théorèmes de stabilité des fonctions volume et des multiplicités des projetés sur A des sections transverses à Y.

Proposition 6.1.6. *On suppose que* X *est un ensemble sous-analytique. Soient* A *un plan transverse à* Y*,* $j \in \mathbb{R} \cup \mathbb{R}_-$*,* $a \in \mathbb{R}$ *et* v *une transversale directe* $C^{[j+a]}$*. Si* $(v; \mathcal{G}(\mathcal{S}))$ *satisfait la condition* t^j *alors le dévéloppement à l'ordre* a *de* $\widetilde{\psi}(\pi_A(X \cap \Gamma_v))$ *est déterminé par le* $[j+a]$*-jet de* v*.*

De plus les multiplicités de $\pi_A(X \cap \Gamma_v; r)$ *d'ordre inférieur ou égal à* a *sont déterminées par le* $j+a$*-jet de* v*.*

Cette proposition a pour corollaire le résultat suivant :

Corollaire 6.1.7. *Soit* B *un plan directement transverse à* Y *en* 0*. Si tous les* $(Y; X_j)$ *satisfont la condition* a *de Whitney alors :*

$$\theta(\pi_A(B \cap X); 0) = \theta(A \cap X; 0).$$

De plus pour tout plan $P \in G_n^l$*,* $m(\pi^\perp(B \cap X)); 1; P)$ *ne dépend pas de* B*.*

Remarque 6.1.8. En particulier $\theta(\pi^\perp(B \cap X); 0) = \theta(N \cap X; 0)$(c'est le cas $A = N$). La densité du projeté sur N ne dépend pas du plan B. En fait B est le graphe d'une application linéaire et induit en tant que tranversale une métrique riemmanienne(constante sur P). L'application $\pi^\perp$ induit une isométrie de B muni de cette norme sur N muni de la norme euclidienne. Il semble que si l'on définisse θ_B comme la densité calculée avec la mesure issue de la métrique induite par B, alors $\theta_B(B \cap X; 0)$ ne dépende pas de B.

Il n'est pas vrai que $\theta(B \cap X; 0)$ soit constante quand B varie.

6.1.2 SV-suffisance des jets

Dans cette section on se donnera une stratification de N, $\mathcal{S} = \{Y, X_1, \ldots, X_s\}$. On suppose que les couples $(X_j; X_{j'})$ satisfont la condition w de Verdier.

Deux germes d'applications C^j, f et g de N à valeurs dans Y sont dites $SV-i-\mathcal{S}$ équivalentes s'il existe une $i+1$-approximation de l'identité sur N entre $f^{-1}(0)$ et $g^{-1}(0)$ dérivable sur les X_j et préservant ceux-ci.

Un jet est dit $i-SV-\mathcal{S}-$suffisant si toutes les applications ayant ce jet à l'origine sont $SV-i-\mathcal{S}$ équivalentes.

Soit $\mathcal{S}_0 = \{Y, X_1 \times \{0\}, \ldots, X_s \times \{0\}\}$.

Le lieu des zéros d'une application est l'intersection du graphe de v avec $N \times \{0\}$. Deux applications $f, g : N \to Y$ sont donc $SV-i-\mathcal{S}$-équivalentes si et seulement si elles sont $i-\mathcal{S}_0-$équivalentes.

Les résultats sont toutefois meilleurs dans ce cas. Plus précisément $\min(a; a+j)$ sera remplacé par a.

La proposition qui suit est donc un corollaire de la proposition 6.1.5 quand $A = N \times \{0\}$, $\pi_{A_{|X}}$ est alors l'identité.

On désignera donc par $\mathcal{G}(\mathcal{S}_0)$ la réunion des fibrés tangents à aux strates de $\mathcal{S}_0$.

Proposition 6.1.9. *Soit a et j des réels avec $-j \leq a$ et a positif.*

(i) Si $(v; \mathcal{G}(\mathcal{S}_0))$ est t^{j-} alors $z = j^{[(j+a)-]}v(0)$ est $SV-a_+$-$\mathcal{S}$-suffisant dans $C^{[j+a]}$.

(ii) Si $(v; \mathcal{G}(\mathcal{S}_0))$ est t^j alors $z = j^{[j+a]}v(0)$ est $SV-a_+$-$\mathcal{S}$-suffisant dans $C^{[j+a]}$.

(iii) Si $(v; \mathcal{G}(\mathcal{S}_0))$ est t^j alors $z = j^{[(j+a)-]}v(0)$ est $SV-a$-$\mathcal{S}$-suffisant dans $C^{[j+a]}$.

(iv) Si $(p; \mathcal{G}(\mathcal{S}_0))$ est t^j pour tout polynôme représentatif du $[j]$-jet alors $z = j^{[j+a-1]}v(0)$ est $SV-a$-$\mathcal{S}$-suffisant dans $C^{[j+a]}$.

On en déduit des critères de détermination finie des volumes et des multiplicités.

Corollaire 6.1.10. *On suppose que X est un ensemble sous-analytique, v est une application sous-analytique. Si $(v; \mathcal{G}(\mathcal{S}))$ est t^j alors le développement à l'ordre a de $\widetilde{\psi}(X \cap v^{-1}(0); r)$ est déterminé par $z = j^{[j+a]}v(0)$.*

De plus, pour tout sous-espace P, les multiplicités de $X \cap v^{-1}(0)$ pour P sont alors déterminées par z jusqu'à l'ordre a.

Remarque 6.1.11. Comme pour la $\mathcal{S}$ équivalence $(v; \mathcal{G}(\mathcal{S}_0))$ est t^j(resp t^{j-}) si et seulement s'il existe un voisinage du type $\{x/|v(x)| \leq C|x|^j\}$ (resp. du type $\{x/|v(x)| \leq \alpha(x)|x|^j\}$ où α tend vers l'infini à l'origine) tel que pour x dans cet ensemble :

$$\mu(d_x v; T_x X_i \times \{0\}) \geq \epsilon |x|^j \tag{6.2}$$

(resp. $\mu(d_x v; T_x X_i) \gg |x|^j$) où ϵ est un réel et X_i la strate qui contient le point x.

L'inégalité 6.2 nous donne donc un critère explicite de suffisance des jets et de détermination du volume et des multiplicités jusqu'à un ordre donné.

En particulier si v est une fonction sous-analytique à singularité isolée telle que $|\partial_x v| \geq C|x|^{j-1}$ dans un voisinage comme ci-dessus, alors les termes du développement de $\widetilde{\psi}(v^{-1}(0); r)$ jusqu'à l'ordre a sont déterminés par son $j+a$-jet. La densité de l'hypersurface constituée par le lieu de ses zéros ne dépend donc que de son j-jet.

6.1.3 $\mathcal{R}$-suffisance rugueuse des jets

On peut aussi obtenir des critères de $\mathcal{R}$-i-suffisance des jets. Dans la section précédente on a donné des théorèmes de détermination du lieu des zéros. Il s'agit là en fait de construire une isotopie pour toutes les lignes de niveau simultanément.

Dans cette section on se donne une stratification de N, $\mathcal{S} = \{Y, X_1, \ldots, X_s\}$. On suppose que les couples $(X_j; X_{j'})$ satisfont la condition w de Verdier.

On dit que deux applications f et g de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ sont $i - \mathcal{S}$-$\mathcal{R}$-équivalentes s'il existe un homéomorphisme h de N dans N qui est une $i+1$-approximation de l'identité, qui est une $\mathcal{S}$-équivalence, telle que $f = g \circ h$. On définit alors $\mathcal{G}_R(\mathcal{S}) = \{(x; t; T_xX_i)/x \in X_i, t \in Y, 1 \leq i \leq N\} \cup (\{0\} \times Y \times \{0\} \times Y)$.

Théorème 6.1.12. *Soit v une fonction C^j au voisinage de l'origine. On suppose $j \geq -a$ et a positif.*

(i) Si $(v; \mathcal{G}_R(\mathcal{S}))$ vérifie la condition t^j alors $z = j^{[j+a]}v$ est $a_+ - \mathcal{S}\ \mathcal{R}-$suffisant dans C^{j+a}.

(ii) Si $(v; \mathcal{G}_R(\mathcal{S}))$ vérifie la condition t^{j_-} alors $z = j^{[(j+a)-]}v$ est $a_+ - \mathcal{S}$-$\mathcal{R}-$suffisant dans C^{j+a}.

(iii) Si $(p; \mathcal{G}_R(\mathcal{S}))$ est t^j, pour tout polynôme p représentatif de $z = j^{[j+a-1]}v$, alors z est a-$\mathcal{S} - \mathcal{R}-$suffisant dans C^{j+a}.

Démonstration. La preuve est la même que pour la SV-suffisance. La seule différence est que l'on applique le théorème 4.1.5 au lieu du théorème 4.1.3. □

L'inégalité (6.2) nous donne aussi un critère explicite de R-équivalence des applications. La condition est donc la même que pour la SV-équivalence à la différence qu'elle porte sur tous les points x et non sur un voisinage d'ordre j de $v^{-1}(0)$.

En effet il est facile de voir que $(v; \mathcal{G}_R(\mathcal{S}))$ vérifie la condition t^j si et seulement si (6.2) s'avère pour toute suite tendant vers zéro.

6.2 Le cas lipschitzien

Nous allons maintenant donner des résultats analogues à ceux du paragraphe précédent dans le cas lipschitzien en utilisant la condition $L(i; j; k)$ au lieu de la condition t^i. Les résultats sont d'abord présentés dans toute leur généralité. On donne ensuite des corollaires avec des hypothèses plus fortes mais donnant des critères de détermination finie beaucoup plus explicites.

6.2.1 Détermination lipschitz de transversales

Dans cette section on se donne une stratification, $\mathcal{S} = \{Y, X_1, \ldots, X_s\}$.

Définition 6.2.1. Pour k négatif on dira que deux transversales v et u sont $L(i; k) - \mathcal{S}$ équivalentes s'il existe une $\mathcal{S}$-équivalence H telle que pour tout t, H_t est une $(i; k)$-quasi-isométrie. On dit alors que H est un $L(i; k) - \mathcal{S}-$équivalence.

Pour k positif on dira que deux transversales v et u sont $L(i;k)-\mathcal{S}$ équivalentes s'il existe une $\mathcal{S}$-équivalence telle que pour tout t, H_t est une $(i;k)$-approximation de l'identité. On dit alors que H est un $L(i;k)-\mathcal{S}$-équivalence.

Un jet est dit $L(i;k)-\mathcal{S}$-suffisant dans C^j si toutes les applications u ayant ce jet à l'origine sont $L(i;k)-\mathcal{S}$ équivalentes.

Nous allons donner un théorème de stabilité du type lipshitzien de l'intersection d'un espace stratifié avec une transversale à celui-ci.

G sera un Y-fibré rugueux au dessus de X, induisant sur chaque strate un sous-fibré du fibré tangent. Pour plus de clarté, on commence par spécifier des cas particuliers des théorèmes de la section 3.2.1 dont nous aurons besoin lors de nos applications. Dans cette section i et k sont des éléments de $\mathbb{R}\cup\mathbb{R}_+$ avec $k\leq i$, et $j\in\mathbb{R}$ vérifie $j\geq -i$.

Proposition 6.2.2. *On suppose que i est inférieur ou égal à -1.*

(i) Si F est une déformation d'ordre j, $(F^*v;G)$ est $L(i;j_-;k)$,$l_{j_-;k}$ et $t_1^{j_-}$-régulier alors $(v;F^*G)$ satisfait la condition $L(i+j;0_-;k+j)$.

(ii) Si F est une déformation d'ordre j_+, $(F^*v;G)$ est $L(i;j;k)$, $l_{j;k}$ et t_1^j-régulier alors $(v;F^*G)$ satisfait la condition $L(i+j_+;0_-;k+j_+)$.

(iii) Si F est une déformation d'ordre j, $(F^*v;G)$ est $L(i;j;k)$, $l_{j;k}$ et t_1^j-régulier alors $(v;F^*G)$ satisfait la condition $L(i+j;0;k+j)$.

On peut grâce à cela démontrer l'analogue du théorème 6.1.2 pour la stabilité lipschitz.

Proposition 6.2.3. *On suppose que i est inférieur ou égal à -1 (et donc k aussi). Alors :*

(i) Si $(v;G)$ est $L(i;j;k)$, $l_{j;k}$ et t_1^j régulier alors $z=j^{[j]}v(0)$ est $L(i+j_+;k+j_+)-\mathcal{S}-$suffisant dans C^j.

(ii) Si $(v;G)$ est $L(i_+;j_-;k_+)$, $l_{j_-;k}$ et $t_1^{j_-}$ régulier alors $z=j^{[j_-]}v(0)$ est $L(i+j;k+j)$ $\mathcal{S}-$suffisant dans C^{j_-}

(iii) Si $(p;G)$ est $L(i;j;k)$, $l_{j;k}$ et t_1^j -régulier, pour tout polynôme représentatif de $z=j^{[j-1]}v(0)$, alors z est $L(i+j;k+j)$ $\mathcal{S}-$suffisant dans C^j.

Démonstration. Soit h une application C^r ayant un $j-$jet nul. Soit $F(x;t)=(x;v(x)+th(x))$. Alors F est une déformation d'ordre j_+. D'après la proposition 6.2.2, $(0;F^*G)$ est $L(i+j_+;0_-;k+j_+)$ régulier. D'après le théorème 4.2.10 il existe une $(i;k)$ quasi-isométrie $H:(N;0)\to(N;0)$ qui envoie les $F_*X_b\cap N_0$ sur les $F_*X_b\cap N_1$. On pose alors

$$\begin{aligned}\widetilde{H}:\ \Gamma_{v+h}\ &\to \Gamma_v\\ q\ &\mapsto \widetilde{H}(q)=\phi_v\circ H\circ\phi_{(-v-h)}(q)\end{aligned}$$

Pour $j+k$ négatif $\widetilde{H}$ est clairement une $(i+j_+;k+j_+)$-quasi isométrie puisque ϕ_v et ϕ_{v+h} sont des applications bilipschitz.

