Jerzy Browkin

Zera funkcji $\zeta(s)$ Riemanna

1. Podstawowe informacje. [1]

1.1. Funkcja $\zeta(s)$.

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=\prod_p\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}\qquad \text{dla}\quad \operatorname{Re}s>1.$$

[Wynika stąd, że $\zeta(s)\neq 0$ oraz $\overline{\zeta(s)}=\zeta(\overline{s})$ dla $\operatorname{Re}s>1$].

Dla rozszerzenia funkcji $\zeta(s)$ na półpłaszczyznę $\operatorname{Re}s>0$ postępujemy następująco.

Ponieważ dla $x\in\mathbb{R}$ mamy $0\le x-\lfloor x\rfloor<1$, więc funkcja

$$Z(s):=\int_1^{\infty}\frac{x-\lfloor x\rfloor}{x^{s+1}}\,dx$$

jest określona dla $\operatorname{Re}s>0$.

Obliczymy $Z(s)$ dla $\operatorname{Re}s>1$. Mamy

$$Z(s)=\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^s}-\int_1^{\infty}\frac{\lfloor x\rfloor}{x^{s+1}}\,dx=$$

$$=\frac{1}{s-1}-\sum_{n=1}^{\infty}\int_n^{n+1}\frac{n}{x^{s+1}}\,dx=\frac{1}{s-1}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{s}\cdot\frac{1}{x^s}\Big|_{x=n}^{x=n+1}=$$

$$=\frac{1}{s-1}+\frac{1}{s}\left(1\left(\frac{1}{2^s}-\frac{1}{1^s}\right)+2\left(\frac{1}{3^s}-\frac{1}{2^s}\right)+3\left(\frac{1}{4^s}-\frac{1}{3^s}\right)+\cdots\right)=$$

$$=\frac{1}{s-1}+\frac{1}{s}\left(-\frac{1}{1^s}-\frac{1}{2^s}-\frac{1}{3^s}+\cdots\right)=\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s}\zeta(s).$$

Wobec tego

$$\zeta(s)=\frac{s}{s-1}-s\,Z(s)\qquad \text{dla}\quad \operatorname{Re}s>1$$

i składnik $-sZ(s)$ jest określony dla $\operatorname{Re}s>0$. Pozwala to określić $\zeta(s)$ również dla $\operatorname{Re}s>0,\ s\neq 1$.

Wynika stąd, że $\zeta(s)$ ma w punkcie $s=1$ biegun jednokrotny o residuum 1.

---

[1] Dziękuję Profesorom J. Kaczorowskiemu i W. Narkiewiczowi za krytyczne uwagi i pomoc przy zredagowaniu tego tekstu.

1.2. Funkcja $\Gamma(s)$.

$$\Gamma(s)=\int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}dx \quad \text{dla} \quad \operatorname{Re} s>0 \qquad \text{(Euler 1730).}$$

[Wynika stąd, że $\overline{\Gamma(s)}=\Gamma(\overline{s})$, $\Gamma(1)=1$].

Całkujemy przez części

$$\Gamma(s)=e^{-x}x^s\Big|_0^\infty-\int_0^\infty x\left(-e^{-x}x^{s-1}+e^{-x}(s-1)x^{s-2}\right)dx=$$

$$=\int_0^\infty e^{-x}x^s dx-(s-1)\int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}dx=\Gamma(s+1)-(s-1)\,\Gamma(s).$$

Mamy więc $\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)$ i lewa strona jest określona dla $\operatorname{Re} s>-1,\ s\neq 0$.

[Wynika stąd, że $\Gamma(n)=(n-1)!$ dla $n\in\mathbb{N}$].

Daje to możność rozszerzenia $\Gamma(s)$ na całą płaszczyznę poza $s=0,1,2,\ldots$. W tych punktach $\Gamma(s)$ ma biegun jednokrotny.

Zachodzi wzór

$$\Gamma(1-s)\,\Gamma(s)=\frac{\pi}{\sin\pi s}, \qquad \text{dla} \quad s\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}.$$

[Wynika stąd, że $\Gamma(s)\neq 0$ dla $s\in\mathbb{C}$].

