Karol Andrzejczak
Instytut Matematyki, Politechnika Poznańska

Pewne modele szokowych uszkodzeń systemu

Celem komunikatu jest przedstawienie trzech wersji modeli szokowych uszkodzeń systemów niezawodnościowych. Modele szokowych uszkodzeń są znane w literaturze [3], [1], [2], [4]. Przyjmujemy, że szoki występują zgodnie z pewnym procesem odnowy. Gdy wystąpi szok, każdy element systemu może uszkodzić się, niezależnie od pozostałych, z prawdopodobieństwem równym intensywności szoku, która jest pewną liczbą pomiędzy 0 i 1. Przedstawione modele dotyczą systemów o strukturach niezawodnościowych z określonych klas i są rozważane dla trzech przypadków intensywności szoku:

a) gdy intensywność jest parametrem stałym,

b) gdy intensywność jest parametrem losowym wybranym z tego samego rozkładu dla wszystkich szoków,

c) gdy intensywność jest parametrem losowym o rozkładzie zmiennym z szoku na szok.

Bibliografia

[1] Nakagawa, T. (1979). Further results of replacement problem of parallel system in random environment. *J. Appl. Prob.* **16,** 923-926
[2] Petakos, K., Tsapelas, T. (1997). Reliability analysis for systems in random environment. *J. Appl. Prob.* **34,** 1021-1031
[3] Rade, L. (1976). Reliability systems in random environment. *J. Appl. Prob.* **13,** 407-410
[4] Skoulakis, G. (2000). A general shock model for a reliability system. *J. Appl. Prob.* **37,** 925-935

Roman Bobryk, Andrzej Chrzęszczyk
Instytut Matematyki, Akademia Świętokrzyska, Kielce

Łukasz Stettner
Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk, Warszawa

Niestabilność dynamicznych układów stochastycznych

W referacie przedstawimy wyniki dotyczące średniokwadratowej niestabilności dla liniowych układów równań różniczkowych zwyczajnych z losowymi współczynnikami.
Rozpatrywane są dwa modele losowych współczynników. Pierwszym modelem jest proces stochastyczny

$$\xi(t) = \beta cos[\omega t + \alpha w(t)],$$

gdzie $w(t)$ - proces Wienera. Drugim modelem jest gaussowski proces stacjonarny z funkcją korelacyjną

$$K(t) = \beta e^{-\alpha|t|} cos(\omega t).$$

Obszary niestabilności dokładnie przedstawimy dla równania oscylatora harmonijnego. Przy badaniach niestabilności wykorzystywane są metody z prac [1,2], a także obliczenia komputerowe.

Bibliografia

[1] R. Bobryk, Ł. Stettner, Mean square stabilization of linear systems by mean zero noise, Stochastics Stoch. Rep., 67 (1999) 169-189.
[2] R. Bobryk, Ł. Stettner, A closure method for randomly perturbed linear systems, Demonstr. Math., 34 (2001) 415-424.

