# Artykuł Stefana Banacha o “Prawie Najwyższym” Józefa Hoene-Wrońskiego

Paweł Domański

**Streszczenie**

Niniejsza praca zawiera omówienie artykułu Stefana Banacha z roku 1939 poświęconego autorskiej wersji “Prawa Najwyższego” oraz próbę wyjaśnienia jego zawartości na tle i w terminach współczesnej analizy funkcjonalnej.

## 1 Wstęp

Praca Józefa Hoene-Wrońskiego o “Prawie Najwyższym” wzbudziła zainteresowanie, które nie wygasało z upływem lat. Pisze o tym Samuel Dickstein, który przeanalizował ją w roku 1890 w artykule [9], a za pośrednictwem tej z kolei pracy w 1939 roku zajął się “Prawem Najwyższym” chyba najwybitniejszy polski matematyk Stefan Banach w [3]. W omawianej pracy Banach nie odwołuje się bezpośrednio do oryginalnych prac Hoene-Wrońskiego - jednak, jak wynika z zamieszczonego w tym tomie artykułu P. Pragacza, miał do nich dostęp.

Moim zdaniem Banach był specjalnie predestynowany do głębszego zrozumienia i zmodernizowania idei Hoene-Wrońskiego. To matematyk na wskroś nowoczesny - jego prace są dziś doskonale czytelne i, po naprawde drobnych zmianach w terminologii, mogłyby uchodzić za prace współczesne. Widać to szczególnie patrząc na standardy w zakresie ścisłości, precyzji, stylu dowodzenia itp. Mógł więc Banach przekształcić “mgławicowe” idee z początków XIX wieku w precyzyjne, dowodliwe twierdzenia. Przykładowo: Hoene-Wroński w ogóle nie mówi o zbieżności - dla Banacha to główne zagadnienie. Ale to nie jedyny powód, dla którego “był on odpowiednią osobą na odpowiednim miejscu” - Banach był zapewne jednym z niewielu matematyków końca lat 30-tych dwudziestego wieku, który mógł w pełni użyć języka i metod analizy funkcjonalnej. Minęło zaledwie 8 lat od ukazania się fundamentalnej książki Banacha “Teorja operacyj, tom I. Operacje liniowe” [1] będącej pierwszym systematycznym wykładem tego języka i tych metod. Minęło 7 lat od opublikowania wersji francuskiej [2] (wersji, a nie dokładnego tłumaczenia, różniła się ona bowiem układem i nieznacznie zawartością), która odegrała wielką rolę w rozwoju młodej dziedziny analizy, m.in zawierając wiele podstawowych dla rozwoju analizy funkcjonalnej pytań. Banach dostrzegł, że “Prawo Najwyższe” Hoene-Wrońskiego to fakt z analizy funkcjonalnej, który może i powinien być wyrażony w jej języku - moim zdaniem najbardziej adekwatnym.

W tym miejscu trzeba by w końcu zaspokoić ciekawość czytelnika i krótko wyjaśnić o czym mówi “Prawo Najwyższe”. Jest to pewna metoda znajdywania współczynników skalarnych $\alpha_i$ rozwinięcia “dowolnej” funkcji $f$ względem danego “dowolnego” ciągu funkcji $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ tak aby

$$f = \sum_i \alpha_i x_i.$$

Jak już wspomniałem autor tej idei nie zaprzątał sobie głowy zbieżnością szeregu, ale we współczesnym jej przedstawieniu (i oczywiście u Banacha) musi to być zagadnienie centralne.

W dalszej części pracy przedstawię wynik Banacha i skomentuję jego znaczenie, zakres stosowalności i zawarte tam idee - ich związek z pewnymi później rozwiniętymi pojęciami analizy funkcjonalnej. Cóż dowiadujemy się stąd o dziele samego Józefa Hoene-Wrońskiego? Przede wszystkim ideę “Prawa Najwyższego” dało się przekuć w ściśle sformułowane twierdzenie (co dla mnie jest ostatecznym dowodem jej “matematyczności”), a po drugie dokonał tego matematyk, którego wielkość jest oczywista - co dla niedowiarków może być pośrednią zachętą do przyjrzenia się tej idei. Czy odegrała ona dużą rolę w dalszym rozwoju matematyki? Tu odpowiedź jest trudniejsza - mam zbyt małą wiedzę historyczną aby odpowiedzieć na takie pytanie dotyczące lat przed artykułem Banacha. Jeśli chodzi o okres późniejszy, to nie znane mi są żadne przypadki cytowania pracy Banacha (co nie jest z pewnością dowodem zupełnego zapomnienia tej pracy). Ilu matematyków ją czytało? Z pewnością jest łatwo dostępna w edycji dzieł Banacha [4, str. 450-457].

Omawiana praca jest krótka i składa się z trzech części:

1. wprowadzenia używanych pojęć;
2. sformułowania i dowodu “Prawa Najwyższego”;
3. przykładów.

W takiej też kolejności będziemy ją omawiać. Przez $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}$ będziemy zawsze oznaczać dowolny ciąg skalarów. Pojęcia nie wyjaśnione można znaleźć np. w monografii [12].

## 2 Przestrzenie o własności $(A)$

Aby móc korzystać z zupełności i konsekwencji twierdzenia Baire'a dla niezupełnych przestrzeni unormowanych, Banach wprowadza specjalną klasę przestrzeni spełniających własność $(A)$. Ponieważ dla ustalonego ciągu wektorów $(x_i)$ w przestrzeni Banacha $E$ nie można oczekiwać, aby cała przestrzeń $E$ składała się z sum postaci $\sum_i \alpha_i x_i$ więc naturalnie pojawiają się niezupełne podprzestrzenie. Wprowadzona klasa przestrzeni potrzebna jest m.in. aby uzyskać zbieżność rozpatrywanych szeregów w na ogół niezupełnej przestrzeni unormowanej. Banach swoje wyniki formułuje dla przestrzeni Banacha i przestrzeni unormowanych, ale wydaje mi się, że właściwszą ramą jest klasa przestrzeni lokalnie wypukłych i dla nich będę definiował wprowadzone pojęcia.