1.3. Teta funkcja $\Omega(x)$.

Twierdzenie. *Funkcja*

$$\Omega(x):=\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-n^2\pi x} \qquad \textit{dla} \quad x>0$$

spełnia równanie funkcyjne

$$\Omega\left(\frac{1}{x}\right)=\sqrt{x}\,\Omega(x).$$

Mamy oczywiście $\Omega(x)=1+2\psi(x)$, gdzie $\psi(x):=\sum_{n=1}^\infty e^{-n^2\pi x}$ i równanie funkcyjne dla $\Omega(x)$ daje

$$\psi(x)=\frac{1-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x}}\psi\left(\frac{1}{x}\right).$$

Dowód (Ch. de la Vallée-Poussin). Dla ustalonego $x > 0$ rozpatrzmy funkcję

$$G(\alpha) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-(n+\alpha)^2 \pi x},$$

wtedy $G(0) = \Omega(x)$.

Jest to funkcja parzysta, okresowa o okresie 1. Mamy więc jej rozwinięcie na szereg Fouriera

$$G(\alpha) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(2k\pi\alpha), \tag{1}$$

gdzie

$$a_k = 2\int_0^1 G(\alpha)\cos(2k\pi\alpha)d\alpha \qquad \text{dla} \quad k \geq 0.$$

Obliczamy dla $k \geq 0$

$$\begin{aligned} a_k &= 2\int_0^1 \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-(n+\alpha)^2\pi x}\cos(2k\pi\alpha)d\alpha \\ &= 2\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2\pi x}\cos(2k\pi\alpha)d\alpha = 2e^{-k^2\pi/x}\frac{1}{\sqrt{x}}, \end{aligned}$$

ponieważ znana jest całka

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-pt^2}\cos(qt)dt = e^{-q^2/4p}\sqrt{\pi/p} \quad \text{dla} \quad p > 0.$$

Wobec tego wzór (1) przyjmuje postać

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-(n+\alpha)^2\pi x} &= \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{2}{\sqrt{x}}\sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^2\pi/x}\cos(2k\pi\alpha) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{x}}\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-k^2\pi/x}\cos(2k\pi\alpha). \end{aligned}$$

Przyjmując tu $\alpha = 0$ otrzymujemy

$$\Omega(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\Omega\left(\frac{1}{x}\right). \qquad \square$$

1.4. Równanie funkcyjne dla $\zeta(s)$.

$$\text{Dla} \quad \operatorname{Re} s > 0 \qquad \Gamma(s/2) = \int_0^{\infty} e^{-x}x^{s/2-1}dx =$$

[Podstawiamy $x \mapsto n^2\pi x$]

$$= \int_0^\infty e^{-n^2\pi x}\,(n^2\pi x)^{s/2-1} n^2\pi dx = n^s\pi^{s/2}\int_0^\infty e^{-n^2\pi x}\,x^{s/2-1}dx.$$

[Dzielimy przez $n^s\pi^{s/2}$ i obliczamy $\sum_{n=1}^\infty$]

$$\zeta(s)\,\Gamma(s/2)\,\pi^{-s/2} = \int_0^\infty \psi(x)\,x^{s/2-1}dx.$$

[Obie strony są określone dla $\mathrm{Re}\, s > 0$].

Oznaczmy

$$F(s) := \zeta(s)\Gamma(s/2)\pi^{-s/2} \qquad \text{dla} \quad \mathrm{Re}\, s > 0.$$

Przekształcamy

$$F(s) = \int_0^1 \psi(x)\,x^{s/2-1}dx + \int_1^\infty \psi(x)\,x^{s/2-1}dx =$$

[W pierwszej całce stosujemy równanie funkcyjne dla $\psi(x)$]

$$= \int_0^1 \frac{1-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\cdot x^{s/2-1}dx + \int_0^1 \psi(1/x)x^{(s-3)/2}dx + \int_1^\infty \psi(x)\,x^{s/2-1}dx =$$

[Pierwszą całkę obliczamy, w drugiej podstawiamy $x \mapsto 1/w$]

$$= \left(\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s}\right) + \int_\infty^1 \psi(w)w^{(3-s)/2}(-w^{-2})dw + \int_1^\infty \psi(x)\,x^{s/2-1}dx =$$

[Łączymy dwie całki w jedną]

$$= -\left(\frac{1}{s} + \frac{1}{1-s}\right) + \int_1^\infty \psi(x)\,\left(x^{s/2-1} + x^{(1-s)/2-1}\right)dx.$$

Otrzymane wyrażenie nie ulega zmianie przy podstawieniu $s \mapsto 1-s$. Udowodniliśmy więc, że

$$F(s) = F(1-s).$$

Inaczej mówiąc

$$\pi^{-s/2}\,\Gamma(s/2)\,\zeta(s) = \pi^{-(1-s)/2}\,\Gamma((1-s)/2)\,\zeta(1-s).$$

Pozwala to rozszerzyć funkcję $F(s)$, a więc i funkcję $\zeta(s)$ na całą płaszczyznę $\mathbb{C}\setminus\{1\}$.