Tomasz Bojdecki
Instytut Matematyki, Uniwersytet Warszawski

Dystrybucje w przestrzeni Wienera: co to i po co to

Przypuśćmy, że w $\mathcal{R}^d$ rozważamy skończony lub przeliczalny układ cząstek, ewoluujących losowo. $\xi_i(t)$ oznacza pozycję i-tej cząstki w chwili t, $t \in [0,1]$. Zakładamy, że każdy proces ξ_i ma ciągłe trajektorie. Załóżmy także, iż układ zależy od parametru n, przy czym gęstość cząstek wzrasta nieskończenie, gdy $n \to \infty$. Ewolucję układu możemy opisać za pomocą *procesu empirycznego* $N_n(t) = \sum_i \delta_{\xi_i(t)}$ albo za pomocą *empirycznej trajektorialnej miary losowej* $\mathcal{N}_n = \sum_i \delta_{\xi_i}$. N_n jest procesem o wartościach w przestrzeni miar Radona w $\mathcal{R}^d$, zaś $\mathcal{N}_n$ jest miarą losową w przestrzeni funkcji ciągłych $C = C([0,1], \mathcal{R}^d)$. Pozostając przy tym drugim (tzw. “trajektorialnym”) podejściu, badamy fluktuacje układu wokół średniej, tj. dla odpowiedniej normalizacji a_n badamy zbieżność wg rozkładów ciągu $\mathfrak{X}_n = \frac{1}{a_n}(\mathcal{N}_n - E\mathcal{N}_n)$, gdy $n \to \infty$. Należy przy tym interpretować $\mathfrak{X}_n$ jako zmienną losową w odpowiedniej przestrzeni stanów. Przestrzeń miar ze znakiem na C nie jest dobra, m. in. dlatego, że jest za mała. Pożyteczną i wygodną okazuje się przestrzeń dystrybucji na przestrzeni Wienera. Konstruuje się mianowicie trójkę Gelfanda $\mathcal{S}(C) \subset L^2(C, \mathbb{W}) \subset \mathcal{S}(C)'$, będącą odpowiednikiem klasycznej trójki $\mathcal{S}(\mathcal{R}^d) \subset L^2(\mathcal{R}^d, |\cdot|) \subset \mathcal{S}(\mathcal{R}^d)'$ ($|\cdot|$ jest miarą Lebesgue'a w $\mathcal{R}^d$, $\mathcal{S}(\mathcal{R}^d)'$ jest przestrzenią dystrybucji temperowanych Schwartza, $\mathbb{W}$ jest *σ-skończoną miarą Wienera w C*, tj. $\mathbb{W} = \int_{\mathcal{R}^d} W^x dx$, gdzie W^x jest rozkładem procesu Wienera startującego z $x \in \mathcal{R}^d$). $\mathcal{S}(C)$ definiuje się jako funkcjonały na C o dostatecznie gładkich rozwinięciach “ w chaosy” [4]. Jest to przestrzeń nuklearna Frecheta.

Dla różnorakich układów cząstek pokazuje się, że $\mathfrak{X}_n$ jako zmienne losowe w $\mathcal{S}(C)'$ są zbieżne wg rozkładów i identyfikuje się granice ([1], [2], [3], [4]). W wielu przypadkach można stąd otrzymać twierdzenia o zbieżności fluktuacji procesów empirycznych w $C([0,1], \mathcal{S}(\mathcal{R}^d)')$ ([1], [2], [3]).

Inny przykład zastosowania jest związany z badaniem asymptotyki czasu przebywania (“occupation time”) “segmentów brownowskich”. Np. niech $(W(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ będzie procesem Wienera w $\mathbb{R}$, $\xi_i(t) = W(i+t)$, $t \in [0,1]$, $i = 0, 1, \ldots$. Pokazuje się, że ciąg miar losowych w C: $\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=0}^{n} \delta_{\xi_i}$ jest zbieżny według rozkładów w $\mathcal{S}(C)'$ do $|\gamma|\mathbb{W}$, gdzie γ jest standardową zmienną gaussowską.

Bibliografia

[1] Bojdecki, T. and Gorostiza, L.G. (2001) Trajectorial fluctuations and time-localization of Cox systems of independent motions, *Indag. Mathem.* 12(2), 139–145.
[2] Bojdecki, T. and Gorostiza, L.G. (2002). Time-localization of random distributions on Wiener space II: convergence, fractional Brownian density processes. Ukaże się w *Potential Analysis*
[3] Bojdecki, T., Gorostiza, L.G., and Nualart, D. (1997). Time-localization of random distributions on Wiener space. *Potential Analysis* **6**, 183–205.
[4] Gorostiza, L.G. and Nualart, D. (1994). Nuclear Gelfand triples on Wiener space and applications to trajectorial fluctuations of particle systems. *J. Funct. Anal.* **125**, 37–66.