**Definicja 2.1** *Przestrzeń lokalnie wypukła $E$ ma własność $(A)$, gdy dla każdego ciągu $(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset E$ istnieje ciąg dodatnich liczb rzeczywistych $(M_i)_{i\in\mathbb{N}}$ taki, że dla każdego ciągu skalarów $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}$ zachodzi warunek: jeśli szereg $\sum_i |\alpha_i| M_i < +\infty$, to szereg $\sum_i \alpha_i x_i$ jest zbieżny w przestrzeni $E$.*

Banach podaje w sposób jawny tylko jeden przykład przestrzeni z własnością $(A)$ - przestrzeń Banacha, ale z jego pracy można takich przykładów wysnuć więcej (por. [3, Satz 1]).

**Twierdzenie 2.2** *Następujące przestrzenie mają własność $(A)$:*

1. *Przestrzeń Banacha.*
2. *Przestrzeń Frécheta ( = metryzowalna zupełna przestrzeń lokalnie wypukła).*
3. *Obraz ciągły i liniowy przestrzeni z własnościa $(A)$.*
4. *Dowolna przestrzeń lokalnie wypukła posiadająca mocniejszą od oryginalnej topologię przestrzeni Banacha, Frécheta lub, ogólniej, z własnością $(A)$.*
5. *Podprzestrzeń domknięta przestrzeni lokalnie wypukłej z własnością $(A)$.*
6. *Przekrój ciągu przestrzeni z własnością $(A)$.*

**Dowód:** 1. Weźmy $M_i := \|x_i\|$, wówczas

$$\sum_i \|\alpha_i x_i\| \leqslant \sum_i |\alpha_i| M_i < \infty.$$

Zatem szereg $\sum_i \alpha_i M_i$ jest nawet absolutnie zbieżny w rozpatrywanej przestrzeni Banacha $E$, jeśli tylko $\sum_i |\alpha_i| M_i < \infty$.

2. Niech topologia przestrzeni Frécheta $E$ będzie zadana ciągiem półnorm $\|\cdot\|_n$, $n \in \mathbb{N}$. Zdefiniujmy $M_i := \max_{1\leqslant n \leqslant i} \|x_i\|_n$. Zatem podobnie jak w przypadku 1. można udowodnić, że szereg $\sum_i \alpha_i x_i$ jest absolutnie zbieżny (tj. $\sum_i \|\alpha_i x_i\|_n$ jest zbieżny dla każdego $n \in \mathbb{N}$), o ile tylko $\sum_i |\alpha_i| M_i < \infty$.

3. Załóżmy, że $T : Y \to X$ jest surjektywnym operatorem liniowym i ciągłym, a $X$ i $Y$ są przestrzeniami lokalnie wypukłymi. Dodatkowo załóżmy, że $Y$ ma własność $(A)$. Weźmy teraz dowolny ciąg $(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset X$, wówczas dla każdego $i \in \mathbb{N}$ istnieje wektor $y_i \in Y$ taki, że $Ty_i = x_i$. Z własności $(A)$ otrzymamy ciąg liczb rzeczywistych dodatnich $(M_i)_{i\in\mathbb{N}}$ taki, że jeśli $\sum_i |\alpha_i| M_i < \infty$, to szereg $\sum_i \alpha_i y_i$ jest zbieżny w $Y$. Wówczas również szereg $\sum_i \alpha_i x_i = \sum_i \alpha_i T y_i$ jest zbieżny.

4. Wystarczy zastosować punkt 3. powyżej do operatora identycznościowego na rozpatrywanej przestrzeni z dwiema różnymi topologiami (por. część 1. i 2.).

5. Oczywiste.

6. Niech $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bedzie ciągiem posiadających własność $(A)$ podprzestrzeni wiekszej przestrzeni lokalnie wypukłej. Oznaczmy $X := \bigcap_n X_n$. Niech $(x_i) \subset X$. Z własności $(A)$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$ istnieje ciąg dodatnich liczb rzeczywistych $(M_i^n)_{i\in\mathbb{N}}$ taki, że jeśli $\sum_i |\alpha_i| M_i^n < \infty$, to szereg $\sum_i \alpha_i x_i$ jest zbieżny w $X_n$. Łatwo zauważyć, że ciąg $(M_i)_{i\in\mathbb{N}}$, $M_i := \max_{1\leqslant n\leqslant i} M_i^n$, spełnia warunki z definicji własności $(A)$ dla ciągu wektorów $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ w przestrzeni $X$. $\square$

W powyższym dowodzie nie przypadkiem pojawia się zbieżność absolutna. Następne twierdzenie (dla unormowanych przestrzeni $E$ udowodnione w analizowanej pracy Banacha) wykorzystuje "typową" ideę Banacha - a dziś powiedzielibyśmy: jeden z typowych "chwytów" analizy funkcjonalnej.