Wynika stąd, że $\zeta(-2n) = 0$ dla $n \geq 1$ i to są jedyne zera funkcji $\zeta(s)$ spełniające $\operatorname{Re} s < 0$. Są to tak zwane zera banalne.

Zatem, jeżeli $\zeta(s) = 0$ i $s \notin \mathbb{R}$, to $0 \leq \operatorname{Re} s \leq 1$ oraz $\zeta(1-s) = 0$ i $\zeta(\overline{s}) = 0$. Ponadto $\zeta(x) \neq 0$ dla $0 \leq x \leq 1$.

2. Zera niebanalne funkcji $\zeta(s)$.

2.1. Zasadnicze twierdzenia o zerach funkcji $\zeta(s)$.

Twierdzenie (J. Hadamard, Ch. de la Vallée-Poussin, 1896)**.** *Funkcja $\zeta(s)$ nie ma zer na prostej $\operatorname{Re} s = 1$.*

Oznaczmy

$$N(T) := \#\{s \in \mathbb{C} : \zeta(s) = 0,\ 0 \leq \operatorname{Re} s \leq 1,\ 0 \leq \operatorname{Im} s \leq T\},$$

$$N_0(T) := \#\{s \in \mathbb{C} : \zeta(s) = 0,\ \operatorname{Re} s = \frac{1}{2},\ 0 \leq \operatorname{Im} s \leq T\}.$$

Twierdzenie (H. v. Mangoldt, 1895, 1905)**.** *Mamy*

$$N(T) = \frac{T}{2\pi} \log\left(\frac{T}{2\pi}\right) - \frac{T}{2\pi} + O(\log T).$$

Dokładniej:

$$|O(\log T)| \leq 0.5 \log T + 2 \log\, \log T + 14.$$

W 1924 r. J.E. Littlewood poprawił to oszacowanie do $O(\log T / \log\log T)$.

Twierdzenie (G.H. Hardy, 1914)**.** *Funkcja $\zeta(s)$ ma nieskończenie wiele zer na prostej krytycznej $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$.*

Twierdzenie (J.B. Conrey, 1989)**.**

$$N_0(T) \geq 0.4088 \cdot N(T).$$

Hipoteza Riemanna. $N_0(T) = N(T)$.

2.2. Twierdzenie Hadamarda-de la Vallée-Poussina.

Twierdzenie. $\zeta(1+it) \neq 0$ *dla* $t \in \mathbb{R}$.

Dowód (Ch. de la Vallée-Poussin). Najpierw wyprowadzimy wzór na $|\zeta(s)|$, gdzie $s = \sigma + it$, $\sigma > 1$.

Ze wzoru $\log(1-s) = -\sum_{m=1}^{\infty} \frac{s^m}{m}$ dla $|s| < 1$ wynika, że

$$\zeta(s) = \exp\ \log \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} = \exp \sum_p \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{mp^{sm}}.$$

Mamy oczywiście $|e^s| = e^{\operatorname{Re} s}$, ponadto

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\left(\frac{1}{mp^{sm}}\right) &= \frac{1}{m}\operatorname{Re}\left(e^{-sm\log p}\right) = \\ &= \frac{1}{m}\operatorname{Re}\left(e^{-\sigma m\log p}\left(\cos(-tm\log p) + i\sin(-tm\log p)\right)\right) = \\ &= \frac{\cos(tm\log p)}{mp^{\sigma m}}.\end{aligned}$$

Zatem

$$|\zeta(s)| = \exp \sum_p \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos(tm\log p)}{mp^{\sigma m}}, \qquad \text{gdzie} \quad s = \sigma + it.$$

Przypuśćmy, że $\zeta(1+it_0) = 0$ dla pewnego $t_0 \in \mathbb{R}^*$.