Anna Chojnowska-Michalik
Wydział Matematyki, Uniwersytet Łódzki

Półgrupy przejścia dla stochastycznych równań semiliniowych w przestrzeni Hilberta

Rozważana jest szeroka klasa stochastycznych równań semiliniowych z mierzalną nieliniowością a w przestrzeni Hilberta H

$$\begin{cases} dX_t = AX_t + F(X_t)dt + BdW_t & \\ X_0 = x \in H, & t \geq 0, \end{cases} \qquad (*)$$

gdzie A jest generatorem półgrupy operatorów na H.

Przy założeniu, że stowarzyszony proces Ornsteina-Uhlenbecka (tzn. rozwiązanie równania (*) z $F \equiv 0$) ma miarę niezmienniczą μ, bada się półgrupę przejścia (P_t) dla równania (*) w przestrzeniach $L^p(H, \mu)$. Otrzymano warunki (w języku współczynników równania (*)) na hiperograniczoność (P_t), logarytmiczną nierówność Sobolewa dla generatora oraz istnienie miary niezmienniczej dla (P_t) absolutnie ciągłej względem μ i regularność jej gęstości. Podano też pewną charakteryzację dziedziny generatora.

Krzysztof Czarkowski
Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet Mikołaja Kopernika, Toruń

Aproksymacja rozwiązań stochastycznych równań różniczkowych z odbiciem ukośnym

Niech dany będzie d-wymiarowy proces Wienera $W = (W^1, ..., W^d)$ i nieujemna $d \times d$ macierz Q z zerami na przekątnej oraz promieniem spektralnym $\rho(Q)$ mniejszym od 1. Rozpatrzmy d–wymiarowe stochastyczne równanie różniczkowe z odbiciem ukośnym na $(\mathbb{R}^+)^d$ w postaci:

$$X_t = X_0 + \int_0^t \sigma(X_s)\, dW_s + \int_0^t b(X_s) ds + (I - Q')K_t, \quad t \in \mathbb{R}^+.$$

Gdzie Q' macierzą transponowaną Q, $X_0 \in (\mathbb{R}^+)^d$, $X = (X^1, ..., X^d)$ jest procesem odbijającym sie się w $(\mathbb{R}^+)^d$, a $K = (K^1, ..., K^d)$ jest procesem o niemalejących trajektoriach takich, że K^j rośnie tylko w tych chwilach t, gdzie $X_t^j = 0$.

W komunikacie rozważne będą trzy schematy numeryczne pozwalające na aproksymację rozwiązania: X : schemat penalizacji $\widehat{X}^n$, schemat rzutowania $\bar{X}^n$ i schemat Eulera-Peano X^n.

Można pokazać, że jeżeli $\sigma,\ b$ są Lipschitz'owsko ciągłe to dla każdego $p \in \mathbb{N}$

$$E \sup_{s \le t} |\widehat{X}_s^n - X_s|^{2p} = \mathcal{O}((\frac{\ln n}{n})^p), \quad t \in \mathbb{R}^+$$

i

$$E \sup_{s \le t} |\bar{X}_s^n - X_s|^{2p} = \mathcal{O}((\frac{\ln n}{n})^p), \quad t \in \mathbb{R}^+,$$

a w przypadku schematu Eulera-Peano

$$E \sup_{s \le t} |X_t^n - X_t|^{2p} = \mathcal{O}((\frac{1}{n})^p), \quad t \in \mathbb{R}^+.$$

Bibliografia

[1] **K**. Czarkowski and L. Słomiński, *Approximation of solutions of SDE's with oblique reflection on an orthant*, Probability and Math. Statistics 2002
[2] J. M. Harrison and M. I. Reiman, *Reflected Brownian motion on an orthant*, Ann. Probab., **9**, (1981), 302–308.
[3] K. Yamada, *Diffusion approximation for open state–dependent queueing networks in the heavy traffic situation*, Ann. Appl. Probab., **5**, (1995), 958–982.