Pour $j+k$ positif, H vérifie (4.12) et (4.13) pour $i+j_+$ et $k+j_+$ respectivement. Et donc $H-Id$ est rugueuse d'exposant $i+j_+$ et lipschitz d'exposant $k+j_+$. En appliquant le théorème 4.2.9 on peut trouver une approximation $\widehat{H}$ de $H-Id$, C^∞ dans le complémentaire de Y qui vérifie $|\widehat{H}+Id-H|\leq\epsilon$ ainsi que :

$$|\widehat{H}(q)|\lesssim d(q;Y)^{i+1+j_+} \tag{6.3}$$

et pour tout couple $(q;q')$ satisfaisant $|q-q'|\leq\frac{1}{2c}d(q;Y)$

$$|\widehat{H}(q)-\widehat{H}(q')|\lesssim d(q;Y)^{k+j_+}|q-q'|.$$

Et donc $\widehat{H}$ est une $(i+j_+;k+j_+)$-approximation de l'application nulle. D'après la remarque 4.2.11 $\widehat{H}$ est C^1, $\widehat{H}$. Ceci implique que $D_q\widehat{H}\lesssim d(q;Y)^{k+j_+}$ pour tout q au voisinage de 0. Soit $H_\epsilon=\phi_v\circ(Id+\widehat{H})\circ\phi_{-v-h}$. $H_\epsilon(q)$ tend vers $\widetilde{H}(q)$ quand ϵ tend vers zéro. Il vient :

$$\begin{aligned}
|H_\epsilon(q)-q| &= |\phi_v(\phi_{-v-h}(q)+\widehat{H}(\phi_{-v-h}(q)))-\phi_v(\phi_{-v}(q))|\\
&\lesssim |\widehat{H}(\phi_{-v-h}(q))-\phi_{-v}(q)+\phi_{-v-h}(q)| \quad \text{car } \phi_v \text{ lipschitz}\\
&\lesssim |\widehat{H}(\phi_{-v-h}(q))|+|\phi_{-v}(q)-\phi_{-v-h}(q)|\\
&\lesssim d(\phi_{-v-h}(q);Y)^{i+j_++1}+|h(q)|\\
&\lesssim d(\phi_{-v-h}(q);Y)^{i+j_++1}+d(q;Y)^{j_+}\\
&\lesssim d(q;Y)^{i+1+j_+} \quad \text{car } i\leq -1.
\end{aligned}$$

Et donc H_ϵ satisfait l'inégalité (4.12). Pour simplifier les notations on pose $q'=\phi_{-v-h}(q)$, $q''=q'+\widehat{H}(q')$. Alors $dH_\epsilon(q)=d\phi_v(q'')\circ(Id+d\widehat{H}(q'))\circ d\phi_{-v-h}(q)$. On remarque que

$$\begin{aligned}
|d\phi_v(q'')-d\phi_v(q')| &\lesssim |q'-q''|\\
&\lesssim |\widehat{H}(q')|\\
&\lesssim d(q';Y)^{i+1+j_+}\\
&\lesssim d(q;Y)^{k+j_+}.
\end{aligned} \tag{6.4}$$

De plus $\phi_v\circ\phi_{-v-h}=\phi_h$ et donc $d\phi_v(q').d\phi_{-v-h}(q)=D\phi_h(q)$. Ceci implique :

$$\begin{aligned}
|d\phi_v(q').d\phi_{-v-h}(q)-Id| &\lesssim d(q;Y)^{j_+-1}\\
&\lesssim d(q;Y)^{j_++k} \quad \text{car } k\leq i\leq -1.
\end{aligned} \tag{6.5}$$

Et donc en réunissant (6.4) et (6.5) il vient :

$$|d\phi_v(q'').d\phi_{-v-h}(q)-Id|\lesssim d(q;Y)^{j_++k}.$$

Et puisque $|d_q\widehat{H}|\leq d(q;Y)^{k+j_+}$ il vient $|dH_\epsilon(q)-Id|\lesssim d(q;Y)^{k+j_+}$ et donc H_ϵ vérifie les inégalités (4.12) et (4.13). On fait tendre ϵ vers 0 et le point (i) est démontré pour H.

Le point (ii) se démontre de la même manière. La seule différence est que la déformation est d'ordre j.

Pour le point (iii) F est encore une déformation d'ordre j. De plus pour tout t et pour tout couple $(x;x')$ tel que $|x-x'| \leq \frac{1}{2c}|x-x'|$ on a :

$$\begin{aligned}
|\partial_x h - \partial_{x'} h| &\lesssim |x-x'|\,|x|^{j-2} \\
&\lesssim \frac{|x-x'|}{|x|}\mu_{1v}(Y;\Lambda_q)_q \qquad \text{car } (v,\mathcal{G}) \text{ vérifie } t_1^j \\
&\lesssim |x-x'||x|^i \mu_{1v}(Y;\Lambda_q)_q \mu_v(Y;\Lambda_q)_q \qquad \text{d'après (2.15)} \\
&\lesssim |x-x'||x|^k \mu_{1v}(Y;\Lambda_q)_q \mu_v(Y;\Lambda_q)_q \quad \text{car } k \leq i \\
&\lesssim |x-x'||x|^k \mu_{F_t}(Y;\Lambda_q)_q \mu_{1,F_t}(Y;\Lambda_q)_q
\end{aligned}$$

car $\mu_{F_t}(Y;\Lambda_q)_q$ et $\mu_{1,F_t}(Y;\Lambda_q)_q$ sont équivalents à $\mu_{1v}(Y;\Lambda_q)_q$ et $\mu_v(Y;\Lambda_q)_q$ respectivement. Et par conséquent :

$$\begin{aligned}
|\partial_x F_t - \partial_{x'} F_t| &\leq |\partial_x v - \partial_{x'} v| + t|\partial_x h - \partial_{x'} h| \\
&\lesssim |x-x'||x|^k \mu_{F_t}(Y;\Lambda_q)\mu_{1,F_t}(Y;\Lambda_q).
\end{aligned}$$

F_t est donc lui aussi $l_{j;k}$ régulier et comme $\mu_{1,F_t}(Y;\Lambda_q)_q \sim \mu_{1v}(Y;\Lambda_q)_q$ il est aussi t_1 régulier. Par conséquent $(0;F_*\mathcal{G})$ est $L(i+j;0;k+j)$ régulier en tout point $t \in [0;1]$ et on termine la démonstration comme pour (i) et (ii). □

On s'intéresse maintenant aux espaces stratifiés qui ne comportent que deux strates. On va donner dans ce cas particulier des critères analytiques qui impliquent la condition $L(i;j;k)$ et donc la suffisance. Soit X une sous-variété de $\mathbb{R}^d$ telle que $X \cup Y$ soit localement fermée. On note $\mathcal{S}$ la stratification formée de la paire $(X \setminus \{0\};Y)$.

Proposition 6.2.4. *Soient i et j deux éléments de $\mathbb{R} \cup \mathbb{R}_-$ tels que $i \leq j$. Soit k un réel positif. On suppose que la condition suivante est vérifiée :*

$$\delta(T_xX;T_{x'}X) \leq C\frac{|x-x'|}{|x|^k}. \tag{6.6}$$

Si $(v;G(\mathcal{S}))$ est t^i et t_1^j alors il est $L(-i;j;-k-i-j)$ régulier.
Si $(v;G(\mathcal{S}))$ est t_1^j alors il est $L(-j;j;-k-2j)$ régulier.
Si $(v;G(\mathcal{S}))$ est t^j alors il est $L(-j;j;-k-3j)$ régulier.

Démonstration. On montre en fait $|P_q^v - P_{q'}^v| \lesssim |q-q'|d(q;Y)^{-k-i-j}\mu_v(Y;\Lambda_q)_q\mu_{1v}(Y;\Lambda_q)_q$. Par définition de la métrique induite par la transversale v, $d\phi_v(q)$ réalise un isomorphisme d'espaces euclidiens de $\mathbb{R}^d$ muni de la métrique $<\,;\,>_{v,q}$ sur $\mathbb{R}^n$ muni de la métrique euclidienne. Alors

$$P_q^v = d\phi_{-v}(\phi_v(q))P_q d\phi_v(q). \tag{6.7}$$

Or d'après la proposition 3.2.3 la condition $l_{j;-i-j}$ est vérifiée. Ceci implique :

$$|d\phi_v(q) - d\phi_v(q')| \lesssim |q-q'|d(q;Y)^{-i-j}\mu_v(Y;\Lambda_q)_q\mu_{1v}(Y;\Lambda_q)_q.$$

Or par hypothèse $|P_q - P_{q'}| \leq \frac{|q-q'|}{|x|^k}$. Avec (6.7) on en déduit :

$$|P_q^v - P_{q'}^v| \lesssim |q-q'|d(q;Y)^{-i-j}\mu_v(Y;\Lambda_q)_q\mu_{1v}(Y;\Lambda_q)_q + \frac{|q-q'|}{|x|^k}.$$

Ce qui implique, puisque les conditions t^i et t_1^j sont vérifiées :

$$|P_q^v - P_{q'}^v| \lesssim |q-q'|d(q;Y)^{-k-i-j}\mu_v(Y;\Lambda_q)_q\mu_{1v}(Y;\Lambda_q)_q.$$

Ceci montre le premier point. Les deux autres en sont des conséquences puisque la condition t_1^j implique la condition t^j et la condition t^j implique la condition t_1^{2j}. □

En fait pour une transversale v on peut avoir un peu mieux que $k \geq 0$. On peut supposer simplement $k \geq -r_0(v)$.

Remarque 6.2.5. On rappelle dans ce contexte que la condition t^i (resp. t^{i-}) est vérifiée pour le couple $(v;\mathcal{G}(\mathcal{S}))$ si et seulement si pour x voisin de zéro :

$$\mu(d_xv;T_xX) \geq \epsilon|x|^{i-1} \tag{6.8}$$

(resp. $\mu(d_xv;T_xX) \gg |x|^{i-1}$).

De même que pour la condition t^i la condition t_1^j (resp. t_1^{j-}) est vérifiée pour le couple $(v;\mathcal{G}(\mathcal{S}))$ si et seulement si pour x voisin de zéro :

$$\mu_1(d_xv;T_xX) \geq \epsilon|x|^{j-1} \tag{6.9}$$

(resp. $\mu_1(d_xv;T_xX) \gg |x|^{j-1}$).

Comme nous l'avons au chapitre 1 le calcul peut se faire indifférement avec ν_1 ou μ_1. Le calcul avec ν_1 donne un critère plus explicite car il se fait sur une base au lieu d'avoir à considérer toute la sphère.

La proposition 6.2.4 nous donne donc des critères analytiques de détermination lipschitz des transversales. En vertu de la proposition 3.2.3 la condition $l_{j;-i-j}$ sera vérifiée. On obtient donc que l'inégalité (6.9) est suffisante à la $k+2i$-détermination des transversales aux ensembles satisfaisant (6.6).

En sous-analytique il est toujours possible de trouver un k qui vérifie cette condition en vertu de l'inégalité de Lojasiewicz. En effet : On pose pour x non nul $\alpha(x) = \sup\limits_{\substack{x'\in X\\ x'\neq x}} \frac{\delta(T_xX;T_{x'}X)}{|x-x'|}$. Le sup est fini en tout point de X puisque X est lisse en dehors de zéro. Il faut montrer qu'il existe un entier k tel que $\alpha(x) \leq \frac{C}{x^k}$. La fonction α est sous-analytique et continue en dehors de l'origine. Il en est donc de même pour la fonction $\frac{|x|}{\max(1;\alpha(x))}$. Et comme cette fonction se prolonge par continuité à l'origine elle est continue au voisinage de zéro. De plus elle ne s'annule qu'en zéro. En vertu de l'inégalité de Lojasiewicz il existe un entier N tel que :

$$|x|^N \leq C\frac{|x|}{\max(1;\alpha(x))}.$$

Or ceci implique :

$$\alpha(x) \lesssim \frac{1}{|x|^{N-1}},$$

ce qui par définition de α nous donne :

$$\delta(T_xX; T_{x'}X) \lesssim \frac{|x - x'|}{|x|^{N-1}}.$$

Ce qui achève la démonstration.

On va donner un résultat analogue pour le cas où i est supérieur ou égal à -1 à l'aide du théorème 3.2.8. L'intérêt est que les résultats sont meilleurs dans ce cas. Ce théorème donne aussi des résultats dans le cas où Y est de dimension 1 car alors on peut omettre la condition $l_{j,k}$.

Le théorème qui suit est donc dans ce cas l'analogue du théorème 6.2.2. C'est un cas particulier des théorèmes 3.2.8 et 3.2.9 réunis que l'on spécifie pour l'appliquer dans la démonstration du théorème 6.2.7 qui établit la détermination dans ce cas.

Théorème 6.2.6. *Soit v une transversale directe. On suppose que i est supérieur ou égal à -1 ou que Y est de dimension 1. Soit $j \in \mathbb{R}$ positif.*

(i) Si F est une déformation d'ordre j, $(F^*v; G)$ est $L(i; j_-; k)$ régulier alors $(v; F^*G)$ satisfait la condition $L(i + j; 0_-; k + j)$.

(ii) Si F est une déformation d'ordre j_+, $(F^*v; G)$ est $L(i; j; k)$ régulier alors $(v; F^*G)$ satisfait la condition $L(i + j_+; 0_-; k + j_+)$.

(iii) Si F est une déformation de ordre j, $(F^*v; G)$ est $L(i; j; k)$ régulier alors $(v; F^*G)$ satisfait la condition $L(i + j; 0; k + j)$.

On se place dans le même contexte que dans celui du paragraphe qui précède le théorème 6.2.3.

Théorème 6.2.7. *Soit v une transversale directe. On suppose que i est supérieur ou égal à -1 ou que Y est de dimension 1. Soit $j \in \mathbb{R}$ positif.*

(i) Si $(v; G)$ est $L(i; j; k)$ et t_1^j régulier alors $z = j^{[j]}v(0)$ est $L(j_+; \min(j_+; j_+ + k)) - \mathcal{S}-$suffisant dans C^j.

(ii) Si $(v; G)$ est $L(i; j_-; k)$ et $t_1^{j_-}$régulier alors $z = j^{[j_-]}v(0)$ est $L(j; \min(j; j + k)) - \mathcal{S}-$suffisant dans C^{j_-}.

(iii) Si $(p; G)$ est $L(i; j; k)$ et t_1^j régulier alors pour tout polynôme représentatif de $z = j^{[j-1]}v(0)$ alors z est $L(j; \min(k + j; j)) - \mathcal{S}$-suffisant dans C^j.

Démonstration. La preuve est la même que celle du théorème 6.2.3. On utilise la proposition 6.2.6 au lieu du théorème 6.2.2. □

Les théorèmes 6.2.3 et 6.2.7 peuvent être renforcés de la manière suivante :

Addendum 6.2.8. L'équivalence H donnée dans les théorèmes 6.2.7 et 6.2.3 pourra vérifier les conditions suivantes :

(i) Si $\mathcal{G}$ est C^{r+1} sur une strate X_i alors $H_{|X_i \cap \Gamma_v}$ est C^r sur cette strate.

(ii) Si X_i est une variété ouverte dans X et si $\mathcal{G}$ est dérivable sur X_i alors H est dérivable sur un voisinage de $X_i \cap \Gamma_v$ dans Γ_v.

(iii) Si la réunion d'une sous-famille $(X_b)_{b\in B_1}$ est ouverte dans $\mathbb{R}^n$ et si $\mathcal{G}$ est dérivable sur cette réunion alors H est dérivable sur l'intersection de cet ensemble avec Γ_v.

Démonstration. C'est une conséquence de l'addendum 4.2.8. □

On peut faire la même critique que celle qui précède le théorème 6.1.5. Le théorème 6.2.7 ne donne pas la suffisance lipschitz d'exposant $k + j_+$ alors que le fibré obtenu dans le pull-back est lipschitzien d'exposant $k + j_+$. Nous allons donner un analogue du théorème 6.1.5 pour la stabilité lipschitz.

Soit v une transversale directe et A un plan directement transverse à Y. Soit π_A la projection sur A parallèlement à Y. π_A induit un difféomorphisme de Γ_v sur A. Soit $\mathcal{S}^v_A$ la stratification dont les strates sont données par $\pi_A(X_i \cap \Gamma_v)$ et $\pi_A(\Gamma_v \setminus X)$.

Théorème 6.2.9. *On suppose que i est supérieur ou égal à -1.*

(i) On suppose que le couple $(v; G)$ est $L(i; j; k)$ régulier. Soit u une application qui a le même j-jet que v. Alors il existe un homéomorphisme stratifié h : $(N; \mathcal{S}^u_A) \to (N; \mathcal{S}^v_A)$ qui est une $(i + j_+; k + j_+)$ approximation de l'identité.