Rozpatrzmy funkcję

$$Z(s) := \zeta(s)^3\, \zeta(s+it_0)^4\, \zeta(s+2it_0).$$

Jest ona określona dla $s \in \mathbb{C}$ i ma zero w punkcie $s = 1$, ponieważ w tym punkcie $\zeta(s)^3$ ma biegun trzykrotny, $\zeta(s+it_0)^4$ ma zero co najmniej czterokrotne i $\zeta(s+2it_0)$ nie ma bieguna.

Z drugiej strony dla $s = \sigma > 1$ mamy

$$\begin{aligned}|Z(s)| &= |\zeta(s)|^3 \cdot |\zeta(s+it_0)|^4 \cdot |\zeta(s+2it_0)| = \\ &= \exp \sum_p \sum_{m=1}^{\infty} \frac{3 + 4\cos(t_0 m\log p) + \cos(2t_0 m\log p)}{mp^{\sigma m}} \geq 1\end{aligned}$$

na mocy tożsamości

$$3 + 4\cos\alpha + \cos(2\alpha) = 2(1+\cos\alpha)^2 \geq 0.$$

Mamy jednak $\lim_{\sigma \to 1+0} Z(\sigma) = Z(1) = 0$. Uzyskana sprzeczność dowodzi, że na prostej $\operatorname{Re} s = 1$ funkcja $\zeta(s)$ nie ma zera. $\square$

2.3. Funkcje $\xi(s)$ i $\Xi(x)$.

Funkcja $F(s) = \pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s)$ ma bieguny (jednokrotne) tylko w punktach $s = 0$ i $s = 1$. Aby się ich pozbyć, rozpatrujemy funkcję

$$\xi(s) = \tfrac{1}{2}s(s-1)F(s) = \tfrac{1}{2}s(s-1)\Gamma(s/2)\zeta(s)\pi^{-s/2}.$$

Zatem zbiór zer funkcji $\xi(s)$ jest to zbiór zer niebanalnych funkcji $\zeta(s)$.

Mamy $\xi(s) = \xi(1-s)$ oraz $\overline{\xi(s)} = \xi(\overline{s})$. Wobec tego

$$\overline{\xi\left(\tfrac{1}{2}+it\right)} = \xi\left(\tfrac{1}{2}-it\right) = \xi\left(1-\left(\tfrac{1}{2}+it\right)\right) = \xi\left(\tfrac{1}{2}+it\right).$$

Zatem $\xi\left(\frac{1}{2}+it\right) \in \mathbb{R}$ dla $t \in \mathbb{R}$.

Określamy więc funkcję rzeczywistą $\Xi(t) := \xi\left(\frac{1}{2}+it\right)$. Spełnia ona $\Xi(-t) = \Xi(t)$, to znaczy jest parzysta.

Zbiór zer funkcji $\zeta(s)$ na prostej krytycznej jest równy zbiorowi zer funkcji $\xi(s)$ na tej prostej, odpowiada więc zbiorowi zer rzeczywistych funkcji $\Xi(x)$.

2.4. Twierdzenie Hardy'ego.

Twierdzenie (G. H. Hardy, 1914)**.** *Funkcja $\zeta(s)$ ma nieskończenie wiele zer na prostej krytycznej.*

Dowód. Wystarczy udowodnić, że funkcja rzeczywista $\Xi(x)$ ma nieskończenie wiele zer rzeczywistych. W tym celu zbadamy pewną całkę zależną od $\Xi(x)$.

Najpierw udowodnimy prosty

Lemat. *Jeżeli $h(x)$ jest funkcją rzeczywistą parzystą, to*

$$\int_0^\infty h(t)\cos(tx)\,dt = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty h(t)e^{itx}\,dt.$$

Dowód. Przedstawimy całkę po prawej stronie jako sumę dwóch całek i skorzystamy ze wzoru $\cos\alpha = \frac{1}{2}\left(e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}\right)$.

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty h(t)e^{itx}dt = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^0 h(t)e^{itx}dt + \frac{1}{2}\int_0^\infty h(t)e^{itx}dt =$$

[W pierwszej całce podstawiamy $x \mapsto -x$].

$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty h(t)e^{-itx}dt + \frac{1}{2}\int_0^\infty h(t)e^{itx}dt = \int_0^\infty h(t)\cos(tx)dt. \qquad \square$$

Dowód twierdzenia podzielimy na kilka kroków.