Krzysztof Dębicki, Zbigniew Michna
Akademia Ekonomiczna we Wrocławiu

Tomasz Rolski
Uniwersytet Wrocławski

Symulacje stałych asymptotycznych dla pewnych modeli fluidowych

Niech $Z(t)$ będzie scentrowanym stacjonarnym procesem gaussowskim o własności Markowa. W pewnych modelach fluidowych stacjonarna zawartość bufora może być wyrażona jako $\sup_{t\geq 0}\int_0^t Z(s)\,ds - ct$ i $\mathbb{P}(V > u) = Ce^{-\gamma u}(1+o(1))$. Stała C może być wyrażona za pomocą tak zwanej uogólnionej stałej Pickandsa $\mathcal{H}$. Dla bardzo wielu przypadków nie znamy wartości ani nawet przybliżenia stałej C. W pracy proponujemy metodę symulacji stałej C przy użyciu techniki zamiany miary. Metodę stosujemy dla procesu $Z(t)$ będącego procesem Ornsteina-Uhlenbecka lub $Z(t) = \sum_{j=1}^n X_j(t)$, gdzie $(X_1(t),\ldots,X_n(t))$ jest procesem Gaussa-Markowa. W pracy prezentujemy dwa przykłady symulacji.

mgr Agnieszka Groniowska
Instytut Ekonometrii, Szkoła Główna Handlowa, Warszawa

Wybór strategii ubezpieczyciela dla uporządkowanych rozkładów wysokości szkód

Referat dotyczyć będzie dyskretnego procesu ryzyka i wyboru przez ubezpieczyciela strategii minimalizującej prawdopodobieństwo ruiny w nieskończonym horyzoncie czasowym.

Zakładamy, że ubezpieczyciel ma do dyspozycji różne rozkłady wysokości szkód, co odpowiada zmianom składu portfela. Omówiona zostanie strategia dla rozkładów znajdujących się w porządku stochastycznym oraz przykłady, że analogiczna strategia nie jest optymalna dla rozkładów znajdujących się w porządku stop-loss.

Andrzej Jacko, Tadeusz Lipski
Wyższa Szkoła Zarządzania w Słupsku

Planowanie zakresu forsownych prób technicznych podczas kontroli parametrycznej niezawodności urządzeń

Podczas planowania zakresu badań próbnych można wykorzystać informacje, dotyczące zachowania parametrów określających w czasie. Uważa się, że wyrób zachowuje sprawność, jeżeli wartość parametru określającego (PO) nie przekracza wyznaczonej wartości granicznej G.

Do opisu zmian PO wykorzystuje się różne procesy stochastyczne. Dokonując oceny ilościowych parametrów niezawodności, należy posiadać umiejętność obliczania prawdopodobieństwa $P(t)$ znajdowania się procesu stochastycznego w obszarze wartości dopuszczalnych.

Zakładamy, że proces $\xi(t)$ zmian PO a się opisać stochastycznym równaniem różniczkowym typu $Ito : d\xi = m \cdot dt + \sigma \cdot d\eta(t)$. Model ten prowadzi do rozkładu czasu poprawnej pracy urządzenia, którego rodzaj zależy od odpowiednich warunków rozwiązania retrospektywnego równania *Fokkera-Plancka-Kołmogorowa* z funkcją $P(t_0, x_0, t, x)$ jako gęstością prawdopodobieństwa przejścia dyfuzyjnego procesu Markowa.

Zakładamy, że realizacje procesu $\xi(t)$ posiadają charakter monotoniczny, tzn., że jako graniczne przyjmujemy następujące warunki : $P(t_0, x_0, t, x)|_{x=-\infty}$.