(ii) On suppose que le couple $(v; G)$ est $L(i; j_-; k)$ régulier. Soit u une application qui a le même j_--jet que v. Alors il existe un homéomorphisme stratifié h : $(N; \mathcal{S}^u_A) \to (N; \mathcal{S}^v_A)$ qui est une $(i + j; k + j)$ approximation de l'identité.

(iii) On suppose que pour tout polynôme p représentatif de $j^{[j-1]}v$, $(p; G)$ satisfait la condition $L(i; j; k)$. Alors la conclusion de (ii) reste valable pour toute application u possédant le même $[j - 1]$-jet.

Démonstration. Bien sûr dans tous les cas on pose $F(q) = v(x) + t(u(x) - v(x))$ où $q = (x; t)$. Les F_*X_i qui stratifient la base du fibré F^*G sont en fait les ensembles $\{(x; t) \in X_i/(x; f_t(x)) \in X_i\}$ c'est à dire que $F_*X_i \cap N \times \{t\} = \pi^\perp(X_i \cap \Gamma_{f_t})$. Donc $F_*X_i \cap N \times \{0\} = \pi^\perp(X_i \cap \Gamma_v)$ et $F_*X_i \cap N \times \{1\} = \pi^\perp(X_i \cap \Gamma_u)$. On pose $h = (\pi^\perp_{|A})^{-1} \circ H \circ \pi^\perp$ où H est construite comme dans la preuve du théorème 6.2.3. Alors h est une approximation de l'identité aux mêmes ordres que H ce qui donne le résultat. □

A l'aide de la suffisance des jets on peut ramener l'étude des fonctions différentiable à celle des fonctions polynomiales. Le nombre de type lypschitzien des germes des intersections par une transversale polynomiale de degré borné avec un ensemble sous-analytique est fini. C'est une conséquence d'un théorème du à Parusinski [Pa2] qui établit l'existence des stratifications lipschitz pour les ensembles sous-analytiques globaux. On en déduit donc :

Théorème 6.2.10. *Soit $(X; Y)$ une stratification sous-analytique d'un ensemble fermé satisfaisant la condition t^i. Alors il existe un entier r telle que le nombre de types lipschitzien des germes des intersections à l'origine avec une transversale C^r soit fini.*

Démonstration. On a vu que l'on pouvait toujours trouver un entier k tel que :

$$\delta(T_qX;T_{q'}X) \leq \frac{|q-q'|}{d(q;Y)^k}.$$

Alors toute appliation étant t^i elle est r déterminée dans C^r en vertu de la proposition 6.2.4. Or, tout sous-analytique étant stratifiable au sens de Mostowski, le nombre de type lypschitzien des germes des intersections une transversale polynomiale de degré borné avec un ensemble sous-analytique est fini. □

6.2.2 Lipschitz SV-suffisance des jets

On donne ici des critères de SV-suffisance lipschitz d'application dérivables restreintes à un espace stratifié. Plus généralement on obtient la "$L(i;k)$ équivalence" de tous les représentants d'un jet donné. On généralise ainsi des résultats de Yomdim dans [Y]. On désignera par X une partie de N, $\mathcal{S} = \{\{0\}, X_1, \ldots, X_N\}$ une stratification de X et par G un Y-fibré défini au dessus de X un induisant sur chaque strate un sous-fibré de son fibré tangent. Soit G_0 le Y-fibré défini par $\Lambda_{0q} = \Lambda_q \times \{0_{\mathbb{R}^m}\}$.

Pour k négatif deux germes d'applications C^j, f et g de N à valeurs dans Y sont dites $SV-\mathcal{S}-L(i;k)-$ équivalentes s'il existe un homéomorphisme qui est une $(i;k)-$quasi-isométrie de N sur N, préservant les strates, différentiable sur celles-ci et envoyant $f^{-1}(0)$ sur $g^{-1}(0)$.

Pour k positif, deux germes d'applications C^j, f et g de N à valeurs dans Y sont dites $SV-\mathcal{S}-L(i;k)-$équivalentes s'il existe un homéomorphisme qui est une $(i;k)-$approximation de l'identité de N sur N préservant les strates, différentiable sur celles-ci et envoyant $f^{-1}(0)$ sur $g^{-1}(0)$.

On note $\mathcal{S}_0 = \{Y, X_1 \times \{0\}, \ldots, X_N \times \{0\}\}$ et G_0 le $Y-$fibré défini par $\Lambda_{0q} = \Lambda_q \times \{0\}$.

Alors f et g sont $L(i;k)-SV-$équivalentes si et seulement si f et g sont $L(i;k)-\mathcal{S}_0$-équivalentes.

Proposition 6.2.11. *Soit $\mathcal{G}$ comme précédement. Alors :*

(i) Si $(v;G_0)$ est $L(i;j;k)$ régulier et satisfait les conditions t_1^j et $l_{j,k}$ alors $z = j^{[j]}v(0)$ est $L(i+j_+;k+j_+)$-$SV-\mathcal{S}$ suffisant dans C^j.

(ii) Si $(v;G_0)$ est $L(i;j_-;k)$ régulier et satisfait les conditions $t_1^{j_-}$ et $l_{j_-,k}$ alors $z = j^{[j_-]}v(0)$ est $L(i+j;k+j)$-$SV-\mathcal{S}$ suffisant dans C^j.

(iii) Si $(p;G_0)$ est $L(i;j;k)$ régulier et satisfait les conditions t_1^j et $l_{j,k}$ pour tout polynôme p représentatif de $z = j^{[j-1]}v(0)$, alors z est $L(i+j;k+j)$-$SV-\mathcal{S}$ suffisant dans C^j.

Démonstration. C'est une conséquence immédiate des théorèmes 4.2.10 et 6.2.2. Pour h telle que $j^{[j]}h(0) = 0$ on pose $F(x;t) = v(x) + th(x)$. Alors F est une déformation d'ordre j_+ . Donc d'après le théorème 6.2.6, $(0;F^*G)$ est un fibré vectoriel rugueux d'exposant $i+j_+$ et lipschitzien d'exposant $k+j_+$ au dessus de $F^{-1}(0)$. On applique le théorème 4.2.10 pour avoir le résultat dans chacun des cas. □

Dans le cas des espaces à singularité isolée on obtient un critère analytique explicite à l'aide de la proposition 6.2.4 et de la proposition 3.2.3.

Dans le corollaire suivant $X = N$. On note N_0 la stratification formée de la paire $(N \setminus \{0\}; Y)$.

Théorème 6.2.12. *Si* $(v; N_0)$ *satisfait* t^i *et* t_1^j *alors* $z = j^{[j+i+k-r_0(v)]}v(0)$ *est* $L(k; k)-SV-$*suffisant dans* $C^{j+i+k-r_0(v)}$.

Si $(v; N_0)$ *satisfait la condition* t_1^j *alors* $z = j^{[2j+k-r_0(v)]}v(0)$ *est* $L(k; k) - SV-$*suffisant dans* $C^{2j+k-r_0(v)}$.

Remarque 6.2.13. On peut, dans le cas où Y est de dimension 1, donner une proposition analogue à la proposition 6.2.7. Plus précisément dans le cas où Y est de dimension 1 on peut se passer de l'hypothèse "$(v; \mathcal{G})$ satisfait la condition $l_{j;k}$". Il suffit d'utiliser 6.2.6 au lieu de 6.2.2.

6.2.3 Lipschitz $\mathcal{R}$ suffisance des jets

Pour k négatif on dit que deux applications f et g de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ sont $L(i; k) - \mathcal{S} - \mathcal{R}-$équivalentes s'il existe une $(i; k)$ quasi-isométrie h de N dans N, qui préserve les strates, différentiable sur chaque strate, telle que $f = g \circ h$.

Pour k positif on dit que deux applications f et g de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ sont $L(i; k) - \mathcal{S} - \mathcal{R}$-équivalentes sur $\mathcal{G}$ s'il existe une $(i; k)$ approximation de l'identité h de N dans N, qui préserve les strates, différentiable sur chaque strate, telle que $f = g \circ h$.

Dans ce qui suit G désigne un Y-fibré défini sur X une partie de N, stratifiée par $\mathcal{S} = \{X_1, \ldots, X_b\}$.

On note le fibré G_R qui étend G par $\Lambda_R(q) = \Lambda(\pi^\perp(q)) \times \{0_{\mathbb{R}^m}\}$.

A nouveau le théorème de détermination qui suit est le résultat dans sa généralité. On spécifie ensuite des cas particuliers et on montre en pratique comment se traduisent ces conditions notamment dans les cas où X est un voisinage de zéro ou un ensemble à singularité isolée.

Proposition 6.2.14. *Soit* v *une fonction* C^j.

(i) *Si* $(v; G_R)$ *est* t_1^j, $l_{j,k}$ *et* $L(i; j; k)$ *alors* $z = j^{[j]}v$ *est* $L(i + j_+; k + j_+) - \mathcal{S} - \mathcal{R}-$*suffisant dans* C^j.

(ii) *Si* $(v; G_R)$ *est* $t_1^{j_-}$, $l_{j_-,k}$ *et* $L(i; j_-; k)$ *alors* $z = j^{[j_-]}v$ *est* $L(i + j; k + j) - \mathcal{S} - \mathcal{R}-$*suffisant dans* C^j.

(iii) *Si* $(p; G_R)$ *est* t_1^j, $l_{j,k}$ *et* $L(i; j; k)$, *pour tout polynôme* p *représentatif de* $z = j^{[j-1]}v$, *et si* $(v; \mathcal{G})$ *est* t_1^j, *alors* z *est* $L(i + j; k + j)$ $\mathcal{S} - \mathcal{R}-$ *suffisant dans* C^j.

Ce théorème admet le corollaire suivant :

Corollaire 6.2.15. *Soit* G_R *comme précédemment.*

(i) *Si* $(v; G_R)$ *est* t_1^j *et* $L(i; j; i + j - r_0(v))$ *alors* $z = j^{[j+i-r_0(v)-1]}v(0)$ *est lipschitz* $\mathcal{S} - \mathcal{R}-$*suffisant dans* $C^{j+i-r_0(v)}$.

(ii) *Si* $(v; G_R)$ *est* $L(i; 3i - r_0(v); 3i - r_0(v))$ *alors* $z = j^{[3i-r_0(v)]}v(0)$ *est lipschitz* $\mathcal{S} - \mathcal{R}-$*suffisant dans* $C^{3i-r_0(v)}$.

Démonstration. La première des deux assertions de la conditions $L(i;j;k)$ est la condition t^i. Le corollaire est donc une conséquence du théorème précédent et de la proposition 3.2.3. □

On s'intéresse maintenant aux espaces qui ont une singularité isolée à l'origine. On va donner dans ce cas particulier des critères analytiques qui impliquent la condition $L(i;j;k)$ et donc la suffisance. Soit X un tel espace inclus dans N. On note $\mathcal{S}$ la stratification formée de la paire $(X \setminus \{0\};Y)$

Remarque 6.2.16. On rappelle que la condition t^i (resp. t^{i-} est vérifiée pour le couple $(v;G_R(\mathcal{S}))$ si et seulement si pour x voisin de zéro :

$$\mu(d_xv;T_xX) \geq \epsilon|x|^{i-1} \tag{6.10}$$

(resp. $\mu(d_xv;T_xX) \gg |x|^{i-1}$).

De même que pour la condition t^i, la condition t_1^j(resp. t_1^{j-}) est vérifiée pour le couple $(v;G_R(\mathcal{S}))$ si et seulement si pour x voisin de zéro :

$$\mu_1(d_xv;T_xX) \geq \epsilon|x|^{j-1} \tag{6.11}$$

(resp. $\mu_1(d_xv;T_xX) \gg |x|^{j-1}$).

De même, nous l'avons vu au chapitre 1, le calcul peut se faire indifféremment avec ν_1 ou μ_1.

Proposition 6.2.17. *On suppose que la condition suivante est vérifiée :*

$$\delta(T_xX;T_{x'}X) \leq C\frac{|x-x'|}{|x|^k}. \tag{6.12}$$

Si le couple $(v;G_R(\mathcal{S}))$ est t^i et t_1^j alors il est aussi $L(-i;j;-k-i-j)$ régulier.
Si $(v;G_R(\mathcal{S}))$ est t_1^j alors il est $L(-j;j;-k-2j)$ régulier.
Si $(v;G_R(\mathcal{S}))$ est t^j alors il est $L(-j;j;-k-3j)$ régulier.

Démonstration. La preuve est identique à celle de la proposition 6.2.4. □

Les inégalités (6.10) et (6.11) nous donnent donc des critères expilites de $\mathcal{R}$-suffisance lipschitz sur tous les espaces satisfaisant (6.12).

Dans le cas $X = N$ l'inégalité (6.12) est vraie pour tout k. Les conditions t^j ou t_1^j entrainent donc directement la détermination lipschitz. On aura donc par la condition t^j ou t_1^j un critère direct de suffisance lipchitz des jets.

Théorème 6.2.18. *(i) Si $(v;N)$ satisfait t^i et t_1^j alors $z = j^{[j+i-r_0(v)-1]}v(0)$ est lipschitz–$\mathcal{R}$–suffisant dans $C^{j+i-r_0(v)}$.*

(ii) Si $(v;N)$ satisfait t_1^j alors $z = j^{[2j-r_0(v)-1]}v(0)$ est lipschitz–$\mathcal{R}$–suffisant dans $C^{2j-r_0(v)}$.

6.3 Des théorèmes de détermination C^1

6.3.1 C^1 détermination des transversales

On va maintenant donner des théorèmes de détermination C^1 des sections transverses à un espace stratifié. En fait il s'agit là de résultats analogues à ceux de la section qui précède mais on obtient dans certains cas la dérivabilité de la trivialisation. En effet nous avons vu (cf remarque 4.2.11) que lorsque $k \geq 0_+$ et $\mathcal{G}$ est lisse sur $X \setminus Y$, H_t est un C^1 difféomorphisme.

Ce problème a notament été étudié par Wall [Wa]ou Takens [Ta]. On donne ici un critère de détermination meilleur puiqu'il donne un jet plus court. De plus l'étude s'étend à la SV détermination. Il est intéressant de remarquer que ces théorèmes sont valables sur des espaces à singularité isolée.

On se fixe donc un ensemble X contenant Y tel que $X \setminus Y$ soit une variété C^∞.

Deux transversales à Y u et v sont dites $C^1 - X-$équivalentes s'il existe un difféomorphisme C^1 $h : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ qui préserve X et qui envoie Γ_u sur Γ_v.

On dira que v est $k - C^1 - X-$ déterminé si la classe de $C^1 - X-$équivalence de v est déterminée par le k-jet de v.

On note $\mathcal{S}$ la stratification formée de la paire $(X \setminus Y; Y)$. Pour simplifier on notera $L(k)$ pour désigner la condition $L(k; -k; k)$ quand $k \in \mathbb{R} \cup \mathbb{R}_+$.

Proposition 6.3.1. *(i) Si $(v; \mathcal{S})$ est $L(-k)$, t^k et $l_{k,-k}-$régulier alors v est $[k]$ $C^1 - X-$ déterminée.*

(ii) Si $(v; \mathcal{S})$ est $L(-k_+)$, t^{k_-} et $l_{k_-,-k_+}$-régulier alors v est $[k_-] - C^1 - X-$ déterminée.