`Krok 1`

Ze wzoru

$$\xi(s) = \tfrac{1}{2}s(s-1)\,\Gamma(s/2)\,\zeta(s)\,\pi^{-s/2}$$

otrzymujemy

$$\Xi(t) = \xi(\tfrac{1}{2}+it) = -\tfrac{1}{2}(t^2+\tfrac{1}{4})\,\Gamma((\tfrac{1}{2}+it)/2)\,\zeta(\tfrac{1}{2}+it)\,\pi^{-(\frac{1}{2}+it)/2}.$$

Przyjmijmy w lemacie

$$h(t) = \frac{\Xi(t)}{t^2+\frac{1}{4}}.$$

Jest to funkcja parzysta. Z lematu otrzymujemy więc

$$\int_0^\infty \frac{\Xi(t)\cos(tx)}{t^2+\frac{1}{4}}\,dt = \tfrac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{\Xi(t)}{t^2+\frac{1}{4}}e^{itx}\,dt =$$

$$= \tfrac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \left(-\tfrac{1}{2}\right)\,\Gamma((\tfrac{1}{2}+it)/2)\,\zeta(\tfrac{1}{2}+it)\,\pi^{-(\frac{1}{2}+it)/2}\,e^{itx}\,dt =$$

[Dokonujemy podstawienia $\frac{1}{2}+it \mapsto s$].

$$= -\tfrac{1}{4}\int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} \Gamma(s/2)\zeta(s)\pi^{-s/2}e^{sx}\cdot e^{-x/2}\cdot(-i)\,ds =$$

$$= \frac{i}{4e^{x/2}}\int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} \Gamma(s/2)\zeta(s)\pi^{-s/2}e^{sx}\,ds.$$

`Krok 2`

Transformata Mellina. *Jeżeli*

$$H(s) = \int_0^\infty h(x)x^{s-1}dx,$$

to

$$h(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} H(s)x^{-s}ds$$

dla $\sigma > \sigma_0$, *gdzie* $H(s)$ *nie ma bieguna na prawo od* σ_0, *i na odwrót.*

Przykłady.

$h(x)$	$H(s)$
e^{-x}	$\Gamma(s), \qquad \sigma > 0$
$\frac{1}{e^x-1}$	$\Gamma(s)\zeta(s), \qquad \sigma > 1$
$\psi(x)$	$\Gamma(s)\zeta(2s)\pi^{-s}, \qquad \sigma > \frac{1}{2}$

Ostatni przykład daje

$$\psi(y)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\Gamma(s)\zeta(2s)\pi^{-s}y^{-s}ds \qquad \text{dla} \quad \sigma>1/2.$$

[Dokonujemy zamiany zmiennych $s\mapsto s/2$]

$$\psi(y)=\frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{1}{2}\int_{\tau-i\infty}^{\tau+i\infty}\Gamma(s/2)\zeta(s)\pi^{-s/2}y^{-s/2}ds \qquad \text{dla} \quad \tau=2\sigma>1.$$

Otrzymany wzór pozwoli obliczyć ostatnią całkę w Kroku 1.

Jednak tam jest całka po prostej $\operatorname{Re} s=1/2$, a tu po prostej $\operatorname{Re} s=\tau$. Wzór Cauchy'ego daje zależność między takimi całkami. Jeżeli funkcja $G(s)$ ma w pasie między tymi prostymi tylko jeden biegun w punkcie $s=1$, to

$$\frac{1}{2\pi i}\Big(\int_{\tau-i\infty}^{\tau+i\infty}G(s)ds-\int_{1/2-i\infty}^{1/2+i\infty}G(s)ds\Big)=\operatorname{Res}_{s=1}G(s).$$

U nas $G(s)=\Gamma(s/2)\zeta(s)\pi^{-s/2}y^{-s/2}$, gdzie $y=e^{-2x}$. Zatem $G(s)$ ma w pasie $1/2\le\operatorname{Re} s\le\tau$ jedyny biegun $s=1$ odpowiadający biegunowi funkcji $\zeta(s)$. Ponadto

$$\operatorname{Res}_{s=1}G(s)=\Gamma(1/2)\cdot 1\cdot\pi^{-1/2}y^{-1/2}=e^x,$$

ponieważ $\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$.