Rozwiązanie równania *Fokkera-Plancka-Kołmogorowa* z takimi warunkami dla początkowego stanu zerowego prowadzi do tego, że dla prawdopodobieństwa poprawnej pracy w czasie t otrzymujemy wyrażenie

$$P(t) = \Phi\left(\frac{1 - at}{\nu\sqrt{at}}\right), \tag{1}$$

gdzie : $\nu = \frac{\sigma}{m}$, $a = \frac{m}{G}$, $\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ - *funkcja Laplace'a*.

Jednym ze sposobów zmniejszenia zakresu prób jest przeprowadzenie prób forsownych w warunkach, które pod względem trudności przekraczają warunki normalne, określone w założeniach technicznych wyrobu. W niniejszem artykule rozpatrzono zadanie planowania zakresu forsownych prób technicznych wyrobu, podczas których zadany zbiór wymagań dotyczących niezawodności kontroluje się przy założeniu poprawności modelu (1). Określona jest również minimalna dopuszczalna wartość P_T prawdopodobieństwa $P(t)$ niezawodnego działania wyrobu w określonym czasie t_{ok} przy działaniu w trybie normalnym ε_n . Przy tak sformułowanym zadaniu wymagań warunkiem ich potwierdzenia jest spełnienie nierówności :

$$\underline{P_\gamma} \geqslant P_T,$$

gdzie $\underline{P_\gamma}$ - dolna granica ufności prawdopodobieństwa P poziomu γ , określana na podstawie wyników przeprowadzonych prób.

Jacek Jakubowski
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Całka stochastyczna względem ułamkowego ruchu Browna w przestrzeni Hilberta

W komunikacie zostanie przedstawiona metoda konstrukcji całki stochastycznej względem ułamkowego ruchu Browna z parametrem Hursta $H \in (1//2, 1)$ w przestrzeni Hilberta U z operatorem kowariancji Q (nieujemny, samosprzężony, nuklearny), a więc procesu gaussowskiego $B^H(t)$, $t \in R_+$, o ciągłych trajektoriach i takiego, że

$$E\left[\langle u_1, B^H(s)\rangle_U \langle u_2, B^H(t)\rangle_U\right] = \langle Qu_1, u_2\rangle_U \frac{1}{2}\left[t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H}\right]$$

dla wszystkich $s, t \in R_+$ i $u_1, u_2 \in U$. Całka jest zdefiniowana dla procesów o wartościach w przestrzeni $\mathcal{L}_2(U, V)$ - przestrzeni operatorów Hilberta-Schmidta określonych na U o wartościach w przestrzeni Hilberta V. Ten wynik będący rezultatem wspólnej pracy z T. E. Duncan i B. Pasik-Duncan uogólnia konstrukcję całki stochastycznej dla procesów deterministycznych z pracy T. E. Duncan, B. Maslowski, and B. Pasik-Duncan, Fractional Brownian motion and stochastic equations in Hilbert space.

Aleksander Janicki
Instytut Matematyki, Politechnika Wrocławska

Przedziały cen opcji dla niekompletnych modeli rynku finansowego

W przypadku niekompletnego stochastycznego modelu runku finansowego nie jest możliwa jednoznaczna wycena opcji (Europejskich czy Amerykańskich). Konstruuje się ceny optymalne w jakimś ściśle określonym sensie, np. ceny Schweizera. Bada się też i szacuje zakresy cen dla całych rodzin miar martyngałowych. Wykorzystując metody komputerowe można lokalizować i porównywać ceny opcji otrzymywane różnymi metodami. Rozwiązując odpowiednie paraboliczne nierówności wariacyjne otrzymuje się optymalne czasy realizacji opcji Amerykańskich.

Bibliografia

[1] N. Bellamy, M. Jeanblanc, *Incompleteness of markets driven by a mixed diffusion*, Finance and Stochastics, **4**, 209–222, 2000.
[2] I. Karatzas, S. E. Shreve, *Methods of Mathematical Finance*, Springer, New York 1998.
[3] F. A. Longstaff, E. S. Schwartz, *Valuing American options by simulation: A simple least–squares approach*, The Review of Financial Studies, **14**, 113–147, 2001.

dr Agnieszka Jurlewicz
Centrum Metod Stochastycznych im. Hugona Steinhausa
oraz Instytut Matematyki, Politechnika Wrocławska

Błądzenie losowe z czasem ciągłym o losowej „strukturze gruboziarnistej” i jego zastosowania w teorii relaksacji.