**Twierdzenie 2.3** *(por. [3, Satz 2 a]) Niech $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem elementów w dowolnej zupełnej przestrzeni lokalnie wypukłej $E$, a $(M_i)_{i\in\mathbb{N}}$ będzie dowolnym ciągiem liczb dodatnich. Następujące warunki są równoważne:*

1. *Dla każdego ciągu skalarów $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}$, jeśli szereg $\sum_i |\alpha_i| M_i$ jest zbieżny, to szereg $\sum_i \alpha_i x_i$ jest zbieżny w $E$.*

2. *Dla każdej półnormy ciągłej $p$ na $E$ istnieje stała $K_p$ taka, że dla każdego ciągu skalarów $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}$ zachodzi nierówność:*

$$p\left(\sum_i \alpha_i x_i\right) \leqslant K_p \sum_i |\alpha_i| M_i.$$

3. *Ciąg $\left(\frac{x_i}{M_i}\right)_{i\in\mathbb{N}}$ jest ograniczony.*

4. *Dla każdego ciągu skalarów $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}$, jeśli szereg $\sum_i |\alpha_i| M_i$ jest zbieżny, to szereg $\sum_i \alpha_i x_i$ jest absolutnie zbieżny w przestrzeni $E$.*

**Dowód:** 1. $\Rightarrow$ 2. Definiujemy przestrzeń Banacha

$$H := \ell_1((M_i)_{i\in\mathbb{N}}) := \{\alpha = (\alpha_i) : \|\alpha\| := \sum_i |\alpha_i| M_i < \infty\}.$$

Ponadto definiujemy ciągłe operatory liniowe $U_n : H \to E$,

$$U_n((\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}) := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i.$$

Z warunku 1. ciąg $U_n$ jest punktowo zbieżny a z twierdzenia Banacha-Steinhausa, wynika, że granica jest ciągłym operatorem liniowym $U : H \to E$, $U((\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}) = \sum_i \alpha_i x_i$. Ciągłość $U$ natychmiast implikuje warunek 2.

Implikacje 2. ⇒ 3. ⇒ 4. ⇒ 1. są oczywiste. □

Przyglądając się nieco uważniej dowodowi implikacji 1. ⇒ 2. zauważymy, że udowodniliśmy faktycznie (zupełność, lub tylko lokalna zupełność - por. definicja niżej, jest potrzebna tylko w implikacji 3. ⇒ 4.):

**Wniosek 2.4** *(por. [3, Satz 3]) Niech $(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset E$ będzie ciągiem wektorów w przestrzeni lokalnie wypukłej $E$, a $(M_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ciągiem liczb dodatnich takim, że jeśli szereg $\sum_i |\alpha_i| M_i$ jest zbieżny, to szereg $\sum_i \alpha_i x_i$ jest zbieżny w przestrzeni $E$. Wówczas przestrzeń*

$$L := \left\{ \sum_i \alpha_i x_i : \sum_i |\alpha_i| M_i < \infty \right\} \subseteq E$$

*jest ciągłym liniowym obrazem przestrzeni Banacha, a zatem posiada własność $(A)$. Innymi słowy ciąg $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ jest zawarty w podprzestrzeni o własności $(A)$.*

Używając współczesnej terminologii należałoby się odwołać do pojęcia dysku Banacha.

**Definicja 2.5** *Ograniczony zbiór absolutnie wypukły nazywamy dyskiem. Dysk $B$ w przestrzeni lokalnie wypukłej $E$ nazywamy dyskiem Banacha, jeśli przestrzeń unormowana $E_B$ zdefiniowana jako powłoka liniowa zbioru $B$ wyposażona w normę:*

$$\|x\|_B := \inf\{\lambda : x/\lambda \in B\}$$

*jest zupełna, a zatem jest przestrzenią Banacha.*

Łatwo zauważyć, że

$$K_B(0,1) \subseteq B \subseteq \overline{K}_B(0,1),$$

gdzie $K_B$, $\overline{K}_B$ to dopowiednio kula otwarta i kula domknięta w przestrzeni $E_B$. Zatem dyski Banacha to "prawie" ciągłe obrazy liniowe kul jednostkowych w przestrzeniach Banacha:

**Wniosek 2.6** *Dysk $B$ jest dyskiem Banacha wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje ciągły obraz liniowy $C$ kuli jednostkowej w przestrzeni Banacha taki, że $C \subseteq B \subseteq 2C$.*

Więcej o dyskach Banacha patrz [16, Ch. 3.2]

**Wniosek 2.7** *Niech $E$ będzie dowolną przestrzenią lokalnie wypukłą. Następujące warunki są równoważne:*

1. *Przestrzeń $E$ ma własność $(A)$.*
2. *Każdy ciąg elementów przestrzeni $E$ jest zawarty w ciągłym liniowym obrazie przestrzeni Banacha zawartym w przestrzeni $E$.*
3. *Każdy ciąg elementów przestrzeni $E$ jest zawarty w powłoce liniowej dysku Banacha.*

*4. Każdy ciąg elementów przestrzeni $E$ jest zawarty w ciągłym liniowym obrazie przestrzeni Frécheta zawartym w przestrzeni $E$.*

**Dowód:** 1. $\Rightarrow$ 2. Wniosek 2.4.

2. $\Leftrightarrow$ 3. $\Rightarrow$ 4. Oczywiste (por. wniosek 2.6).

4. $\Rightarrow$ 1. Twierdzenie 2.2. $\square$

Banach chyba nie zastanawiał się jakie przestrzenie unormowane mają własność $(A)$ (przynajmniej nie ma po tym śladu w jego pracy) - powyższy wniosek w pewnym sensie odpowiada na to pytanie. W szczególności implikuje on, że przestrzeń z własnością $(A)$ może być albo skończenie wymiarowa albo nieprzeliczalnie wymiarowa (podobnie jak przestrzenie Banacha). Warto jednak zauważyć, że istnieją unormowane przestrzenie posiadające własność $(A)$, które nie są obrazami ciągłymi i liniowymi przestrzeni Banacha.

**Dowód:** Weźmy np. przestrzeń Frécheta ciągów szybko malejących do zera

$$s := \{x = (x_i) : \forall k \in \mathbb{N} \quad \|x\|_k := \sum_i |x_i| n^k < \infty\}.$$

Oczywiście $s$ jest w sposób ciągły zanurzona w przestrzeń Banacha ciągów ograniczonych $\ell_\infty$ i, wyposażona w jej normę, jest przestrzenią unormowaną. Z twierdzenia 2.2 ma własność $(A)$, ale z twierdzenia o domkniętym wykresie nie może być ciągłym obrazem liniowym przestrzeni Banacha. $\square$

Okazuje się, że własność $(A)$ jest blisko związana z tzw. lokalną zupełnością.