Z powyższego wynika, że wyrażenie otrzymane w Kroku 1 jest równe

$$\tfrac{1}{4e^{x/2}}\big(-2\pi i e^x+4\pi i\psi(e^{-2x})\big)=\tfrac{\pi}{2}\left(e^{x/2}-e^{-x/2}(\Omega(e^{-2x})-1\right)=$$
$$=\tfrac{\pi}{2}\left(2\cosh(x/2)-e^{-x/2}e^x\Omega(e^{2x})\right)=\tfrac{\pi}{2}\left(2\cosh(x/2)-e^{x/2}\Omega(e^{2x})\right).$$

Wykazaliśmy zatem, że

$$\int_0^\infty\frac{\Xi(t)\cos(tx)}{t^2+\frac14}dt=\frac{\pi}{2}\left(2\cosh(x/2)-e^{x/2}\Omega(e^{2x})\right).$$

Podstawiając $x\mapsto ix$ otrzymamy

$$\int_0^\infty\frac{\Xi(t)\cosh(tx)}{t^2+\frac14}dt=\frac{\pi}{2}\left(2\cos(x/2)-e^{ix/2}\Omega(e^{2ix})\right). \tag{2}$$

`Krok 3`

Korzystając z równania funkcyjnego dla $\Omega(x)$ dowodzi się, że

$$\lim_{x\to\pi/4}\frac{d^n}{dx^n}\Omega(e^{2ix})=0 \qquad \text{dla} \quad n\geq 0.$$

[Dowód pomijamy].

Wtedy również

$$\lim_{x\to\pi/4}\frac{d^n}{dx^n}\left(e^{ix/2}\Omega(e^{2\pi i})\right)=0 \qquad \text{dla} \quad n\geq 0. \tag{3}$$

`Krok 4`

Różniczkujemy $2n$ razy, gdzie $n=1,2,\dots$, względem x obie strony wzoru (2). Otrzymamy

$$\int_0^\infty\frac{\Xi(t)t^{2n}\cosh(tx)}{t^2+\frac14}dt=\frac{\pi}{2}\left(\frac{(-1)^n}{2^{2n-1}}\cos(x/2)-\frac{d^n}{dx^n}\left(e^{ix/2}\Omega(e^{2ix})\right)\right).$$

Obliczając granicę, gdy x dąży do $\pi/4$, otrzymamy na mocy (3)

$$\int_0^\infty\frac{\Xi(t)t^{2n}\cosh(\pi t/4)}{t^2+\frac14}dt=\pi\frac{(-1)^n}{2^{2n}}\cos(\pi/8). \tag{4}$$

Przypuśćmy, że liczba zer rzeczywistych funkcji $\Xi(x)$ jest skończona. Wtedy funkcja ta przyjmuje wartości stałego znaku dla dostatecznie dużych x.

Niech na przykład $\Xi(x)>0$ dla $x>T>0$.

Weźmy n nieparzyste. Wtedy prawa strona P wzoru (4) jest ujemna. Oszacujemy z dołu stronę lewą L.

Mamy

$$\left|\int_0^T\frac{\Xi(t)t^{2n}\cosh(\pi t/4)}{t^2+\frac14}dt\right|\leq T^{2n}\cdot\int_0^T\frac{|\Xi(t)|\cosh(\pi t/4)}{t^2+\frac14}dt=:C_1T^{2n},$$

$$\int_T^\infty\frac{\Xi(t)t^{2n}\cosh(\pi t/4)}{t^2+\frac14}dt\geq\int_{2T}^{2T+1}\frac{\Xi(t)t^{2n}\cosh(\pi t/4)}{t^2+\frac14}dt\geq$$

$$\geq(2T)^{2n}\min_{2T\leq t\leq 2T+1}\frac{\Xi(t)\cosh(\pi t/4)}{t^2+\frac14}=:C_2(2T)^{2n}.$$

Stałe dodatnie C_1 i C_2 nie zależą od n.

Mamy więc

$$0>P=L\geq C_2(2T)^{2n}-C_1T^{2n}=T^{2n}(2^{2n}C_2-C_1)>0$$

dla dostatecznie dużych n.