W referacie wprowadzony zostanie nowy typ skorelowanego błądzenia losowego z czasem ciągłym i przedstawione twierdzenia graniczne dotyczące asymptotycznych własności tego procesu przy $t \to \infty$. Zbadane też zostaną otrzymane rozkłady graniczne. Na koniec omówione będą zastosowania zaproponowanej teorii w probabilistycznym podejściu do modelowania zjawiska relaksacji w układach złożonych.

Krzysztof Kaniowski
Wydział Matematyki, Uniwersytet Łódzki

Asymptotyczne zachowanie się ciągów warunkowych wartości oczekiwanych

Niech $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ będzie bezatomową przestrzenią probabilistyczną, (X_n) ciągiem zmiennych losowych na tej przestrzeni. Przedstawione zostaną twierdzenia wskazujące przy jakich założeniach dotyczących ciągu (X_n) dowolna zmienna losowa Y może być przedstawiona w postaci $Y = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_n|A_n)$ (w sensie zbieżności prawie pewnej lub stochastycznej) dla pewnego ciągu σ-ciał (A_n).

Wymienione rezultaty sugerowały następującą hipotezę: jeżeli μ jest rozkładem prawdopodobieństwa na $\mathbb{R}$ takim, że

$$-\int_{-\infty}^{0} t\mu(dt) = \int_{0}^{\infty} t\mu(dt) = \infty,$$

to dla dowolnego rozkładu prawdopodonieństwa ν istnieją: przestrzeń probabilistyczna $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, zmienna losowa X na $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ oraz σ-ciało $A \subset \mathcal{F}$ takie, że

$$\mathcal{L}(X) = \mu$$

$$\mathcal{L}(\mathbb{E}(X|A)) = \nu.$$

Hipoteza ta uzyskała pozytywne rozstrzygnięcie.

Marek Kociński
Szkoła Główna Gospodarstwa Wiejskiego, Warszawa

Wycena opcji europejskiej w czasie dyskretnym z proporcjonalnymi kosztami za transakcje

Na pewnej ustalonej przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ rozważamy dyskretny model rynku na którym występują dwa instrumenty finansowe: akcje i obligacje o których zakładamy, że są nieskończenie podzielne. Przyjmujemy, że stopa procentowa dla obligacji jest stała i równa $r > -1$. Niech s_t będzie ceną akcji w chwili t. Zakładamy, że dynamika s_t jest następująca:

$$s_{t+1} = (1 + \eta_{t+1})s_t,\ t = 0, ..., T-1,\ s_0 \in \mathbf{R}^+ \setminus \{0\},$$

gdzie $\eta_t, t = 1, ..., T$ jest ciągiem i.i.d. zmiennych losowych takich, że $\eta_t \in \langle a, b \rangle$ dla każdego $t = 0, ..., T-1$ gdzie $-1 < a < 0$ i $b > \max\{0, r\}$. Niech $\mathbf{F} = \{\mathcal{F}_t, t = 0, ..., T\}$ bedzie rodziną σ-ciał taką, że $\mathcal{F}_t = \sigma(s_u, 0 \leq u \leq t), t = 0, ..., T$. Zakładamy, że $\mathcal{F} = \mathcal{F}_T$. Ponadto zakładamy, że $P(\eta_{t+1} = a \mid \mathcal{F}_t) > 0,\ P\ p.n.$ i $P(\eta_{t+1} = b \mid \mathcal{F}_t) > 0,\ P\ p.n.$ dla każdego $t = 0, ..., T-1$.