Démonstration. C'est un cas particulier de la proposition 6.2.3. La dérivabilité est une conséquence de la remarque 4.2.11. □

De même :

Théorème 6.3.2. *On suppose que i est plus grand que -1 ou que Y est de dimension 1. Soit $k \in \mathbb{R}$ supérieur ou égal à 0.*

(i) Si $(v; \mathcal{S})$ est $L(-k)$ et t_1^k-régulier alors $z = j^{[k]}v$ est C^1 X suffisant dans C^k.

(ii) Si $(v; \mathcal{S})$ est $L(-k_+)$ et $t_1^{k_-}$-régulier alors $z = j^{[k_-]}v(0)$ est C^1 X suffisant dans C^{k_-}.

Démonstration. Là aussi la preuve est la même que celle de la proposition 6.2.7 puisque $\pi^\perp$ réalise un difféomorphisme C^1 de Γ_u sur N pour toute transversale directe u. □

En particulier :

Corollaire 6.3.3. *Si $(Y; X)$ est un couple de strates satisfaisant la condition L de Mostowski, le type C^1 de l'intersection avec une transversale directe à Y à l'origine est unique.*

Corollaire 6.3.4. *On suppose que, pour tout couple* $(q;q')$ *satisfaisant* $|q-q'| \leq \frac{1}{2c}d(q;Y)$, *X vérifie la condition suivante :*

$$\delta(T_qX;T_{q'}X) \leq C\frac{|q-q'|}{d(q;Y)^k}$$

Alors :

Si $(v;\mathcal{G})$ *vérifie* t^i *et* t_1^j *alors* v *est* $k+i+j$*-*C^1*-*X*-déterminé.*

En particulier si $(v;\mathcal{G})$ *vérifie* t_1^j *alors* v *est* $k+2j$*-*C^1*-*X*-déterminée.*

Remarque 6.3.5. L'équivalence C^1 approche l'identité aux mêmes ordres que dans la proposition 6.2.3 puisque la construction est la même. Les propositions 6.3.2 et 6.3.1 donnent juste des critères pour avoir en plus la différentiabilité de l'équivalence.

6.3.2 C^1 SV-détermination

On donne ici des théorèmes de C^1-SV-détermination. Soit X un sous-ensemble de N lisse ou à singularité isolée. La première proposition est le résultat le plus général possible. Les deux théorèmes qui suivent en sont des applications.

Deux germes d'aplications C^j, f et g de N à valeurs dans Y sont dits $SV-X-C^1$ équivalents s'il existe un difféomorphisme C^1 de N sur N qui envoie $f^{-1}(0)\cap X$ sur $g^{-1}(0)\cap X$. On note $\mathcal{S}_0$ la stratification formée de $(X\times\{0\}\setminus 0;Y)$. Alors :

Proposition 6.3.6. *Soit* $\mathcal{S}$ *comme ci-dessus. Alors :*

(i) Si $(v;\mathcal{S})$ *est* $L(k)$ *régulier et satisfait les conditions* t_1^k *et* $l_{k,k}$ *alors* $z=j^{[k]}v(0)$ *est* C^1-SV-X *suffisant dans* C^k*.*

(ii) Si v *est* $L(-k_+)$ *régulier et satisfait les conditions* $t_1^{k_-}$ *et* $l_{k_-,-k_+}$ *alors* $z=j^{[k_-]}v(0)$ *est* C^1-SV-X*-suffisant dans* C^k*.*

Remarque 6.3.7. Là aussi, si Y est de dimension 1 (c'est à dire pour la SV détermination des fonctions), on peut se passer de la condition $l_{k,k}$.

Théorème 6.3.8. *Soit* $\mathcal{S}$ *comme précédemment. On suppose que* X *vérifie la condition suivante :*

$$\delta(T_qX;T_{q'}X) \leq C\frac{|x-x'|}{|x|^k}. \tag{6.13}$$

Alors :

(i) Si $(v;\mathcal{S}_0)$ *est* t^i *et* t_1^j*-régulier alors* $z=j^{[k+i+j]}v(0)$ *est* $SV-C^1$ X *suffisant dans* C^{k+i+j}*.*

(ii) Si $(v;\mathcal{S}_0)$ *est* t_1^j*-régulier alors* $z=j^{[k+2j]}v(0)$ *est* $SV-C^1-X$ *suffisant dans* C^{k+2j}*.*

Les inégalités (6.10) nous donnent donc des critères analytiques de suffisance C^1.

Dans le cas $X=N$ on peut avoir des résultats meilleurs. On note N_0 la stratification formée de la paire $(N\times\{0_{\mathbb{R}^m}\}\setminus\{0_{R^d}\};Y)$. On a alors :

Théorème 6.3.9. *Si* $(v;N_0)$ *satisfait* t^i *et* t_1^j *alors* $z=j^{[j+i-r_0(v)]}v(0)$ *est* C^1 *suffisant dans* $C^{j+i-r_0(v)}$*.*

Si $(v;N_0)$ *satisfait la condition* t_1^j *alors* $z=j^{[2j-r_0(v)]}v(0)$ *est* $SV-C^1$ *suffisant dans* $C^{2j-r_0(v)}$*.*

6.3.3 C^1 $\mathcal{R}$-détermination

On termine par des critères de suffisance C^1 pour la $\mathcal{R}$-équivalence des applications différentiables restreintes à un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ lisse ou à singularité isolée. Soit X un sous-ensemble de N lisse ou à singularité isolée. Deux applications u et v sont dites C^1-X-$\mathcal{R}$-équivalentes s'il existe une application C^1, $h : N \to N$ telle que $u = v \circ h$.

Dans le cas d'un sous-ensemble lisse on peut donner un critère explicite sur les dérivées secondes de v qui assure la détermination C^1.

Soit $\mathcal{G}_R(X) = \{(x; t; T_{(x;0)}X)/t \in Y,\ x \in X \setminus \{0\}\} \cup \{(0; t)/t \in Y\}$.

Pour un germe de d'application $v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ on rappelle que $r_0(v)$ désigne le plus grand des entiers r tel que $|v(x)| \lesssim |x|^r$ au voisinage de l'origine.

Proposition 6.3.10. *Soit X comme dans le paragraphe qui précède.*

(i) Si $(v; \mathcal{G}_R(X))$ est $l_{k,k}$, $L(k)$ et t_1^k régulier, alors $z = j^{[k]}v(0)$ est $C^1 - \mathcal{R} - X$ suffisant dans C^k.

(ii) Si $(v; \mathcal{G}_R(X))$ est l_{k_-,k_+}, $L(k_+)$ régulier et $t_1^{k_-}$ alors $z = j^{[k_-]}v(0)$ est $C^1 - \mathcal{R} - X$ suffisant dans C^k.

Démonstration. C'est un cas particulier de la proposition 6.2.15. La dérivabilité est une conséquence de la remarque 4.2.11. □

En particulier :

Corollaire 6.3.11. *Soit $\mathcal{S}$ comme précédement. On suppose que X vérifie la condition 6.13. Alors :*

(i) Si $(v; \mathcal{G}_R(X))$ est t^i et t_1^j-régulier alors $z = j^{[k+i+j]}v(0)$ est $C^1 - \mathcal{R} - X$ suffisant dans C^{k+i+j}.

(ii) Si $(v; \mathcal{G}_R(X))$ est t_1^j-régulier alors $z = j^{[k+2j]}v(0)$ est $C^1 - \mathcal{R} - X$ suffisant dans C^{k+2j}.

Dans le cas sous-analytique la condition (6.13) peut toujours être obtenue si k est choisi assez grand (cf. remarque 6.2.5). On obtient donc la C^1 détermination finie des applications sur de tels ensembles.

Corollaire 6.3.12. *Soit X sous-analytique à singularité isolée. Soit v une application sous-analytique C^∞ telle que $\mu(d_x v; T_x X) \neq 0 \quad \forall x \neq 0$. Alors v est finiment $C^1 - \mathcal{R} - X$ déterminée.*

Nous allons spécifier la condition dans le cas où $X = N$. Comme le problème est local ceci donnera des théorèmes de détermination sur toutes les variétés C^∞.

Via la proposition 3.2.3, le théorème 6.3.10 admet le corollaire suivant :

Corollaire 6.3.13. *Si $(v; \mathcal{G}_{\mathcal{R}}(N))$ vérifie t^i et t_1^j alors v est $(i + j - r_0(v)) - C^1 - \mathcal{R}$ déterminée.*

Si $(v; \mathcal{G}_{\mathcal{R}}(N))$ vérifie t_1^j alors v est $(2j - r_0(v)) - C^1 - \mathcal{R}$ déterminée.

Remarque 6.3.14. On pourrait avoir dans les propositions qui précèdent $\max(2; r_0(v))$ à la place de $r_0(v)$ (cf remarque 3.2.4).

Ce théorème est à comparer avec celui donné par C. T. C. Wall dans [W] pour la $C^1 - j-$détermination des aplications. En effet le critère donné dans [W] est le suivant :

$$N(d_x v) \geq C|x|^{j-1}.$$

Alors que le critère donné par le corollaire précédent est celui de la condition t_1^j est :

$$\nu_1(d_x v) \geq C|x|^{j-1}$$

. (qui implique la $2j$ détermination. Or nous avons vu que $\nu^{2m}(d_x v) \leq N(d_x v) \leq C\nu_1(d_x v)^2 \nu^{2m-2}(d_x v)$ et nous avons construit des exemples où la première inégalité était en fait une égalité. Le critère obtenu est donc explicitement plus faible.

En fait dès que les gradients des composantes tendent vers zéro à l'origine les déteminants tendront vers zéro beaucoup plus vite que le min définissant μ_1 qui n'en fait intervenir que deux. Remarquons que lorsque m vaut deux μ_1^2 coincide avec N.

Cependant le (i) du corollaire qui précède nous donne un critère qui améliore encore celui de C. T. C. Wall comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 6.3.15. Soit $v : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ définie par $v(x; y; z; t) = (2x^2 - y^2 + 6zt^2 - z^3; xy - 3z^2 t + 2t^3)$.

Quand $x = y = 0$ il n'y a qu'un seul mineur d'ordre 2 qui est non nul. Celui si vaus $\Delta(z; t) = (6t^2 - 3z^2)^2 + 72z^2 t^2$. La meilleure minoration que l'on peut obtenir de cela est $|(z; t)|^4 \lesssim \Delta(z; t)$. L'exposant minimum pour minorer N est donc supérieur ou égal à 8 (N est la somme des carrés des mineurs).

De plus le mineur $\Delta_{1,1}(x; y) = 4x^2 + 2y^2$ est supérieur ou égal à $|(x; y)|^2$. Comme la norme de $|q|$ est toujours équivalente soit à $|(x; y)|$ soit à $|(z; t)|$ on en déduit $|q|^8 \lesssim N(d_q v)$. Le $9-$jet est donc suffisant.

En dimension 2, les fonctions μ_1^2 et N coincident. La condition t_1^5 s'avère donc pour le couple $(v; \mathcal{G}_{\mathcal{R}}(N))$. De plus, et par les mêmes arguments que pour minorer N, on a la condition t^3 pour ce couple. Comme $r_0(v) = 2$ on obtient par le (i) du corollaire qui précède que le $6-$jet est suffisant.

Dans le cas d'une variété lisse la condition t_1^j entraine donc la $2j - r_0(v)-$ détermination. Ceci est dû au fait que la condition t_1^j induit la condition $L(k)$. Cependant dans ce cas, il est possible d'avoir un résultat meilleur à partir de la condition $L(i; j; k)$ localement en tout point (cf section 3.3).

L'intérêt est que cela nous donne des critères de détermination à partir de la matrice Hessienne (propostion 6.3.16) améliorant les critères que nous venons de donner à partir de la matrice jacobienne.

Proposition 6.3.16. *Soit v un germe d'application C^j. On suppose que les conditions suivantes sont vérifiées :*

(i) Il existe un voisinage de l'origine dans N tel que pour x dans ce voisinage :

$$\frac{1}{\mu(d_x v)} \lesssim |x|^{k+1}$$

(ii) Pour tout couple d'entiers $(r;s)$ inférieurs à n :

$$|\frac{\partial^2 v}{\partial x_r \partial x_s}(x)| \lesssim |x|^k \mu(d_x v)\mu_1(d_x v).$$

Alors $(v;\mathcal{G}_R(N))$ vérifie la condition $L(k;0;k)$ localement en tout point de X ainsi que la condition $l_{0,k}$.

Démonstration. Comme nous l'avons déjà dit la première condition équivaut à la condition t^i pour $(v;\mathcal{G}_R(N))$.

D'après le théorème des accroissements finis la condition (ii) implique que tout point x possède un voisinage dans N tel que pour tout couple $(x;x')$ dans ce voisinage et pour tout couple d'entiers $(r;s)$ tels que $0 \leq r \leq n$ et $0 \leq s \leq m$ on ait :

$$|\frac{\partial v_s}{\partial x_r}(x) - \frac{\partial v_s}{\partial x_r}(x')| \lesssim |x-x'|\mu(d_x v)\mu_1(d_x v)|x|^k. \tag{6.14}$$

Ceci montre que la condition $l_{0,k}$ est vérifiée.

De plus il vient :

$$|d\phi_v(q) - d\phi_v(q')| \lesssim |x-x'|\mu(d_x v)\mu_1(d_x v)|x|^k.$$

La suite de la preuve est alors la même que dans la proposition 6.2.4 puisque bien sur $\delta(T_q N; T_{q'} N) \lesssim \mu(d_x v)\mu_1(d_x v)|x|^k|q-q'|$.

□

L'intérêt de cette proposition est de nous donner un critère de détermination à partir de la Hessienne, puisque le théorème suivant établit que la condition $L(k)$ en tout point induit la $\mathcal{R}-$détermination C^1.

Proposition 6.3.17. *Si $(v;\mathcal{G}_R(N))$ vérifie la condition $L(k)$ en tout point alors v est $k-\mathcal{R}-C^1-$déterminée.*

Démonstration. La preuve est identique au cas $L(k)$ régulier. La seule différence est qu'on utilise la proposition 3.3.1 au lieu de la proposition 3.2.5. □

6.4 Détermination et clôture intégrale

Dans [GTW] il est donné un critère en termes de clôture intégrale d'idéaux impliquant la condition t^i pour une application analytique donnée. La proposition précédente nous donne un critère qui peut s'écrire en termes de cloture intégrale d'idéaux puisqu'il s'agit d'une majoration. On obtient donc un résultat analogue pour la détermination C^1. Pour simplifier on présentera seulement le cas des fonctions. On pourra se référer à [GTW] pour les définitions. On note $\mathcal{O}_n$ l'anneau des germes à l'origine des fonctions analytiques et m_n son idéal maximal. Pour $v \in \mathcal{O}_n$ on note Jv l'idéal jacobien de v et Hv l'idéal engendré par les dérivées partielles secondes de v.

Théorème 6.4.1. *Soit v un germe d'application C^j. On suppose que les conditions suivantes sont vérifiées pour tout x dans un voisinage de l'origine dans N :*

(i)
$$m_n^{k-1} \subseteq \overline{Jv}.$$

(ii)
$$m_n^k Hv \subseteq \overline{(Jv)^2}.$$

Alors $(v; \mathcal{G}_R(N))$ vérifie la condition $L(k; 0; k)$ localement en tout point de X ainsi que la condition $l_{0,k}$.