**Definicja 2.8** *Ciąg $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ w przestrzeni lokalnie wypukłej $E$ jest lokalnie Cauchy'ego (lokalnie zbieżny) o ile istnieje dysk $B$ w $E$ taki, że $(x_i)$ jest ciągiem Cauchy'ego (ciągiem zbieżnym) w $E_B$. Ciąg $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ jest szybko zbieżny jeśli istnieje dysk Banacha $B \subset E$ taki, że ciąg $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ jest zbiezny w $E_B$. Przestrzeń $E$ jest lokalnie zupełna, jeśli każdy ciąg lokalnie Cauchy'ego jest lokalnie zbieżny.*

Porównajmy teraz wniosek 2.7 z poniższym faktem:

**Twierdzenie 2.9** *([16, Prop. 5.1.6]) Przestrzeń lokalnie wypukła $E$ jest lokalnie zupełna wtedy i tylko wtedy, gdy każdy ciąg ograniczony w $E$ jest zawarty w pewnym dysku Banacha.*

Stąd i z wniosku 2.7 otrzymujemy natychmiast:

**Wniosek 2.10** *Lokalnie zupełna przestrzeń lokalnie wypukła $E$ ma własność $(A)$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego ciągu $(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset E$ istnieje ciąg dodatnich skalarów $(M_i)_{i\in\mathbb{N}}$ taki, że ciąg $\left(\frac{x_i}{M_i}\right)_{i\in\mathbb{N}}$ jest ograniczony w przestrzeni $E$.*

Z drugiej strony wszystkie unormowane przestrzenie niezupełne z własnością $(A)$ nie są lokalnie zupełne (por. [16, Cor. 5.1.9]). Co więcej, oczywiście zupełne LB-przestrzenie nie mają własności $(A)$, np. przestrzenie dualne z silną topologią do dowolnej przestrzeni nuklearnej Frécheta.

**Wniosek 2.11** *Szereg spełniający założenia wniosku 2.4 jest szybko zbieżny.*

Warto powyższy wniosek porównać ze znanym faktem mówiącym, że każda $E$ wartościowa funkcja holomorficzna ($E$ przestrzeń lokalnie wypukła, ciągowo zupełna) rozwija się lokalnie w szereg Taylora zbieżny nie tylko w przestrzeni $E$, ale także szybko, tzn. dla każdego punktu $x$ z dziedziny funkcji istnieje dysk Banacha $B$ taki, że szereg Taylora funkcji wokół $x$ jest zbieżny w $E_B$ (por. [6]).

Dyski Banacha okazały się doskonałym narzędziem współczesnej teorii przestrzeni lokalnie wypukłych i jej nowoczesnych zastosowań (np. teorii równań różniczkowych, analizy fourierowskiej...). Przypomnijmy jeszcze jedną definicję [12]:

**Definicja 2.12** *Przestrzeń lokalnie wypukła $E$ jest ultrabornologiczna jeśli każdy absolutnie wypukły zbiór $U \subset E$ pochłaniający wszystkie dyski Banacha (tj. taki, że dla każdego dysku Banacha $B \subset E$ istnieje stała $C$ spełniająca inkluzję $B \subset CU$) jest otoczeniem zera w $E$.*

Przykładami przestrzeni ultrabornologicznych są wszystkie przestrzenie Frécheta i ich przeliczalne granice induktywne (np. przestrzeni funkcji holomorficznych lub gładkich ze zwykłą topologią, przestrzenie dystrybucji i dystrybucji o zwartym nośniku ale także przestrzeń funkcji analitycznych zmiennej rzeczywistej z jej naturalną topologią [7] itp.). Mimo nieco "barokowej" nazwy pojęcie to odgrywa ważną rolę we współczesnej analizie funkcjonalnej.

De Wilde udowodnił, że dla operatorów działających z przestrzeni ultrabornologicznej do "porządnych" przestrzeni (m.in. do każdego z wymienionych wyżej przykładów) twierdzenie o domkniętym wykresie jest prawdziwe [12, 24.31].

Inny przykład zastosowania pojęcia przestrzeni ultrabornologicznej, to twierdzenie mówiące, że liniowy operator różniczkowy cząstkowy o stałych współczynnikach jest surjekcją na przestrzeni dystrybucji $\mathscr{D}'(\Omega)$ wtedy i tylko wtedy, gdy jego jądro jest ultrabornologiczne (por. [17, Cor. 3.3.10, Sec. 3.4.5]).

Idea do pewnego stopnia jest ta sama co u Banacha - korzystać z twierdzenia Baire'a tam gdzie na pozór nie można tego robić.

# 3 Funkcjonały dopuszczalne

Oprócz odpowiednich przestrzeni Banach używa jeszcze odpowiednich funkcjonałów precyzując jaki to "dowolny" ciąg funkcjonałów można wykorzystać w "Prawie Najwyższym". Oczywiście nie mogą one być całkiem dowolne, ale nie można też ograniczyć się wyłącznie do ciągłych funkcjonałów liniowych.

**Definicja 3.1** *Jeśli $E$ jest przestrzenią lokalnie wypukłą to $\mathcal{B}^x(E)$ oznacza najmniejszy zbiór addytywnych odwzorowań $f : E \to \mathbb{K}$, $\mathbb{K}$ ciało skalarów zespolonych albo rzeczywistych, taki, że*

1. *wszystkie ciągłe odwzorowania addytywne $f : E \to \mathbb{K}$ należą do $\mathcal{B}^x(E)$;*
2. *zbiór $\mathcal{B}^x(E)$ jest zamknięty na operacje granic punktowych ciągów.*

*Klasa $\mathcal{B}^x$ składa się ze wszystkich zbiorów $\mathcal{B}^x(E)$.*

Wszystkie funkcje $f \in \mathcal{B}^x(E)$ są borelowsko mierzalne i liniowe. Faktycznie, obcięcia funkcji $f \in \mathcal{B}^x(E)$ do podprzestrzeni liniowych jednowymiarowych są odwzorowaniami addytywnymi i, z twierdzenia [1, IIIA, tw. 6], ciagłymi na przestrzeni Banacha a zatem są jednorodne.