Uzyskana sprzeczność dowodzi, że funkcja $\Xi(x)$ ma nieskończenie wiele zer rzeczywistych. $\square$

2.5. Twierdzenie von Mangoldta.

Twierdzenie (H. von Mangoldt)**.** *Liczba zer funkcji $\zeta(s)$ w pasie krytycznym o części urojonej t, $0 \le t \le T$ jest równa*

$$N(T) = \frac{T}{2\pi}\log\left(\frac{T}{2\pi}\right) - \frac{T}{2\pi} + O(\log T).$$

Dowód. $\boxed{1}$ Liczba zer (z uwzględnieniem krotności) funkcji $f(s)$ w obszarze S o brzegu ∂S na mocy twierdzenia Cauchy'ego jest równa

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial S}\frac{f'(s)}{f(s)}ds,$$

przy założeniu, że $f(s)$ nie znika na ∂S.

Jako S weźmy prostokąt na płaszczyźnie zespolonej o wierzchołkach $A = -1 + i$, $B = 2 + i$, $C = 2 + iT$, $D = -1 + iT$, gdzie $T > 1$.

Zakładając, że $\zeta(s)$ nie znika na odcinku BC mamy więc

$$N(T) = \frac{1}{2\pi i}\left(I_{AB} + I_{BC} + I_{CD} + I_{DA}\right), \qquad \text{gdzie} \quad I_{PQ} = \int_P^Q \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}ds.$$

Ponieważ liczba $N(T)$ jest rzeczywista, więc

$$N(T) = \frac{1}{2\pi}\left(\operatorname{Im} I_{AB} + \operatorname{Im} I_{BC} + \operatorname{Im} I_{CD} + \operatorname{Im} I_{DA}\right).$$

Oszacujemy te składniki przy $T \to \infty$. Liczba I_{AB} nie zależy od T.

$\boxed{2}$ Udowodnimy, że $\operatorname{Im} I_{BC}$ jest ograniczone.

Dla $\operatorname{Re} s > 1$ mamy

$$\left(\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right)' = (\log\zeta(s))' = \left(-\sum_p \log\left(1 - \frac{1}{p^s}\right)\right)' = \left(\sum_p \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{mp^{ms}}\right)' =$$

$$= \sum_p \sum_{m=1}^{\infty}\frac{-m\log p}{mp^{ms}} = -\sum_p\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\log p}{p^{ms}} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^s},$$

gdzie

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p, & \text{jeżeli } n = p^m,\ m \ge 0, \\ 0, & \text{poza tym.} \end{cases}$$

Jest to tak zwana funkcja Mangoldta.

Zauważmy ogólnie, że podstawiając w całce $s=\sigma+it$ otrzymamy

$$\operatorname{Im}\int_{\sigma+ai}^{\sigma+bi} f(s)ds = \operatorname{Im}\int_a^b if(\sigma+it)dt = \int_a^b \operatorname{Re} f(\sigma+it)dt.$$

Wobec tego

$$\begin{aligned}\operatorname{Im} I_{BC} &= \operatorname{Im}\int_{2+i}^{2+iT} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}ds = -\operatorname{Im}\int_{2+i}^{2+iT}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^s}ds = \\ &= -\int_1^T \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^2}\operatorname{Re}(n^{-it})dt = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^2}\int_1^T \operatorname{Re}(n^{-it})dt.\end{aligned}$$

Mamy $\operatorname{Re}(n^{-it}) = \operatorname{Re}\left(e^{-it\log n}\right) = \cos(t\log n)$.

Wobec tego

$$\int_1^T \operatorname{Re}(n^{-it})dt = \int_1^T \cos(t\log n)dt = \frac{1}{\log n}\sin(t\log n)\Big|_{t=1}^{t=T}.$$

Zatem

$$\Big|\int_1^T \operatorname{Re}(n^{-it})dt\Big| \le \frac{2}{\log n},$$

co daje

$$\Big|\operatorname{Im} I_{BC}\Big| \le \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{\log n}\cdot\frac{1}{n^2} \le \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

$\boxed{3}$ Zajmiemy się teraz liczbą $\operatorname{Im} I_{DA}$.