Démonstration. C'est une conséquence directe de la proposition 6.3.16 et de la définition de la clôture intégrale. □

Nous avons vu lors de la section qui précède que la condition $L(k)$ en tout point impliquait la $C^1-\mathcal{R}-$détermination. On obtient donc que les conditions mentionnées dans la proposition qui précède induisent la $C^1-\mathcal{R}-$détermination.

On peut généraliser ces critères aux applications comme dans [G-T-W]. On peut aussi donner un critère en termes de clôture intégrale puisque pour la condition t_1 il suffit de prendre le produit puisque ν_1 est défini après un produit. Enfin, avec la clôture intégrale $\overline{Jv}^+$ définie dans [G-T-W] on peut avoir des caractérisations de $L(k_+)$.

Chapitre 7

Lipschitz stratifications and generic wings

Abstract. In this paper we show that Lipschitz regularity of a subanalytic stratification, as defined by T. Mostowski, is preserved after intersection with generic wings, that is L-regularity implies L^*-regularity. This was one of the conditions required of a good equisingularity notion by Teissier in his foundational 1974 Arcata paper. Previous authors have shown that Lipschitz regularity is generic (**[7], [12], [15]**), implies bilipschitz triviality and hence topological triviality (**[7]**, **[15]**, and implies equimultiplicity (**[1], [2]**).

Throughout, the character C will stand for various constants.

7.1 Definitions and previous results.

Let X be a subanalytic subset of an open subset of $\mathbb{R}^n$. By a *stratification* of X we shall mean a family $\Sigma = \{S^j\}_{j=l}^m$ of closed subanalytic subsets of X defining a filtration :

$$X = S^m \supseteq S^{m-1} \supseteq \cdots \supseteq S^l \neq \emptyset$$

such that each $\overset{\circ}{S^j} = S^j \setminus S^{j-1}$, for $j = l, l+1, \ldots, m$ (where $S^{l-1} = \emptyset$), is a smooth manifold of pure dimension j or empty. We call the connected components of $\overset{\circ}{S^j}$ the *strata* of dimension j of Σ.

We denote by d_j the function on X specifying distance to S^j, so that $d_j(q) = \operatorname{dist}(q, S^j)$.

We begin by giving the definition of Lipschitz stratification due to T. Mostowski **[7]**, who showed the existence of Lipschitz stratifications of general complex analytic sets. A. Parusinski later proved existence for real analytic **[12]**, semi-analytic **[13]**, and finally subanalytic sets **[15]**. As Parusinski points out, the definitions given in these papers differ slightly. The definitions we use here are those of the survey paper **[14]**.

Définition 7.1.1. Let $c > 1$ be a fixed constant. A c-chain of a point $q \in \overset{\circ}{S^j}$ relative to a stratification Σ, is a strictly decreasing sequence of indices

$$j = j_1 > j_2 > \cdots > j_r = l$$

and a sequence of points $\{q_{j_s}\}$ where $q_{j_s} \in \overset{\circ}{S^{j_s}}$ and $q_{j_1} = q$, such that each j_s is the greatest integer ($< j_{s-1}$) for which :

$$d_k(q) \geq 2c^2 d_{j_s}(q) \quad \forall k, \quad l \leq k < j_s$$

$$and \mid q - q_{j_s} \mid \leq c\, d_{j_s}(q).$$

If there is no confusion, we will call the sequence of points $\{q_{j_s}\}$ a c-chain of q, or simply a chain of q. The length of such a chain is r, the number of its elements.

The existence of a chain of a given point is clear. We shall use the following inequalities, due to Parusinski **[12]** :

$$\begin{aligned}
d_{j_{s+1}}(q) &\leq 2^n c^{2n}\, d_{j_s-1}(q), \quad \text{for} \quad 2 \leq s+1 \leq r, && (1)\\
\mid q_{j_s} - q_{j_{s+1}} \mid &\leq 2^{n+1} c^{2\,(n+1)}\, d_{j_s-1}(q), \quad \text{for} \quad 2 \leq s+1 \leq r, && (2)\\
d_{j_s-1}(q) &\leq 2 d_{j_s-1}(q_{j_s}), \qquad \text{for} \quad 2 \leq s. && (3)
\end{aligned}$$

Observe that a tail of a chain is a chain. This means that if $\{q, q_{j_2}, q_{j_3}, \cdots\}$ is a chain, then $\{q_{j_2}, q_{j_3}, \cdots\}$ is a chain, and so on (see Chapter 1 of the first author's thesis **[3]**).

For $q \in \overset{\circ}{S^j}$, we let $P_q : \mathbb{R}^n \to T_q\overset{\circ}{S^j}$ be the orthogonal projection to the tangent space $T_q\overset{\circ}{S^j}$ and let $P_q^{\perp} = I - P_q$ be the orthogonal projection onto the normal space $(T_q\overset{\circ}{S^j})^{\perp}$, following Mostowski **[7]**.

Définition 7.1.2. Let $c > 1$ be a fixed constant. A stratification $\Sigma = \{S^j\}_{j=l}^m$ of X is said to be a Lipschitz stratification (or to verify the L-conditions) if there is some constant $C > 0$ such that for every c-chain $\{q = q_{j_1}, q_{j_2}, \cdots, q_{j_r}\}$ relative to Σ, and each $k,\ 1 \leq k \leq r$,

$$\mid P_{q_{j_1}}^{\perp} P_{q_{j_2}} \cdots P_{q_{j_k}} \mid \leq C\, \frac{\mid q - q_{j_2} \mid}{d_{j_k-1}(q)} \quad (L1),$$

and, for all $q' \in \overset{\circ}{S^{j_1}}$ such that $\mid q - q' \mid \leq \frac{1}{2c}\, d_{j_1-1}(q)$, then :

$$\mid (P_q - P_{q'}) P_{q_{j_2}} \cdots P_{q_{j_k}} \mid \leq C\, \frac{\mid q - q' \mid}{d_{j_k-1}(q)} \quad (L2),$$

where $d_{l-1} \equiv 1$. In particular,

$$\mid P_q - P_{q'} \mid \leq C\, \frac{\mid q - q' \mid}{d_{j_1-1}(q)} \quad (L3).$$

Définition 7.1.3. [19]. We recall that a pair of submanifolds (M, N), with $N \subset \overline{M} - M$, is said to be (w)-regular (or to satisfy the w-condition) at $y_0 \in N$ if there is a real constant $C > 0$ and a neighbourhood U of y_0 such that :

$$\delta(T_yN, T_xM) \leq C \parallel x - y \parallel,$$

for all $y \in U \cap N$ and all $x \in U \cap M$.

Here and below we set $\delta(A, B) = Sup\{\langle \frac{a}{\|a\|}, \frac{b}{\|b\|} \rangle \mid a \in A, b \in B^{\perp}\}$, for linear subspaces A, B of a euclidean vector space.

Proposition 7.1.4. *(***[7], [12]***) Let Σ be a Lipschitz stratification. Then for some $C > 0$ and any $q \in \overset{\circ}{S^j}, q' \in \overset{\circ}{S^k}$ $(k < j)$:*

$$\mid P_q^{\perp} P_{q'} \mid \leq \ C \ \mid q - q' \mid / \ d_{k-1}(q').$$

We deduce easily that the L-conditions for a stratification imply the w-condition for adjacent strata at each point of the set, because $\mid P_q^{\perp} P_{q'} \mid = \delta(T_{q'}\overset{\circ}{S^k}, T_q\overset{\circ}{S^j})$.

Ta Le Loi **[6]** has shown that definable sets for arbitrary o-minimal structures admit stratifications which have the w-condition for all pairs of adjacent strata. Parusinski **[15]** proved that every subanalytic set admits a Lipschitz stratification. He has observed that definable sets in general o-minimal structures may not admit Lipschitz stratifications : if $X(t)$ is the union of the x-axis and the graph of $x^t, x > 0$ in $\mathbb{R}^3 = (x, y, t)$ then the Lipschitz types of $X(t)$ are all different for $t > 1$. It is currently not known if definable sets with respect to an arbitrary polynomially bounded o-minimal structure admit Lipschitz stratifications.

It is not true that the w-condition implies the L-conditions. Here we give a semialgebraic example suggested by S. Koike. Real algebraic examples in $\mathbb{R}^3$ have also been found by the first author after systematic calculation of Lipschitz stratification for the family of surfaces $\{y^a = z^b x^c + x^d\}$, where a, b, c, d are positive integers **[4]**, and comparison with earlier calculations done by the second author **[18]** and by L. Noirel **[10]**. Mostowski **[7]** gave an example in $\mathbb{C}^4$, which works also in $\mathbb{R}^4$: define $X = \{y = z = 0\} \cup \{y = x^3, z = tx\}$: then (w) holds along the t-axis, but (L) fails (see **[3]** for a proof).

Example.
Let $X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y, z) = y^2 + x^3 - x^2z^2 = 0,\ x \leq 0\}$, and let $X = S^2 \supset S^1 = Oz$ define a stratification.
We show first that the stratification is w-regular.

$$\begin{aligned}
\delta(Oz, T_q\overset{\circ}{X}) &= \parallel \langle (0,0,1), \frac{grad_q f}{\parallel grad_q f \parallel} \rangle \parallel \\
&= \frac{\mid \frac{\partial f}{\partial z} \mid}{\parallel \partial_q f \parallel} = \frac{2 \mid zx^2 \mid}{\sqrt{(3x^2 - 2xz^2)^2 + 4y^2 + 4z^2x^4}} \\
&\leq \frac{2zx^2}{\sqrt{4y^2}} \leq \frac{zx^2}{\mid zx \mid} \leq \mid x \mid \leq \sqrt{x^2 + y^2} = \parallel q - \pi(q) \parallel
\end{aligned}$$

where $q = (x, y, z)$ and π is projection on Oz. So the w-condition holds.

Next we prove that the L-conditions are not verified.

Let $j_1 = 2, j_2 = 1$, and let $q = q_2 = (-t^2, \sqrt{2}t^3, t)$, $q' = (-t^2, -\sqrt{2}t^3, t)$, and $q_1 = (0, 0, t)$, for t near 0.
We have :

$$\operatorname{grad} f = (3x^2 - 2xz^2, 2y, -2x^2 z),$$

$$\mid q - q' \mid = 2\sqrt{2}t^3,$$

$$\mid q - q_1 \mid = d_1(q) = t^2\sqrt{1 + 2t^2}.$$

Then there exists $c > 1$ such that $\mid q - q' \mid \leq \frac{1}{2c} d_{j_1 - 1}(q)$, so that $\{q, q_1\}$ is a c-chain.

$$\text{Also} \quad d_{j_2 - 1} = 1, \ \mid P_q - P_{q'} \mid = \mid P_q^{\perp} - P_{q'}^{\perp} \mid,$$

$$\text{and} \quad P_q^{\perp}(v) = \langle v, \frac{grad_q f}{\| grad_q f \|} \rangle \frac{grad_q f}{\| grad_q f \|},$$

for vectors $v \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} \text{Then } \mid (P_{q'} - P_q)P_{q_{j_2}} \mid &= \mid (P_{q'} - P_q)(0,0,1) \mid \\ &= \mid (P_{q'}^{\perp} - P_q^{\perp})(0,0,1) \mid \\ &= \mid \frac{-2x'^2 z' \ grad_{q'} f}{\| grad_{q'} f \|^2} - \frac{-2x^2 z grad_q f}{\| grad_q f \|^2} \mid \\ &= \mid \frac{-2t^5 2\sqrt{2}t^3}{(3t^4 + 2t^4)^2 + 8t^6 + 4t^8 t^2} \mid \\ &= \mid \frac{4\sqrt{2}t^8}{25t^8 + 8t^6 + 4t^{10}} \mid \approx t^2. \end{aligned}$$

Hence $\mid (P_{q'} - P_q)P_{q_{j_2}} \mid \approx t^2$ and $\frac{|q - q'|}{d_{j_2 - 1}(q)} \approx t^3$, so that $(L2)$ fails.

Now we recall the definition of E^*-*regularity* for E an equisingularity condition, as in the article of Orro and Trotman **[11]** (cf.**[5]**, **[9]**). This notion came from the discussion of B. Teissier in his 1974 Arcata lectures **[16]**. Teissier stated that one requirement for an equisingularity condition to be “good" is that it be preserved after intersection with generic linear spaces containing a given linear stratum. In **[5]**, **[8]**, **[9]** and **[17]** various equisingularity conditions were shown to have this property.

The main result of this paper is that the L-conditions also have the property.

Other desirable properties proposed by Teissier in **[16]** were : that the condition be as strong as possible while being generically satisfied (the L-conditions provide the strongest known generic condition, the genericity having been proved by Mostowski **[7]** for complex analytic sets, and by Parusinski for real analytic, then semianalytic and finally subanalytic sets **[12]**,**[13]**,**[15]**), that it should imply local topological triviality along strata (the L-conditions imply local bilipschitz triviality along strata by **[7]** and **[15]**), and should imply equimultiplicity in the complex case (this follows from H. Hironaka's theorem **[2]** for Whitney stratifications - for Lipschitz stratifications one can also obtain equimultiplicity along strata from G. Comte's proof of the continuity of the density along strata of any locally bilipschitz trivial stratification **[1]**). Thus, together with the result proved in this paper, we see that so far the L-conditions do provide a good equisingularity condition. There is though another property discussed by Teissier in **[16]**, called Zariski equisingularity, which has not been studied yet for the L-conditions.

In the remainder of this section we shall use the notations of **[9]** and **[11]**, which differ from the notation used above and in the later sections. In particular X will denote a stratum rather than a stratified set. We hope this does not disturb the reader unduly.

Définition 7.1.5. Let M be a C^2-manifold. Let Y be a C^2-submanifold of M and $y \in Y$. Let X be a C^2-submanifold of M such that $y \in \overline{X}$, and $Y \cap X = \emptyset$. Let E denote an equisingularity condition (examples : Whitney (b), (w), (L)). Then (X,Y) is said to be $E_{cod\,k}$-regular at y $(0 \leq k < cod\,Y)$ if there is an open dense subset U^k of the Grassmannian manifold of codimension k subspaces of T_yM containing T_yY such that if W is a C^2 submanifold of M with $Y \subset W$ near y, and $T_yW \in U^k$, then W is transverse to X near y, and $(X \cap W, Y)$ is E-regular at y.

Définition 7.1.6. (X,Y) is said to be E^*-regular at y if (X,Y) is $E_{cod\,k}$-regular for all k, $0 \leq k < cod\,Y$.

Définition 7.1.7. We call a C^2-submanifold W of $\mathbb{R}^n$ of codimension k, with $Y \subset W$, a wing of codimension k attached to Y.

Remark. In our definition of E^* we state that W is a C^2-manifold. This has not been part of previous definitions **[9]**,**[11]**. It is not enough for our purpose that W be just a C^1-manifold, because L-regularity is not a C^1-invariant, and neither is w-regularity or Kuo's ratio test (r), and below we shall sometimes use particular coordinates.

We now recall some results due to Navarro Aznar and Trotman **[9]** that we shall use in proving that (L) implies $(L)^*$.

Let X be a subanalytic C^2-manifold of $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^s$ such that $Y = 0 \times \mathbb{R}^s \hookrightarrow \overline{X} - X$. Suppose $d = dimX$.