Zauważmy, że funkcje z klasy $\mathcal{B}^x$ nie muszą być ciągłe, tym nie mniej Banach pokazał, że zachowują się one bardzo podobnie jak funkcje ciągłe względem szeregów zbieżnych w odpowiedni sposób i ta własność odgrywać będzie kluczową rolę w dowodzie "Prawa Najwyższego". Sformułujemy tę własność w terminach topologii ultrabornologicznych.

**Definicja 3.2** *([16, Def. 2.2.4]) Topologią ultrabornologiczną stowarzyszoną z topologią lokalnie wypukłą $\tau$ na przestrzeni $E$ nazywamy topologię, której bazą otoczeń zera jest rodzina wszystkich absolutnie wypukłych podzbiorów pochłaniających wszystkie dyski Banacha w $(E, \tau)$. Przestrzeń $E$ z topologią ultrabornologiczną stowarzyszoną z oryginalną topologią przestrzeni lokalnie wypukłej $E$ oznaczamy $E^{ub}$.*

Topologia ultrabornologiczna stowarzyszona z $\tau$, to najsłabsza topologia ultrabornologiczna silniejsza niż $\tau$. Każdy ciąg szybko zbieżny w $E$ jest automatycznie zbieżny w $E^{ub}$.

**Twierdzenie 3.3** *Jeśli $f \in \mathcal{B}^x(E)$, $E$ przestrzeń lokalnie wypukła, to $f$ jest ciągłym funkcjonałem liniowym na przestrzeni $E^{ub}$, tj. $f \in (E^{ub})'$.*

**Dowód:** Weźmy dowolny dysk Banacha $B$ w $E$. Wówczas $f \in \mathcal{B}^x(E_B)$, a z [1, IIIA, tw. 6.], $f$ jest funkcjonałem ciągłym na $E_B$. Z definicji $E^{ub}$, $f \in (E^{ub})'$. □

Wykorzystując wniosek 2.11 otrzymujemy wynik w sformułowaniu Banacha:

**Wniosek 3.4** *(por. [3, Satz 2 b]) Niech $E$ będzie przestrzenią lokalnie wypukłą, a $f \in \mathcal{B}^x(E)$. Załóżmy, że dla ciągu $(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset E$ istnieje ciąg dodatnich liczb $(M_i)_{i\in\mathbb{N}}$ taki, że jeśli szereg $\sum_i |\alpha_i| M_i < \infty$, to szereg $\sum_i \alpha_i x_i$ jest zbieżny w przestrzeni $E$. Wówczas jeśli szereg $\sum_i |\alpha_i| M_i < \infty$, to*

$$f\left(\sum_i \alpha_i x_i\right) = \sum_i \alpha_i f(x_i).$$

**Twierdzenie 3.5** *(por. [3, Satz 4]) Niech $(E_n)$ bedzie ciągiem podprzestrzeni o własności $(A)$ w przestrzeni lokalnie wypukłej $E$ oraz niech $f_n \in \mathcal{B}^x(E_n)$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Wówczas*

$$L := \{x \in \bigcap_n E_n : (f_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \text{ ciąg zbieżny}\}$$

*jest podprzestrzenią liniową z własnością $(A)$.*

**Dowód:** Łatwo zauważyć, że $L$ jest podprzestrzenią liniową. Niech teraz $(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset L$ będzie dowolnym ciągiem. Niech $(M_i^n)_{i\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem związanym z $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ jako ciągiem w $E_n$ zgodnie z definicja własności $(A)$. Niech ponadto

$$M_i := \max\left(\sup_n |f_n(x_i)|, \max_{1\leqslant n\leqslant i} M_i^n\right)$$

i załóżmy, że $\sum_i |\alpha_i| M_i < \infty$. Oczywiście szereg $\sum_i \alpha_i x_i$ jest zbieżny w $E_n$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$, więc suma należy do $\bigcap_n E_n$. Z wniosku 3.4

$$\left| f_n\left(\sum_{i=N+1}^{\infty} \alpha_i x_i\right)\right| = \left|\sum_{i=N+1}^{\infty} \alpha_i f(x_i)\right| \leqslant \sum_{i=N+1}^{\infty} |\alpha_i| M_i.$$

Niech $p, q$ będą dowolnymi liczbami naturalnymi, zatem z poprzedniego oszacowania

$$\left| f_p\left(\sum_i \alpha_i x_i\right) - f_q\left(\sum_i \alpha_i x_i\right)\right| \leqslant \left| f_p\left(\sum_{i=1}^{N} \alpha_i x_i\right) - f_q\left(\sum_{i=1}^{N} \alpha_i x_i\right)\right| + 2\sum_{i=N+1}^{\infty} |\alpha_i| M_i.$$

Pierwszy wyraz jest mały dla ustalonego $N$ i dostatecznie dużych $p, q$, a drugi dla dostatecznie dużego $N$. Zatem ciąg $(f_n(\sum_i \alpha_i x_i))_{n\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem Cauchy'ego, a suma $\sum_i \alpha_i x_i$ należy do $L$. □.