Obliczając pochodną logarytmiczną obu stron równania funkcyjnego funkcji $\zeta(s)$

$$\pi^{-s/2}\,\Gamma(s/2)\,\zeta(s) = \pi^{-(1-s)/2}\,\Gamma((1-s)/2)\,\zeta(1-s)$$

otrzymamy

$$-\frac{1}{2}\log\pi + \frac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma'(s/2)}{\Gamma(s/2)} + \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \frac{1}{2}\log\pi - \frac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma'((1-s)/2)}{\Gamma((1-s)/2)} - \frac{\zeta'(1-s)}{\zeta(1-s)}.$$

Zatem

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \log\pi - \frac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma'(s/2)}{\Gamma(s/2)} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma'((1-s)/2)}{\Gamma((1-s)/2)} - \frac{\zeta'(1-s)}{\zeta(1-s)}. \tag{5}$$

Wobec tego obliczenie całki

$$\operatorname{Im} I_{DA} = \operatorname{Im}\int_{-1+iT}^{-1+i}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}ds$$

na mocy wzoru (5) sprowadza się do obliczenia odpowiednich czterech całek.

Zajmiemy się tym po kolei.

Mamy

$$\operatorname{Im} \int_{-1+Ti}^{-1+i} \log \pi ds = \operatorname{Im} \log \pi \int_{-1+Ti}^{-1+i} ds = \log \pi (1-T).$$

Następnie

$$-\operatorname{Im} \int_{-1+iT}^{-1+i} \frac{\zeta'(1-s)}{\zeta(1-s)} ds = \operatorname{Im} \int_{2-iT}^{2-i} \frac{\zeta'(w)}{\zeta(w)} dw,$$

gdzie podstawiliśmy $s \mapsto 1-w$.

W punkcie $\boxed{2}$ dowiedliśmy, że ta całka jest ograniczona przez $\dfrac{\pi^2}{6}$.

Pozostały do oszacowania dwie całki zawierające funkcję Γ.

Wykorzystamy wzór Stirlinga dla funkcji $\Gamma(s)$. Uogólnia on znany wzór

$$n! = \sqrt{2\pi n}(n/e)^n e^{\theta/12n}, \qquad \text{gdzie} \quad 0 < \theta < 1,$$

czyli

$$\log(n!) = n \log n - n + O(\log n).$$

Dla ustalonego $\sigma \in \mathbb{R}$ mamy

$$\operatorname{Im} \int_{\sigma+i}^{\sigma+iT} \frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} ds = \int_1^T \operatorname{Re} \frac{\Gamma'(\sigma+it)}{\Gamma(\sigma+it)} dt = T \log T - T + O(\log T).$$

W naszym przypadku podstawiając $s = 2w$ otrzymujemy

$$\operatorname{Im} \int_{-1+iT}^{-1+i} \frac{\Gamma'(s/2)}{\Gamma(s/2)} ds = 2 \operatorname{Im} \int_{(-1+iT)/2}^{(-1+i)/2} \frac{\Gamma'(w)}{\Gamma(w)} dw = -(T \log(T/2) - T + O(\log T)).$$

Ten sam wynik otrzymamy obliczając ostatnią całkę.

Zbierając wyniki otrzymujemy

$$\operatorname{Im} I_{DA} = (1-T)\log \pi + (T \log \frac{T}{2} - T + O(\log T)) + O(1) = T \log \frac{T}{2\pi} - T + O(\log T).$$

Można dowieść, że $\operatorname{Im} I_{CD} = O(\log T)$. Dowód pomijamy.

Mamy więc ostatecznie

$$N(T) = \frac{1}{2\pi}\left(T \log \frac{T}{2\pi} - T + O(\log T)\right) = \frac{T}{2\pi} \log \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + O(\log T). \qquad \square$$

LISTA PEWNYCH AUTORÓW Z 2. POŁOWY XIX WIEKU.

B. Riemann (1826–1866)

Ch. de la Vallée-Poussin (1866–1962)

J. Hadamard (1865–1962)

G.H. Hardy (1877–1947)

Th. Stieltjes (1856–1894)

H. von Mangoldt (1854–1925)

R.H. Mellin (1854–1933)

G. de Maupassant (1850–1893)

BIBLIOGRAFIA

[1] W. Narkiewicz, *The Development of Prime Number Theory,* Springer 2000.

[2] E.C. Titchmarsh, *The Theory of the Riemann Zeta-Function,* Oxford, Clarendon Press 1951.

[3] N. Levinson, *More than One Third of Zeros of Riemann's Zeta-Function are on* $\sigma = 1/2$, Adv. in Math. 13 (1974), 383–436.

[4] J.B. Conrey, *More than two fifths of the zeros of the Riemann zeta function are on the critical line,* J. reine angew. Math. 389 (1989), 1–26.