Let $\Gamma^k = \{(x, T_xX, H) | x \in X \cap H\} \subset \mathbb{R}^{m+s} \times G_d^{m+s} \times G_{m-k}^m$, where G_{m-k}^m denotes the space of $(m+s-k)$-planes containing Y. Let $E^k = \overline{\Gamma^k} \cap \{(0, T, H) | T + H \neq \mathbb{R}^{m+s}\}$. This is a compact subset of $0 \times G_d^{m+s} \times G_{m-k}^m$.

Now let U^k be the complement of $\pi_2(E^k)$ in G_{m-k}^m, where $\pi_2 : \{0\} \times G_d^{m+s} \times G_{m-k}^m \to G_{m-k}^m$ is projection onto the last factor. Clearly U^k is open in G_{m-k}^m.

Let $H \in U^k$, let $a(t)$ be an analytic curve in $\mathbb{R}^n$, and let $H(t)$ be an analytic curve in U^k with $a(0) = 0, H(0) = H$, and $a(t) \in H(t) \cap X$ when $t \neq 0$. Then the definition of U^k implies that H is transverse to $lim_{t\to 0} T_{a(t)} X$.

Lemme 7.1.8. [9] *Let W be a wing of codimension k attached to Y such that $T_0 W \in U^k$. If (X,Y) satisfies Kuo's ratio test (r) (resp. (w)) at 0, then $(X \cap W, Y)$ also satisfies (r) (resp. (w)) at 0.*

Théorème 7.1.9. [9] *If (X,Y) satisfies (r) (or (w)) at 0, then the open set U^k is dense in G^m_{m-k}.*

Corollaire 7.1.10. [9] *For subanalytic stratifications, (r) implies (r^*) and (w) implies (w^*).*

To prove that (L) implies (L^*), we need only prove the analogous result to Lemma 1.8 : because (L) implies (w) by Proposition 1.4 then, by Theorem 1.9, U^k is dense whenever (L) holds, and for more than two strata we obtain an open dense set by intersection of the U^k.

Thus to prove that (L) implies (L^*), it is enough to show that when a stratification $\Sigma = \{S^j\}_{j=l}^m$ satisfies the L-conditions at 0 and W is a wing such that $T_0 W$ is transverse to $lim\, T_{q_i} S^j$, with lim $q_i = 0$, then the L-conditions hold for $\Sigma' = \{S^j \cap W\}_{j=l}^m$. This we do in the next section.

We thank the referee for suggestions enabling us to improve the final version of this paper.

7.2 The L-conditions are preserved after intersection with generic wings.

Théorème 7.2.1. *Let F_n be a sequence of vector subspaces of a euclidean vector space V converging to a vector space F. Let W be a vector subspace of V which is transverse to F.Then there is a positive integer m and a constant $C > 0$ such that for any vector subspace $E \subseteq W$:*

$$\delta(E, W \cap F_n) \leq C\,\delta(E, F_n), \quad \forall\, n \geq m.$$

Proof.

$$\delta(E, W \cap F_n) = Sup\{\langle \tfrac{v}{\|v\|}, \tfrac{w}{\|w\|} \rangle \mid v \in E, v \neq 0, w \in (W \cap F_n)^{\perp}, w \neq 0\}$$

$$= Sup\{\langle \frac{v}{\|v\|}, \frac{a+b}{\|a+b\|} \rangle \mid v \in E, v \neq 0, a \in W^{\perp}, b \in {F_n}^{\perp}, a+b \neq 0\}$$
$$= Sup\{\langle \frac{v}{\|v\|}, \frac{b}{\|a+b\|} \rangle \mid v \in E, v \neq 0, a \in W^{\perp}, b \in {F_n}^{\perp}, a+b \neq 0\}$$
$$= Sup\{\frac{\|b\|}{\|a+b\|} \langle \frac{v}{\|v\|}, \frac{b}{\|b\|} \rangle \mid v \in E, v \neq 0, a \in W^{\perp}, b \in {F_n}^{\perp}, b \neq 0, a+b \neq 0\}$$
$$= Sup\{\frac{1}{\| \frac{a}{\|b\|} + \frac{b}{\|b\|} \|} \langle \frac{v}{\|v\|}, \frac{b}{\|b\|} \rangle \mid v \in E, v \neq 0, a \in W^{\perp}, b \in {F_n}^{\perp}, b \neq 0, a+b \neq 0\}$$

and because W is transverse to F, so that $W^{\perp} \cap F^{\perp} = \{0\}$, and F_n converges to F, then for m large enough there exists a constant $C > 0$ such that when $n \geq m$,

$$\begin{aligned} \delta(E, W \cap F_n) &\leq C\, Sup\{\langle \frac{v}{\|v\|}, \frac{b}{\|b\|} \rangle \mid v \in E, v \neq 0, b \in {F_n}^{\perp}, b \neq 0\} \\ &= C\, \delta(E, F_n). \end{aligned}$$

This completes the proof of Theorem 2.1.

Lemme 7.2.2. *Let A, B be vector subspaces of a finite-dimensional euclidean vector space V such that dimension of A = dimension of B. Then $\delta(A, B) = \mid \Pi_A - \Pi_B \mid$, where P_A (resp. P_B) denotes orthogonal projection onto A (resp. B).*

Proof.
Let $v \in V$ with $\mid v \mid = 1$.
Then :

$$\begin{aligned} \mid P_A(v) - P_B(v) \mid^2 &= \mid {P_A}^{\perp}(\, P_A(v) - P_B(v)) \mid^2 + \mid P_A(P_A(v) - P_B(v)) \mid^2 \\ \text{(by Pythagoras)} & \\ &= \mid {P_A}^{\perp}(\, P_B(v)) \mid^2 + \mid P_A\,(\, I - P_B)(v) \mid^2 \\ &= \mid {P_A}^{\perp}(\, P_B(v)) \mid^2 + \mid P_A\,(\, {P_B}^{\perp}(v)) \mid^2 \\ &\leq \delta(B, A)^2 \mid P_B(v) \mid^2 + \delta(A, B)^2 \mid {P_B}^{\perp}(v) \mid^2 \\ &\leq \delta(B, A)^2\, (\mid P_B(v) \mid^2 + \mid {P_B}^{\perp}(v) \mid^2) \\ &\leq \delta(B, A)^2. \qquad (i) \end{aligned}$$

And for $v \in B$, with $\mid v \mid = 1$, we have : $\mid P_A(v) - P_B(v) \mid \leq \mid P_A - P_B \mid$.
But, $\mid P_A(v) - P_B(v) \mid = \mid P_A(v) - v \mid = \mid {P_A}^{\perp}(v) \mid = \delta(B, A)$. So,
$$\delta(B, A) \leq \mid P_A - P_B \mid. \qquad \text{(ii)}$$
By (i) and (ii), we have that $\delta(A, B) = \mid P_A - P_B \mid$.

The following proposition is the key to our main result.

Proposition 7.2.3. *Let $X \supset Y$ be a subanalytic stratification such that the pair of strata $(X - Y, Y)$ satisfies the frontier condition at 0 and let W be a generic wing such that $T_0 W \in U^k$. Then there is a constant $C > 1$ and a neighbourhood $B(0, \epsilon)$ of 0 such that*

$$d(q, X \cap W) \leq \; C d(q, X), \quad \forall q \in B(0, \epsilon) \cap W.$$

Proof.

If the above conclusion fails, there exist $\epsilon > 0$ and a sequence $q_i \in B = B(0, \epsilon) \cap W$ such that $\lim q_i = 0$ and $d(q_i, X) = \circ(d(q_i, X \cap W))$.
For every i, define :
${q_i}' \in X$ such that $d(q_i, {q_i}') = d(q_i, X)$

Let B_i be the closed disk centred at q_i of radius $\frac{1}{2}\, d(q_i, X \cap W)$, passing to a subsequence if necessary so that B_1, B_2, ... are disjoint .

Now for t $\in$ [0,1] , we define a mapping $\varphi_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ by :

$$\varphi_t(q) = q + \sum_i t\, \alpha_i(q)\, ({q_i}' - q_i)$$

where α_i is a C^1 function $\alpha_i : \mathbb{R}^n \to [0, 1)$ such that :

$$\alpha_i(x) = 1, \quad \text{if} \quad x \in K_i \subset \overset{\circ}{B}_i, \text{ with } K_i \text{ compact, } q_i \in K_i,$$

$$\alpha_i(x) = 0, \quad \text{if} \quad x \in \mathbb{R}^n - \overset{\circ}{B}_i,$$

and there exists $M > 0$ such that $\mid D\alpha_i \mid \leq \frac{M}{d\,(q_i, X \cap W)}$, $\forall i$.

We see that φ_t is a C^1-diffeomorphism, $\varphi_t(0) = 0$, and $D\varphi_t(0) = Id$.

For every i, we have $\varphi_0(B_i \cap W) \cap X = B_i \cap W \cap X = \emptyset$, because $B_i = \overline{B(q_i, \frac{1}{2}\, d(q_i, X \cap W))}$ and ${q_i}' \in \varphi_1(B_i \cap W) \cap X$.
So, for every i, there exists t_i, $0 < t_i < 1$ such that $\varphi_{t_i}(B_i \cap W)$ is not transverse to X at x_i, where $x_i \in X$.
The sequence x_i converges to 0. Suppose y_i is a point such that $\varphi_{t_i}(y_i) = x_i$, so that $T_{x_i}\varphi_{t_i}(B_i \cap W) = D_{y_i}\varphi_t(T_{y_i} W) = W_i$.
Let $\lim T_{x_i} X = \tau$. Then τ is not transverse to $T_0 W$.

Now we want to prove that $d(x_i, W) = \circ\,(d(x_i, Y))$.

First, we compute :

$$\begin{aligned} d(x_i, y_i) &\leq \mid t\, \alpha_i(y_i) \mid \mid {q_i}' - q_i \mid \\ &\leq C\, d(q_i, X) \\ &= \circ\,(d(q_i, X \cap W)). \end{aligned}$$

But, as $y_i \in B_i$, we have $d(q_i, y_i) \leq \frac{1}{2}\, d(q_i, X \cap W)$.
So $d(q_i, X \cap W) \leq\; 2\, d(y_i, X \cap W)$, and hence

$$d(x_i, y_i) = \; \circ\,(d(y_i, X \cap W))$$

which implies $d(x_i, y_i) = \circ(d(x_i, X \cap W))$.
Since $y_i \in W$, and $Y \subseteq X \cap W$ by the frontier condition, this proves the claim.

From this fact, we can deduce that $l = lim \frac{x_i\, \pi(x_i)}{|x_i\, \pi(x_i)|} \in T_0W$.

Now, we define :

$$\begin{aligned} \zeta\ : X &\longrightarrow X \times \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R}) \times G_m^n \\ x &\longrightarrow (x,\ \frac{x\,\pi(x)}{\mid x\,\pi(x) \mid},\ T_xX). \end{aligned}$$

Then $\zeta(X)$ is subanalytic and $(0, l, \tau) \in \overline{\zeta(X)}$.
By the curve selection lemma, we can find an analytic curve $a(t)$, such that $a(t) \in X, \forall t$ and $\zeta(a(t))$ converges to $(0, l, \tau)$.

Now let
$$H(t) = l(t) \oplus Y \oplus (\ (l(t) \oplus Y)^{\perp} \cap T_0W\ ),$$
where $l(t) = \frac{a(t)\ \pi(a(t))}{\mid a(t)\ \pi(a(t)) \mid}$.

Then $H(0) = T_0W$, $H(t) \in U^k$, and $a(t) \in H(t) \cap X$ for all t.
This contradicts the hypothesis that $T_0W \in U^k$, and completes the proof of the proposition.
Since W is of class C^2, and the L-conditions are invariant by C^2-diffeomorphism, it is enough to check that the L-conditions hold for linear spaces W. So from now on we will assume that W is a linear subspace of $\mathbb{R}^n$.

From now on, if we write that (X, Y, Z) is a Lipschitz stratification, we mean a filtration $X \supset Y \supset Z$.

Proposition 7.2.4. *Let (X, Y, Z) satisfy the L-conditions at 0 and let $W \in U^k$, where $U^k = U^k(X, Z) \cap U^k(Y, Z)$. Fix $\epsilon > 0$ and $C > 1$ as in Proposition 2.3. Then there is a constant $c_1 > C$ such that for every $q \in B(0, \epsilon) \cap W$, we can find $c_2 > c_1$ and a c_1-chain of q relative to the stratification $(X \cap W, Y \cap W, Z)$ which is also a c_2-chain of q relative to the stratification (X, Y, Z).*

Proof.
Let (X, Y, Z) satisfy the L-conditions at 0, and let $W \in U^k$, which is nonempty by Theorem 1.9.
By Proposition 2.3, we have $C > 1$ and a neighbourhood $B(0, \epsilon)$ such that $d(q, Y \cap W) \leq Cd(q, Y), \forall q \in B(0, \epsilon) \cap W$.
Take $c_1 > C$.
Let $q \in \overset{\circ}{Y} \cap W$. It is clear that we have a c_1-chain of q relative to the stratification $(X \cap W, Y \cap W, Z)$ which is also a c_1-chain of q relative to the stratification (X, Y, Z).

Let $q \in B(0,\epsilon) \cap \overset{\circ}{X} \cap W$.

If $d(q,Z) \geq 2{c_1}^2\, d(q, Y \cap W)$, then we can find $q_{j_2} \in \overset{\circ}{Y} \cap W$, and $q_{j_3} \in \overset{\circ}{Z} \cap W = Z$ (this is possible because $\frac{c_1}{C} > 1$) so that :

$$\mid q - q_{j_2} \mid \leq \frac{c_1}{C}\, d(q, Y \cap W) < \; c_1\, d(q, Y \cap W),$$

$$\text{and} \mid q - q_{j_3} \mid \leq \frac{c_1}{C}\, d(q, Z) < \; c_1\, d(q, Z).$$

Then (q, q_{j_2}, q_{j_3}) is a c_1-chain of q relative to the stratification $(X \cap W, Y \cap W, Z)$.

By Proposition 2.3, we have that $d(q,Z) \geq 2{c_1}^2\, d(q,Y)$ and also

$$\mid q - q_{j_2} \mid \leq \; c_1\, d(q, Y),$$

$$\mid q - q_{j_3} \mid \leq \; c_1\, d(q, Z).$$

So (q, q_{j_2}, q_{j_3}) is a c_2-chain of q relative to the stratification (X, Y, Z), with $c_2 = c_1$.

If $d(q,Z) < 2{c_1}^2\, d(q, Y \cap W)$, then we can find $q_{j_2} \in Z$ such that :

$$\mid q - q_{j_2} \mid \leq \; c_1\, d(q, Z).$$

And so (q, q_{j_2}) is a c_1-chain of q relative to the stratification $(X \cap W, Y \cap W, Z)$.

Again by Proposition 2.3, we have $d(q,Z) \geq 2{c_1}^2 C\, d(q,Y)$ and

$$\mid q - q_{j_2} \mid \leq \; c_1 \sqrt{C}\, d(q, Z).$$

So (q, q_{j_2}) is a c_2-chain of q relative to the stratification (X, Y, Z), with $c_2 = c_1\sqrt{C}$.

We have thus proved that for every q near 0, a chain of q relative to the stratification $(X \cap W, Y \cap W, Z)$ is also a chain of q relative to the stratification (X, Y, Z). For more than three strata, the argument is similar.