**Twierdzenie 3.6** *(por. [3, Satz 5]) Niech $E$ bedzie przestrzenią lokalnie wypukłą z własnością $(A)$. Wówczas dla każdej podprzestrzeni liniowej $X \subseteq E$ każdy $f \in \mathcal{B}^x(X)$ daje się rozszerzyć do funkcjonału $F \in \mathcal{B}^x(Y)$, $X \subseteq Y \subseteq E$, gdzie $Y$ ma własność $(A)$.*

**Dowód:** Niech $\mathcal{B}^r(X)$ będzie rodziną tych funkcjonałów, które spełniają tezę niniejszego twierdzenia. Nietrudno wykazać, że klasa $\mathcal{B}^r(X)$ zawiera wszystkie funkcjonały liniowe ciągłe i jest zamknięta na branie granic punktowych ciągów (wykorzystamy tu twierdzenie 3.5). Ponieważ $\mathcal{B}^x(X)$ jest z definicji najmniejszą taką klasą, więc $\mathcal{B}^x(X) \subset \mathcal{B}^r(X)$. □

Podsumowując:

**Wniosek 3.7** *Jeśli ciąg $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ jest zawarty w przestrzeni lokalnie wypukłej z własnościa $(A)$, a ciąg funkcjonałów $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ należy do klasy $\mathcal{B}^x$ i każdy z nich jest określony na wszystkich elementach ciągu $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$, to można bez utraty ogólności założyć, że $(f_n)$ są określone na pewnej przestrzeni $L\subset E$ o własności $(A)$ takiej, że $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}\subset L$.*

## 4 Sformułowanie "Prawa Najwyższego" według Banacha

Niech teraz $E$ będzie przestrzenią lokalnie wypukłą z własnościa $(A)$ a $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ będzie dowolnym jej ciągiem elementów. Niech ponadto $(f_n)$ będzie ciągiem funkcjonałów należących do klasy $\mathcal{B}^x$, wszystkie one są zdefiniowane przynajmniej na wszystkich elementach ciągu $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$, oraz dla każdego $n\in\mathbb{N}$ wektory $v_i := (f_1(x_i),\ldots,f_n(x_i))$ dla $i=1,\ldots,n$ tworzą układ liniowo niezależny. Z wniosku 3.7 można założyć, że wszystkie $(f_n)$ są zdefiniowane na przestrzeni liniowej $L$, $(x_i)\subset L\subset E$ mającej własność $(A)$.

Zdefiniujmy teraz

$$W_{m,n}(x) := \det\begin{vmatrix} f_1(x_1) & \ldots & f_1(x_{m-1}) & f_1(x) & f_1(x_{m+1}) & \ldots & f_1(x_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f_n(x_1) & \ldots & f_n(x_{m-1}) & f_n(x) & f_n(x_{m+1}) & \ldots & f_n(x_n) \end{vmatrix}.$$

Z założenia liniowej niezależności wektorów $v_i$ wynika, że $W_{m,n}(x_m)\neq 0$. Oczywiście funkcjonały $F_{m,n}$ zdefiniowane wzorem $F_{m,n}(x) := \frac{W_{m,n}(x)}{W_{m,n}(x_m)}$ należą do klasy $\mathcal{B}^x(L)$ dla $1\leqslant m\leqslant n$. Ponadto dla $1\leqslant i\leqslant n$, $i=m$, $F_{m,n}(x_i)=1$, a dla $1\leqslant i\leqslant n$, $i\neq m$, $F_{m,n}(x_i)=0$.

Zdefiniujmy funkcjonał:

$$\Phi_m(x) := \lim_{n\to\infty} F_{m,n}(x).$$

Oznaczmy przez $L_m$ przestrzeń, na której zdefiniowany jest funkcjonał $\Phi_m$, tj.

$$L_m := \{x\in L : (F_{m,n}(x))_{n\in\mathbb{N}} \text{ jest zbieżny}\}.$$

**Twierdzenie 4.1** *("Prawo Najwyższe") Przy powyższych założeniach przestrzeń $Y := \bigcap_m L_m$ ma własność $(A)$ i jeśli $x\in Y$ oraz $x=\sum_i \alpha_i x_i$ (zbieżność szeregu w $Y^{ub}$), to zachodzi warunek:*

$$x=\sum_i \Phi_i(x)x_i \qquad (\textit{tj. } \Phi_i(x)=\alpha_i \textit{ dla } i\in\mathbb{N}).$$

Banach sformułował swoją wersję nieco inaczej, w naszej terminologii brzmiałaby ona tak:

**Twierdzenie 4.2** *("Prawo Najwyższe" wersja Banacha) Przy powyższych założeniach istnieje dysk Banacha $B\subset Y := \bigcap_m L_m$ taki, że $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}\subset E_B\subset E$ oraz dla każdego $x\in E_B$ zachodzi równość*

$$x=\sum_i \Phi_i(x)x_i$$

*(zbieżność w $E_B$, $E^{ub}$ i $E$).*

**Dowód:** Oczywiście funkcjonały $\Phi_m$ są dobrze zdefiniowane dla $x_i$, $i\in\mathbb{N}$ oraz

$$\Phi_m(x_i)=\begin{cases}1 & \text{dla } i=m,\\ 0 & \text{dla } i\neq m.\end{cases}$$

Oznacza to, że ciąg $(x_i)$ jest zawarty w przestrzeni zbieżności ciągu funkcjonałów $(F_{m,n})_{n\geqslant m}$ dla każdego $m\in\mathbb{N}$. Z twierdzenia 3.5 wynika, że przestrzeń $L_m$ ma własność $(A)$, a z twierdzenia 2.2 wynika, że $Y$ ma również własność $(A)$ oraz $\Phi_m\in\mathcal{B}^x(Y)$.