We did not use the$L$-conditions explicitly in the proof of Proposition 2.4. It is enough that the frontier condition holds and that U^k is nonempty, both of which follow from w-regularity (itself a consequence of the L-conditions).

Remark. To check that the L-conditions hold, it is enough to check $L1, L2, L3$ for one c-chain of each point q (c independent of q). This can be easily seen. To extend Lipschitz vector fields we only need the L-conditions for one c-chain of each point q, while the extension property of Lipschitz vector fields is equivalent to the L-conditions **[15]**.

Let X be a compact subanalytic subset of $\mathbb{R}^n$, and let $\Sigma = \{S^j\}_{j=l}^m$ be a Lipschitz stratification of X, i.e. satisfying the L-conditions, with a filtration :

$$X = S^m \supset S^{m-1} \supset \cdots \supset S^l = Y \neq \emptyset.$$

We may suppose Y is linear. By Proposition 1.4, for every pair $(\overset{\circ}{S^i}, Y)$ the w-condition holds, and by Theorem 1.9, for every i and each point y of Y, we have an open dense set U_i^k consisting of linear wings W of codimension k containing Y. We obtain an open dense set $U^k = U^k(X, Y, y)$ by taking the finite intersection of all the U_i^k.

Now we show by induction that the L-conditions are preserved after intersection with the (generic) linear wings belonging to this U^k.

For one stratum it is clear that the L-conditions are preserved after intersection with generic linear wings.

We suppose that this is true for stratifications of depth n, i.e. if $\Sigma = \{S^j\}_{j=l}^{l+n-1}$ defines a Lipschitz stratification of X,

$$X = S^{l+n-1} \supset S^{l+n-2} \supset \cdots \supset S^l = Y \neq \emptyset,$$

and if W is a generic linear wing containing Y, then $\Sigma' = \{S^j \cap W\}_{j=l}^{l+n-1}$ defining the filtration

$$X \cap W = \{S^{l+n-1} \cap W\} \supset \{S^{l+n-2} \cap W\} \supset \cdots \supset \{S^l \cap W\} = S^l = Y$$

is also a Lipschitz stratification.

We have to verify the L^*-conditions for stratifications of depth $(n+1)$.

Théorème 7.2.5. *Let $\Sigma = \{S^j\}_{j=l}^{l+n}$ be a filtration defining a stratification satisfying the L-conditions at 0 and let $W \in U^k$. Let $c_1 > 1$ be as in Proposition 2.4. Then there is a constant $C > 0$ such that the following conditions $(L1^*)$ are satisfied for every c_1-chain of a point q near 0 in $(\overset{\circ}{S^{l+n}}) \cap W$:*

$$\mid \widetilde{P}_q^{\perp} \widetilde{P}_{q_{j_2}} \ \cdots \ \widetilde{P}_{q_{j_k}} \mid \leq \ C \, \frac{\mid q - q_{j_2} \mid}{d(q, S^{j_k - 1} \cap W)} \quad \forall\, k, \quad 1 \leq k \leq m$$

where m is the length of the chain.

Proof.
Let $\{q, q_{j_2}, \ \cdots \ , q_{j_m}\}$ be a chain of $q \in (\overset{\circ}{S^{l+n}}) \cap W$, relative to the stratification defined by the filtration $\Sigma' = \{S^j \cap W\}_{j=l}^{l+n}$.
Then for $1 \leq k \leq m$, there are constants $C > 0$ such that :

$$
\begin{aligned}
\mid \widetilde{P}_q^{\perp}\widetilde{P}_{q_{j_2}} \cdots \widetilde{P}_{q_{j_k}} \mid &\leq C \mid P_q^{\perp}\widetilde{P}_{q_{j_2}} \cdots \widetilde{P}_{q_{j_k}} \mid \quad \text{by Theorem 2.1} \\
&= C \mid P_q^{\perp}P_{q_{j_2}}\widetilde{P}_{q_{j_3}} \cdots \widetilde{P}_{q_{j_k}} \mid \\
&\leq C \mid P_q^{\perp}P_{q_{j_2}}(I-\widetilde{P}_{q_{j_2}})\widetilde{P}_{q_{j_3}} \cdots \widetilde{P}_{q_{j_k}} \mid \\
&\leq C \mid P_q^{\perp}P_{q_{j_2}}\widetilde{P}_{q_{j_2}}^{\perp}\widetilde{P}_{q_{j_3}} \cdots \widetilde{P}_{q_{j_k}} \mid + C \mid P_q^{\perp}P_{q_{j_2}}\widetilde{P}_{q_{j_3}} \cdots \widetilde{P}_{q_{j_k}} \mid \\
&\leq C \mid P_q^{\perp}P_{q_{j_2}} \mid\mid \widetilde{P}_{q_{j_2}}^{\perp}\widetilde{P}_{q_{j_3}} \cdots \widetilde{P}_{q_{j_k}} \mid + C \mid P_q^{\perp}P_{q_{j_2}}P_{q_{j_3}}\widetilde{P}_{q_{j_3}} \cdots \widetilde{P}_{q_{j_k}} \mid \\
&\leq C \mid P_q^{\perp}P_{q_{j_2}} \mid\mid \widetilde{P}_{q_{j_2}}^{\perp}\widetilde{P}_{q_{j_3}} \cdots \widetilde{P}_{q_{j_k}} \mid + C \mid P_q^{\perp}P_{q_{j_2}}P_{q_{j_3}}\widetilde{P}_{q_{j_3}}^{\perp}\widetilde{P}_{q_{j_4}} \cdots \widetilde{P}_{q_{j_k}} \mid \\
&\quad + C \mid P_q^{\perp}P_{q_{j_2}}P_{q_{j_3}}\widetilde{P}_{q_{j_4}} \cdots \widetilde{P}_{q_{j_k}} \mid \\
&\vdots \qquad \text{(continue this process)} \\
&\leq C \sum_{i=2}^{k-1} \mid P_q^{\perp}P_{q_{j_2}} \cdots P_{q_{j_i}} \mid . \mid \widetilde{P}_{q_{j_i}}^{\perp}\widetilde{P}_{q_{j_{i+1}}} \cdots \widetilde{P}_{q_{j_k}} \mid \\
&\leq C \sum_{i=2}^{k-1} \frac{\mid q-q_{j_2} \mid}{d(q,S^{j_i-1})} \cdot \frac{\mid q_{j_i}-q_{j_{i+1}} \mid}{d(q_{j_i},S^{j_k-1})} \quad \text{by } L1, L1^* \text{ for depth } n \\
&\leq C \sum_{i=2}^{k-1} \frac{\mid q-q_{j_2} \mid}{d(q_{j_i},S^{j_k-1})} \quad \text{by inequality (2) for chains} \\
&\leq C \frac{\mid q-q_{j_2} \mid}{d(q,S^{j_k-1})} \quad \text{by inequality (3) for chains} \\
&\leq C \frac{\mid q-q_{j_2} \mid}{d(q,S^{j_k-1}\cap W)} \quad \text{by Proposition 2.3.} \qquad \square
\end{aligned}
$$

Théorème 7.2.6. *Let $\Sigma = \{S^j\}_{j=l}^{l+n}$ satisfy the L-conditions at 0 and let $W \in U^k$. Let $c_1 > 1$ be as in Proposition 2.4. Then there is a constant $C > 0$ such that the following condition $(L3^*)$ is satisfied for each point q near 0 on $(\overset{\circ}{S^{l+n}}) \cap W$, and all $q' \in (\overset{\circ}{S^{l+n}}) \cap W$ with $\mid q-q' \mid \leq \frac{1}{2c_1} d(q, S^{l+n-1}\cap W)$:*

$$\mid \widetilde{P}_q - \widetilde{P}_{q'} \mid \leq C \frac{\mid q-q' \mid}{d(q,S^{l+n-1}\cap W)}.$$

Proof.
Suppose that the condition $(L3^*)$ is not satisfied.

Then there are sequences (q_i) and (q'_i) on $(\overset{\circ}{S^{l+n}}) \cap W$ such that $\lim q_i = 0 = \lim q'_i = 0$, and for all $C > 0$, there is an $m \in \mathbb{N}$ such that :

$$\mid q_i - q'_i \mid < \frac{1}{2\,c_1} d(q, S^{l+n-1}\cap W) \quad \text{and}$$
$$\mid \widetilde{P}_{q'_i} - \widetilde{P}_{q_i} \mid > C \frac{\mid q_i - q'_i \mid}{d(q, S^{l+n-1}\cap W)}, \qquad \forall i > m. \qquad (*)$$

For simplicity, we write $S^{l+n} = X$.
By Lemma 2.2, we know that :

$$\begin{aligned}
&\mid \widetilde{P}_{q'_i} - \widetilde{P}_{q_i} \mid = \delta(T_{q_i}(\overset{\circ}{X} \cap W), T_{q'_i}(\overset{\circ}{X} \cap W)) \\
&= Sup\{\langle \frac{v}{\|v\|}, \frac{w}{\|w\|} \rangle \mid v \in T_{q_i}(\overset{\circ}{X} \cap W), v \neq 0,\ w \in T_{q'_i}(\overset{\circ}{X} \cap W)^{\perp}, w \neq 0\} \\
&\leq Sup\{\langle \frac{v}{\|v\|}, \frac{a}{\|a+b\|} \rangle \mid v \in T_{q_i}(\overset{\circ}{X} \cap W), v \neq 0, a \in T_{q'_i}\overset{\circ}{X}^{\perp}, b \in T_{q'_i}W^{\perp}, a+b \neq 0\} \\
&\quad + Sup\{\langle \frac{v}{\|v\|}, \frac{b}{\|a+b\|} \rangle \mid v \in T_{q_i}(\overset{\circ}{X} \cap W), v \neq 0, a \in T_{q'_i}\overset{\circ}{X}^{\perp}, b \in T_{q'_i}W^{\perp}, a+b \neq 0\} \\
&\leq Sup\{\langle \frac{v'}{\|v'\|}, \frac{a}{\|a+b\|} \rangle \mid v' \in T_{q_i}\overset{\circ}{X}, v' \neq 0, a \in T_{q'_i}\overset{\circ}{X}^{\perp}, b \in T_{q'_i}W^{\perp}, a+b \neq 0\} \\
&\quad + Sup\{\langle \frac{v''}{\|v''\|}, \frac{b}{\|a+b\|} \rangle \mid v'' \in T_{q_i}W, v'' \neq 0, a \in T_{q'_i}\overset{\circ}{X}^{\perp}, b \in T_{q'_i}W^{\perp}, a+b \neq 0\} \\
&= Sup\{\frac{\|a\|}{\|a+b\|}\langle \frac{v'}{\|v'\|}, \frac{a}{\|a\|} \rangle \mid v' \in T_{q_i}\overset{\circ}{X}, v' \neq 0, a \in T_{q'_i}\overset{\circ}{X}^{\perp}, a \neq 0,\ b \in T_{q'_i}W^{\perp}, a+b \neq 0\} \\
&+ Sup\{\frac{\|b\|}{\|a+b\|}\langle \frac{v''}{\|v''\|}, \frac{b}{\|b\|} \rangle \mid v'' \in T_{q_i}W, v'' \neq 0, a \in T_{q'_i}\overset{\circ}{X}^{\perp}, b \in T_{q'_i}W^{\perp}, b \neq 0, a+b \neq 0\}.
\end{aligned}$$

Because T_0W is transverse to $\lim T_{q_i}X$ for all sequences $q_i \subset \overset{\circ}{X} \cap W$ such that $\lim q_i = 0$, it follows that for i_0 large enough there exist positive constants $C_1,\ C_2,\ C_3,\ C_4$ such that :

$$\begin{aligned}
\mid \widetilde{P}_{q'_i} - \widetilde{P}_{q_i} \mid &\leq C_1\, \delta(T_{q_i}\overset{\circ}{X}, T_{q'_i}\overset{\circ}{X}) + C_2\, \delta(T_{q_i}W, T_{q'_i}W) \qquad \forall i > i_0 \\
&\leq C_1 \mid P_{q'_i} - P_{q_i} \mid + C_3 \mid q_i - q'_i \mid \\
&\quad \text{(by Lemma 2.2 and because } W \text{ is a } C^2\text{-submanifold)} \\
&\leq C_4 \frac{\mid q_i - q'_i \mid}{d(q, S^{l+n-1} \cap W)} + C_3 \frac{\mid q_i - q'_i \mid}{d(q, S^{l+n-1} \cap W)} \quad \text{(by } (L3) \text{)} \\
&= (C_4 + C_3) \frac{\mid q_i - q'_i \mid}{d(q, S^{l+n-1} \cap W)}.
\end{aligned}$$

So we have a contradiction with (*). □

Théorème 7.2.7. *Let $\Sigma = \{S^j\}_{j=l}^{l+n}$ satisfy the L-conditions at 0 and let $W \in U^k$. Let $c_1 > 1$ be as in Proposition 2.4. Then there is a constant $C > 0$ such that the following condition $(L2^*)$ is satisfied for every c_1-chain of a point q near 0 on $(\overset{\circ}{S^{l+n}}) \cap W$, and $q' \in (\overset{\circ}{S^{l+n}}) \cap W$ with $\mid q - q' \mid \leq \frac{1}{2c_1} d(q, S^{l+n-1} \cap W)$, where m is the length of the chain : $\mid (\widetilde{P}_q - \widetilde{P}_{q'})\widetilde{P}_{q_{j_2}} \cdots \widetilde{P}_{q_{j_k}} \mid \leq C \frac{|q-q'|}{d(q, S^{j_k - 1} \cap W)} \quad \forall k, \quad 1 \leq k \leq m.$*

Proof.
Let $q, q_{j_2}, \cdots, q_{j_m}$ be a chain of $q \in (\overset{\circ}{S^{l+n}}) \cap W$ and let $q' \in (\overset{\circ}{S^{l+n}}) \cap W$ such that $\mid q - q' \mid \leq \frac{1}{2c_1} d(q, S^{l+n-1} \cap W)$.