Z własności $(A)$ istnieje teraz ciąg liczb dodatnich $(M_i)$ taki, że szereg $\sum_i \alpha_i x_i$ jest zbieżny w $Y$ o ile $\sum_i |\alpha_i| M_i < \infty$. Z wniosku 2.11 istnieje dysk Banacha $B \subset Y \subset E$ taki, że szereg $\sum_i \alpha_i x_i$ jest zbieżny w $E_B$. Z twierdzenia 3.3, $\Phi_i \in (Y^{ub})'$, więc jeśli $x = \sum_i \alpha_i x_i$, to $\Phi_i(x) = \alpha_i$. □

Warto zauważyć, że $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ jest faktycznie bazą w $E_B$. Aby w konkretnym przypadku opisać przestrzeń $Y$ i $E_B$ trzeba by znać ciąg $(M_i)$, a to jest możliwe tylko w niektórych przypadkach. Trudno też *a priori* sprawdzić kiedy $x$ należy do $Y$ i jest postaci $x = \sum_i \alpha_i x_i$. Ponieważ ciąg $(\Phi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ nie musi być totalny na $Y$, więc nawet jeśli $\sum_i |\Phi_i(x)| M_i < \infty$, to nadal nie wiemy czy

$$x = \sum_i \Phi_i(x) x_i?$$

Jeśli jednak w jakiejś przestrzeni rozwinięcie względem ciągu $(x_i)$ jest jednoznaczne, to musi się na $E_B$ pokrywać z rozwinięciem uzyskanym powyższą metodą. A więc np. jeśli $(x_i)$ jest bazą Schaudera w $E$. Niestety wzór na funkcjonały współczynnikowe jest uzyskany tylko dla pewnej podprzestrzeni $Y$.

Banach podaje dwa przykłady zastosowania swojego twierdzenia. Oba w przestrzeni Banacha $E = C[0,1]$ funkcji ciągłych na przedziale jednostkowym z normą supremum. W jednym przykładzie ciąg $(f_i)$ to ciąg funkcjonałów liniowych i ciągłych przyporządkowujących funkcji $x \in E$ jej różnice w zerze względem przyrostów $1/n$ rzędu $n-1$. W drugim przykładzie różnice zastąpione są pochodnymi kolejnych rzędów funkcji $x$ w zerze. W tym przypadku funkcjonały są zdefiniowane na podprzestrzeniach funkcji $n$-krotnie różniczkowalnych w zerze i nie są ciągłe na $E$, ale należą do klasy $\mathcal{B}^x$. Rachunki pokazują, że jeśli $x_i(t) := t^{i-1}$ to rozwinięcie uzyskane za pośrednictwem "Prawa Najwyższego" pokrywa się z rozwinięciem Taylora w zerze. Proszę jednak zwrócić uwagę, że jeśli wystartowalibyśmy od innego ciągu funkcjonałów $(f_i)$, to zachowując ten sam ciąg $(x_i)$ powinniśmy uzyskać również rozwinięcie Taylora (przynajmniej dla pewnej podklasy $Y$ funkcji ciągłych na odcinku $[0,1]$).

Oczywiście "Prawo Najwyższe" kojarzy się z pojęciem bazy ewentualnie z wielomianami ortogonalnymi:

**Definicja 4.3** *Ciag $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ jest bazą w przestrzeni lokalnie wypukłej $E$ o ile dla każdego elementu $x \in E$ istnieje dokładnie jeden ciąg skalarów $(\alpha_i)_{i \in \mathbb{N}}$ taki, że $x = \sum_i \alpha_i x_i$. Baza $(x_i)$ jest bazą Schaudera o ile funkcjonały współczynnikowe (tj. przyporządkowujące wektorowi $x$ skalar $\alpha_i$) są ciągłe.*

W wielu przypadkach (np. gdy $E$ jest przestrzenią Frécheta) każda baza jest automatycznie bazą Schaudera, por. [11, Ch. 14.2].

Wydaje mi się, że związek "Prawa Najwyższego" z pojęciem bazy jest dość powierzchowny. W pierwszym przypadku startujemy od dowolnego ciągu, dla którego istnieje ciąg odpowiednich funkcjonałów $(f_i)$. Oczywiście wówczas ciąg $(x_i)$ musi być liniowo niezależny, ale z twierdzenia 4.1 wynika, że musi istnieć nawet ciąg $(g_i)$ funkcjonałów z klasy $\mathcal{B}^x$ takich, że

$$g_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } i = j, \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

Zatem para $(x_i, g_i)$ tworzy ciąg "biortogonalny" z na ogół nieciągłymi funkcjonałami $(g_i)$ na przestrzeni $Y$. Staje się on "prawdziwym" ciągiem biortogonalnym z ciągłymi funkcjonałami na przestrzeni $Y^{ub}$. Ciąg $(x_i)$ tworzy bazę pewnej, w praktyce trudno wyodrebnialnej, podprzestrzeni w przestrzeni $E$. Waga pojęcia bazy polega natomiast na możliwości rozwinięcia każdego elementu przestrzeni. W twierdzeniu 4.2 dostajemy informację, że tylko pewne elementy można rozwinąć, ale za to mamy "algorytm" znajdywania współczynników i właśnie ten aspekt algorytmiczny zbliża nas do pojęcia układu ortogonalnego, gdzie współczynniki rozwinięcia oblicza się łatwo.

"Prawo Najwyższe" widzę więc raczej jako metodę wyznaczania funkcjonałów biortogonalnych — współcześnie bardzo naturalną, ale w czasach Hoene-Wrońskiego jak się zdaje nowatorską.

Pojęcie bazy wiąże się nierozerwalnie ze sławnym problemem bazy: pytaniem postawionym przez Banacha czy każda ośrodkowa przestrzeń Banacha ma bazę [1, str. 141]? Waga tego na pozór abstrakcyjnego problemu bierze się stąd, że warto mieć rozkład funkcji na prostsze cegiełki i możliwość utożsamiania jej z ciągiem jej współczynników rozwinięcia, tak jak warto rozwijać np. funkcje całkowalne względem układu Haara, funkcje gładkie na odcinku względem wielomianów Czebyszewa czy funkcje holomorficzne względem jednomianów. Szczególnie użyteczne są bazy składające się z "porządnych" funkcji.