Then for $1 \leq k \leq m$:

$$| (\widetilde{P}_q - \widetilde{P}_{q'})\widetilde{P}_{q_{j_2}} \cdots \widetilde{P}_{q_{j_k}} | = | (\widetilde{P}_q^{\perp} - \widetilde{P}_{q'}^{\perp})\widetilde{P}_{q_{j_2}} \cdots \widetilde{P}_{q_{j_k}} |$$
$$= | (\widetilde{P}_q^{\perp} - \widetilde{P}_{q'}^{\perp}) (\widetilde{P}_q + \widetilde{P}_q^{\perp})\widetilde{P}_{q_{j_2}} \cdots \widetilde{P}_{q_{j_k}} |$$
$$\leq | \widetilde{P}_{q'}^{\perp}\widetilde{P}_q\widetilde{P}_{q_{j_2}} \cdots \widetilde{P}_{q_{j_k}} | + | \widetilde{P}_q^{\perp} - \widetilde{P}_{q'}^{\perp} | | \widetilde{P}_q^{\perp}\widetilde{P}_{q_{j_2}} \cdots \widetilde{P}_{q_{j_k}} |$$
$$\leq | \widetilde{P}_{q'}^{\perp}\widetilde{P}_q\widetilde{P}_{q_{j_2}} \cdots \widetilde{P}_{q_{j_k}} | + C \frac{| q - q' |}{d(q, S^{j_1 - 1})} \frac{| q - q_{j_2} |}{d(q, S^{j_k - 1})} \quad \text{by } L3^*, L1^*$$

$\vdots$ using the process of the proof of Theorem 2.5

$$\leq C_1 \sum_{i=2}^{k-1} | P_{q'}^{\perp} P_q P_{q_{j_2}} \cdots P_{q_{j_i}} | | \widetilde{P}_{q_{j_i}}^{\perp} \widetilde{P}_{q_{i+1}} \cdots \widetilde{P}_{q_{j_k}} | + C_2 \frac{| q - q' |}{d(q, S^{j_k - 1})}$$

by inequality (2) for chains

$$\leq C_1 \sum_{i=2}^{k-1} | (I - P_{q'}) P_q P_{q_{j_2}} \cdots P_{q_{j_i}} | | \widetilde{P}_{q_{j_i}}^{\perp} \widetilde{P}_{q_{i+1}} \cdots \widetilde{P}_{q_{j_k}} | + C_2 \frac{| q - q' |}{d(q, S^{j_k - 1})}$$
$$\leq C_1 \sum_{i=2}^{k-1} | (P_q - P_{q'}) P_q P_{q_{j_2}} \cdots P_{q_{j_i}} | | \widetilde{P}_{q_{j_i}}^{\perp} \widetilde{P}_{q_{i+1}} \cdots \widetilde{P}_{q_{j_k}} | + C_2 \frac{| q - q' |}{d(q, S^{j_k - 1})}$$
$$\leq C_1 \sum_{i=2}^{k-1} | (P_q - P_{q'})(I - P_q^{\perp}) P_{q_{j_2}} \cdots P_{q_{j_i}} | | \widetilde{P}_{q_{j_i}}^{\perp} \widetilde{P}_{q_{i+1}} \cdots \widetilde{P}_{q_{j_k}} | + C_2 \frac{| q - q' |}{d(q, S^{j_k - 1})}$$
$$\leq C_1 \sum_{i=2}^{k-1} \{| (P_q - P_{q'}) P_{q_{j_2}} \cdots P_{q_{j_i}} | + | (P_q - P_{q'}) P_q^{\perp} P_{q_{j_2}} \cdots P_{q_{j_i}} |\} | \widetilde{P}_{q_{j_i}}^{\perp} \widetilde{P}_{q_{i+1}} \cdots \widetilde{P}_{q_{j_k}} |$$
$$+ C_2 \frac{| q - q' |}{d(q, S^{j_k - 1})}$$

$$\leq C_3 \sum_{i=2}^{k-1} \{ \frac{| q - q' |}{d(q, S^{j_i - 1})} + \frac{| q - q' |}{d(q, S^{j_1 - 1})} \frac{| q - q_{j_2} |}{d(q, S^{j_i - 1})} \} \frac{| q_{j_i} - q_{j_{i+1}} |}{d(q_{j_i}, S^{j_k - 1})} + C_2 \frac{| q - q' |}{d(q, S^{j_k - 1})}$$

by L2, L3, L1 and $L1^*$

$$\leq C_3 \sum_{i=2}^{k-1} \frac{| q - q' |}{d(q, S^{j_i - 1})} \frac{| q_{j_i} - q_{j_{i+1}} |}{d(q, S^{j_k - 1})} + C_2 \frac{| q - q' |}{d(q, S^{j_k - 1})} \quad \text{by inequality (2) for chains}$$
$$\leq C_4 \frac{| q - q' |}{d(q, S^{j_k - 1})} \quad \text{by inequality (2) for chains}$$
$$\leq C \frac{| q - q' |}{d(q, S^{j_k - 1} \cap W)} \quad \text{by Proposition 2.3.}$$

This completes the proof of the theorem.

By the preceding result, we deduce :

Corollaire 7.2.8. *Let* $\Sigma = \{S^j\}_{j=l}^m$ *be a stratification satisfying the L-conditions at* 0*, then for an open dense set of wings* W *containing* S^l *(assumed linear near* 0*),* $\Sigma' = \{S^j \cap W\}_{j=l}^m$ *also satisfies the L-conditions at* 0*, i.e.* (L) *implies* (L^*).

This result also holds when X is a complex analytic subset of an open subset of $\mathbb{C}^n$.

REFERENCES

[1] G. Comte, Multiplicity of complex analytic sets and bi-Lipschitz mappings, *Real analytic and algebraic singularities (Nagoya/ Sapporo/ Hachioji, 1996), Pitman Research Notes Math. Ser.,* **381**, Longman, Harlow, 1998, pp. 182-188.

[2] H. Hironaka, Normal cones in analytic Whitney stratifications, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* no. **36**, 1969, pp. 127-138.

[3] D. Juniati, *De la régularité Lipschitz des espaces stratifiÕes*, thesis, Université de Provence, 2002.

[4] D. Juniati and D. J. A. Trotman, *Classification of Lipschitz stratification for the family of surfaces* $y^a = z^b x^c + x^d$, in preparation.

[5] Lê Dung Tràng and B. Teissier, Cycles évanescents et conditions de Whitney II, *Proc. Sympos. Pure Math.* **40** (Amer. Math. Soc.,Providence, R.I., 1983, Part 2, pp. 65-103.

[6] Ta Lê Loi, Verdier and strict Thom stratifications in o-minimal structures, *Illinois J. Math.* **42** (1998), no. 2, pp. 347–356.

[7] T. Mostowski, Lipschitz equisingularity, *Dissertationes Math.* **243**, 1985, PWN, Warsaw.

[8] V. Navarro Aznar, Conditions de Whitney et sections planes, *Invent. Math.* **61**, 1980, pp. 199-266.

[9] V. Navarro Aznar and D. J. A. Trotman, Whitney regularity and generic wings, *Ann. Inst. Fourier, Grenoble* **31**, 1981, pp. 87-111.

[10] L. Noirel, *Plongements sous-analytiques d'espaces stratifiés de Thom-Mather*, thesis, Université de Provence, 1996.

[11] P. Orro and D. J. A. Trotman, On the regular stratifications and conormal structure of subanalytic sets, *Bull. London Math. Soc.* **18**, 1986, pp. 185-191.

[12] A. Parusinski, Lipschitz stratification of real analytic sets, *Singularities, Banach Center publications (S. Lojasiewicz, ed.),* **20**, PWN, Warsaw, 1988, pp. 323-333.

[13] A. Parusinski, Lipschitz properties of semi-analytic sets, *Ann. Inst. Fourier, Grenoble,* **38**, 1988, no.4, pp. 189-213.

[14] A. Parusinski, Lipschitz stratification, *Global analysis in modern mathematics (Orono, ME, 1991; Waltham, Mass.,1992)*, Publish or Perish, Houston, 1993, pp. 73-89.

[15] A. Parusinski, Lipschitz stratification of subanalytic sets, *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.* **(4) 27**, 1994, No.6, pp. 661-696.

[16] B. Teissier, Introduction to equisingularity problems, *A. M. S. Algebraic Geometry Symposium, Arcata 1974,* Providence, Rhode Island, 1975, pp. 593-632.

[17] B. Teissier, Variétés polaires II : Multiplicités polaires, sections planes, et conditions de Whitney, *Algebraic Geometry Proceedings, La Rabida 1981, Lecture Notes in Math.* **961**, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1982, pp. 314-491.

[18] D. Trotman, On the canonical Whitney stratification of real algebraic hyper-

surfaces, Séminaire de géométrie algébrique réelle dirigé par Jean-Jacques Risler, tome 1, *Publications Mathématiques de l'Université de Paris VII,* vol. **24**, 1986, pp. 123-152.
[19] J.-L. Verdier, Stratifications de Whitney et théorème de Bertini-Sard, *Invent. Math.* **36**, 1976, pp. 295-312.

Bibliographie

[Ba] S. Banach, Wstep do teorii funkcji rzeczystych, Monographie Matemetiyczne, Warszawa-Wroclaw, 1951.

[Be] K. Bekka C-régularité et trivialité topologique, *Singularity theory and its applications Part I (Coventry, 1988/1989)*, 42–62, Lecture Notes in Math., **1462**, Springer, Berlin, 1991.

[Co1] G. Comte, Densité et images polaires en géométrie sous-analytique, Thèse, Université de Provence, 1998.

[Co2] G. Comte, Multiplicity of complex analytic sets and bi-Lipschitz mappings, *Real analytic and algebraic singularities (Nagoya/ Sapporo/ Hachioji, 1996), Pitman Research Notes Math. Ser.,* **381**, Longman, Harlow, 1998, pp. 182-188.

[Co3] G. Comte, équisingularité réelle : nombres de Lelong et images polaires. (French) [Real equisingularity : Lelong numbers and polar images] *Ann. Sci. école Norm. Sup.* (4) **33** (2000), no. 6, 757–788.

[C-L-R] G. Comte, J. M. Lion, J. P. Rolin, Nature log-analytique du volume des sous-analytiques. , *Illinois J. Math*, **44**, 2000, 884-888.

[Dra] R. N. Draper, Intersection theory in analytic geometry, *Math. Ann.*, **180**, 1969, pp. 175-204.

[F] H. Federer, Geometric measure theory. *Grundlehren Math.* Wiss. **153**, Springer Verlag, 1969.

[G-T-W] T. Gaffney, D. Trotman, L. Wilson, Equisingularity of sections, t^r condition, and the integral closure of modules,

[H-M] J. P. Henry, M. Merle, Stratifications de Whitney d'un ensemble sous-analytique. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **308**, 1989, no. 12, 357–360.

[Ha] Hardt, Robert M. Semi-algebraic local-triviality in semi-algebraic mappings. *Amer. J. Math.*, **102**, 1980, n. 2, 291–302.

[Hi] H. Hironaka, Normal cones in analytic Whitney stratifications, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* no. **36**, 1969, pp. 127-138.

[J] D. Juniati, *De la régularité Lipschitz des espaces stratifiés*,thesis, Université de Provence, 2002.

[J-T] D. Juniati and D. J. A. Trotman, *Classification of Lipschitz stratification for the family of surfaces* $y^a = z^b x^c + x^d$, preprint, 2003.

[J-T-V] D. Juniati, David Trotman, G. Valette, Lipshitz stratifications and generic wings, à paraître dans Journal of the London mathematical society.

[Ko-1] S. Koike, C^0-sufficiency of jets via blowing-up. *J. Math. Kyoto Univ.*, **28** (1988), no. 4, 605–614.

[Ko-2] S. Koike, On v-sufficiency and $(\bar{h})$-regularity. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, **17**, 1981, no. 2, 565–575.

[Ko-3] S. Koike, A remark on sufficiency of jets. *Math. Japon.* **25**, 1980, no. 6, 671–676.

[K-R] K. Kurdyka, G. Raby, Densité des ensembles sous-analytiques. *Ann Inst. Fourrier*, **39**, 1989, pp 753-771.

[Ku-1] T. C. Kuo. The ratio test for analytic Whitney stratifications. 1971 *Proceedings of Liverpool Singularities-Symposium*, I (1969/70) pp. 141–149 Lecture Notes in Mathematics, **Vol. 192** Springer, Berlin

[Ku-2] T. C. Kuo. On C^0 sufficiency of jets and potential functions, *Topology* , **8**, 1969, pp. 167-171.

[Ku-3] T. C. Kuo. Characterizations of $V-$sufficiency of jets, *Topology* , **8**, 1969, pp. 115-131.

[Ku-4] T. C. Kuo. On Thom-Whitney stratification theory, *Math. Ann.*, **234**, 1978, pp. 97-107.

[Ku-5] T. C. Kuo. Sufficiency of jets via stratification theory, *Invent. Math.*, **57**, 1980, pp. 219-226.

[Ku-T] T. C. Kuo and D. Trotman. On w and t^s stratifications, *Invent. Math.*, **92**, 1988, pp. 633-643.

[Ku-T-X] T. C. Kuo, D. Trotman and Li Pei Xin. Blowing-up and Whitney (a)-regularity, *Canad. Math. Bull*, **32**, 1989, pp. 482-485.

[Ma-1] J. Mather, How to stratify mappings and jets spaces. *Singularités d'applications différentiables* (Sém., Plans-sur-Bex, 1975), pp. 128–176. Lecture Notes in Math., Vol. 535, Springer, Berlin, 1976.

[Ma-2] J. Mather, Notes on topological stability, *Harvard University* , (1970).

[Mo] T. Mostowski, Lipschitz equisingularity, *Dissertationes Math.* **243**, 1985, PWN, Warsaw.

[N] V. Navarro Aznar, Conditions de Whitney et sections planes, *Invent. Math.* **61**, 1980, pp. 199-266.

[N-T] V. Navarro Aznar and D. J. A. Trotman, Whitney regularity and generic wings, *Ann. Inst. Fourier*, pp. 87-111.

[O-T] P. Orro and D. J. A. Trotman, Cône normal et régularités de Kuo-Verdier, *Bull. Soc. Math. France* **130**, 2002, pp. 71-85.

[Pa1] A. Parusinski, Lipschitz properties of semi-analytic sets, *Ann. Inst. Fourier, Grenoble,* **38**, 1988, no.4, pp. 189-213. Publish or Perish, Houston, 1993, pp. 73-89.

[Pa2] A. Parusinski, Lipschitz stratification of subanalytic sets, *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.* **(4) 27**, 1994, No.6, pp. 661-696.

[Pa3] A. Parusiński, Lipschitz stratification. *Global analysis in modern mathematics, (Orono, ME, 1991 ; Waltham, MA, 1992)*, 73–89, Publish or Perish, Houston, TX, 1993.

[Ta] F. Takens, A note on sufficiency of jets. *Invent. Math.* **13**, 1971, pp. 225-231

[Te] B. Teissier, Variétés polaires II : Multiplicités polaires, sections planes, et conditions de Whitney, *Algebraic Geometry Proceedings, La Rabida 1981, Lecture Notes in Math.* **961**, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1982, pp. 314-491.

[Th] R. Thom, Ensembles et morphismes stratifiés, *Bull. Amer. Math. Soc* **75**, 1969.

[T-W] D. Trotman and L. Wilson. Stratifications and finite determinacy, *Proc London Math Soc.*, **78**, 1999, pp.334-368.

[T1] D. Trotman, Whitney stratifications : faults and detectors. Thèse de doctorat, Warwick, 1977.

[T2] D. Trotman, Transverse transversals and homeomorphic transversals, *Topology*, **24**, 1985, no. 1, 25–39.

[V] J.-L. Verdier, Stratifications de Whitney et théorème de Bertini-Sard, *Invent. Math.* **36**, 1976, pp. 295-312.

[Wa] C. T. C. Wall. Finite determinacy of smooth map-germs, *Bull London Math. soc*, **13**, 1981, 461-513.

[Wh] H. Whitney, Tangents to an analytic variety, Ann. of Math. 81, 1965, pp 481-539.

[Wi-1] L. Wilson, Infinitely determined map germs. *Canad. J. Math.* **33**, 1981, no. 3, 671–684.

[Wi-2] L. Wilson, stratifications and sufficiency of jets. Singularity theory (Trieste, 1991), 953–973, World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 1995.

[Y] Y. Yomdin, Some results on finite determinacy and stability not requiring the explicit use of smoothness. *Singularities*, Part 2 (Arcata, Calif., 1981), 667–674, Proc. Sympos. Pure Math., **40**, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1983.