Jak wiadomo problem bazy ma negatywne rozwiązanie (Enflo 1973, [10]). Również w innych klasach przestrzeni lokalnie wypukłych rozwiązanie analogicznego problemu jest negatywne: np. w bardzo ważnej klasie nuklearnych przestrzeni Frécheta udowodnili to Mityagin i Zobin [14] w roku 1974. Jest też dobra wiadomość: znane naturalne ośrodkowe przestrzenie Banacha i Frécheta - te które pojawiają się w analitycznych zastosowaniach - mają bazę (patrz np. [18], [12, Ex. 29.5]): np. przestrzenie funkcji ciągłych na typowych zbiorach, przestrzenie $L_p$, klasy Hardy'ego, Bergmana, przestrzenie funkcji gładkich na porządnych zbiorach, przestrzenie dystrybucji temperowanych i funkcji holomorficznych na porządnych zbiorach. Podobnie jest dla niemetryzowalnych naturalnych przestrzeni lokalnie wypukłych (por. [7]), np. dla przestrzeni dystrybucji i przestrzeni funkcji próbnych - jedyny znany wyjątek to wysoce niemetryzowalna przestrzeń funkcji analitycznych zmiennej rzeczywistej, która choć ośrodkowa, nuklearna, zupełna, ultrabornologiczna (i co tam kto jeszcze sobie zażyczy) nie ma bazy (Domański-Vogt 2000 [8]).

Ciekawe, że w tej tematyce jest jeszcze sporo naturalnych problemów otwartych:

- (Pełczyński 1970 [15]) Czy każda przestrzeń dopełnialna w nuklearnej przestrzeni Frécheta z bazą ma bazę?
- (Mityagin 1970 [13, Problem 15]) Czy każda dopełnialna podprzestrzeń w przestrzeni dystrybucji temperowanych albo w odpowiedniej przestrzeni funkcji próbnych (tj. przestrzeni funkcji gładkich szybko malejących do zera) ma bazę?
- Podać konkretną "naturalną" bazę w przestrzeni dystrybucji $\mathscr{D}'(\Omega)$ lub w przestrzeni funkcji próbnych $\mathscr{D}(\Omega)$.
- (Bessaga 1968 [5, Problem 1]) Czy każde dwie bazy w nuklearnej przestrzeni Frécheta generują "istotnie" tę samą przestrzeń ciągową (tj. z dokładnością do permutacji i odwzorowań diagonalnych)?

# Bibliografia


[1] S. Banach, *Teorja operacyj, tom I. Operacje linjowe*, Kasa Mianowskiego, Warszawa 1931.

[2] S. Banach, *Théorie des opérations linéaires*, Monografie Mat. vol. 1, Warszawa 1932.

[3] S. Banach, Über das "Loi suprême" von J. Hoene-Wroński, *Bull. Inter. Acad. Sci. Pol. Sci. Ser. A*, (1939), 1–10; przedruk w: S. Banach, *Oeuvres*, Vol. II, str. 450–457, PWN. Warszawa 1979.

[4] S. Banach, *Oeuvres*, Vol. II, PWN, Warszawa 1979.

[5] C. Bessaga, Some remarks on Dragilev's theorem, *Studia Math.* **31** (1968), 307-318.

[6] J. Bochnak, J. Siciak, Analytic functions in topological vector spaces, *Studia Math.* **39** (1971), 77–111.

[7] P. Domański, Classical PLS-spaces: spaces of distributions, real analytic functions and their relatives, in: *Orlicz Centenary Volume, Banach Center Publications*, **64**, *Proceedings of the Conferences: Władysław Orlicz Centenary Conference and Function Spaces VII held in Poznań, July 21–25, 2003*, Z. Ciesielski, A. Pełczyński and L. Skrzypczak (Eds.), Institute of Mathematics, Polish Academy of Sciences, Warszawa 2004, pp. 51–70.

[8] P. Domański, D. Vogt, The space of real analytic functions has no basis, *Studia Math.* **142** (2000), 187–200.

[9] S. Dickstein, O "prawie najwyższym" Hoene-Wrońskiego w matematyce, *Prace Mat.-Fiz.* **2** (1890), 145–168.

[10] P. Enflo, A counterexample to the approximation property in Banach spaces, *Acta Math.* **130** (1973), 309-317.

[11] H. Jarchow, *Locally Convex Spaces*, B. G. Teubner, Stuttgart 1981.

[12] R. Meise, D. Vogt, *Introduction to Functional Analysis*, Clarendon Press, Oxford 1997.

[13] B. S. Mityagin, Equivalence of bases in Hilbert scales, *Studia Math.* **37** (1970), 111-137.

[14] B. S. Mityagin, N. M. Zobin, Contre-exemple à l'existence d'une base dans un espace de Fréchet nucleaire, *C. R. Acad. Sci. Paris Ser. A* **279** (1974), 255-258, 325–327.

[15] A. Pełczyński, Proceedings of the international colloquium on nuclear spaces and ideals of operators, Problem 37, *Studia Math.* **38** (1970), 476.

[16] P. Perez-Carreras, J. Bonet, *Barrelled Locally Convex Spaces*, North-Holland, Amsterdam 1987.

[17] J. Wengenroth, *Derived Functors in Functional Analysis*, *Lecture Notes Math.* **1810**, Springer, Berlin 2003.

[18] P. Wojtaszczyk, *Banach Spaces for Analysts*, Cambridge University Press 1991.

**Adres autora:**
P. Domański
Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytet im. Adama Mickiewicza, Poznań
oraz Instytut Matematyczny PAN
(Oddział w Poznaniu)
Umultowska 87
61-614 Poznań, POLSKA
e-mail: domanski@amu.edu.pl