Kupując jedną akcję w momencie t musimy zapłacić $(1+\lambda)\, s_t$, gdzie $\lambda \in [0, \infty)$, zaś za sprzedaż jednej akcji w chwili t otrzymujemy $(1-\mu)\, s_t$, gdzie $\mu \in [0, 1)$.

Rozważamy instrument pochodny (opcję europejską) z terminem wygaśnięcia T i wypłatą $f(s_T) = (f_1(s_T), f_2(s_T))$, gdzie f_1, f_2 są funkcjami mierzalnymi oraz $f_1(s_T), f_2(s_T)$ określają, odpowiednio wartość obligacji i akcji które stanowią minimalny portfel umożliwiający sprzedającemu opcję wypłatę należności dla posiadacza opcji.

Niech $c_1(s) = \frac{f_1(s)}{1+\lambda} + f_2(s)$, $c_2(s) = \frac{f_1(s)}{1-\mu} + f_2(s)$. Ponadto niech $\gamma = (1+\lambda)(1+b) - (1-\mu)(1+a)$.

Zdefiniujmy funkcje $I_1(s)$ oraz $I_2(s)$ następująco:

$$\begin{aligned} I_1(s) &= (1-\mu)(b-a)\, c_2((1+a)\, s) - \gamma c_1((1+a)\, s) \\ &\qquad + (1+a)(\mu+\lambda)\, c_1((1+b)\, s) \\ I_2(s) &= (1+\lambda)(b-a)\, c_1((1+b)\, s) - \gamma c_2((1+b)\, s) \\ &\qquad + (1+b)(\mu+\lambda)\, c_2((1+a)\, s) \end{aligned}$$

Ponadto dla dowolnego $\theta \in \langle a, b\rangle$ definiujemy funkcje $L_1^\theta(s)$ oraz $L_2^\theta(s)$ następująco:

$$\begin{aligned} L_1^\theta(s) &= (b-\theta)(1-\mu)\,c_2((1+a)s) \\ &\quad + ((1+\lambda)(1+\theta)-(1-\mu)(1+a))\,c_1((1+b)s) - \gamma c_1((1+\theta)s) \\ L_2^\theta(s) &= ((1+\lambda)(1+b)-(1-\mu)(1+\theta)) \\ &\qquad c_2((1+a)s) + (\theta-a)(1+\lambda)\,c_1((1+b)s) - \gamma c_2((1+\theta)s)\,, \end{aligned}$$

Niech $H(t)$ oznacza zbiór portfeli przed transakcją które w momencie t gwarantują zabezpieczenie (ang. hedging) wypłaty $f(s_T)$ w momencie T. Ponadto niech $H^{a,b}(t)$ będzie zdefiniowany tak samo jak $H(t)$ przy założeniu, że $P(\eta_{s+1} = a \mid \mathcal{F}_s) + P(\eta_{s+1} = b \mid \mathcal{F}_s) = 1, \quad P\ a.s.$ oraz $0 < P(\eta_{s+1} = b \mid \mathcal{F}_s) < 1, \quad P$ dla każdego $s = t, ..., T-1$.

Twierdzenie 1 *Jeżeli dla dowolnego* $s \in \left\langle (1+a)^{T-1} s_0, (1+b)^{T-1} s_0 \right\rangle, \theta \in \langle a, b\rangle$ *zachodzą następujące nierówności:*

$I_1(s) \geq 0, I_2(s) \geq 0$

$L_1^\theta(s) \geq 0, L_2^\theta(s) \geq 0$

$(b-r)\,L_2^\theta(s) - (\theta-r)\,I_2(s) \geq 0, (r-a)\,L_1^\theta(s) + (\theta-r)\,I_1(s) \geq 0,$

to $H(t) = H^{a,b}(t)$ *dla każdego* $t = 0, ..., T-1$.

Powyższy wynik może mieć znaczenie praktyczne na przykład przy wycenie opcji kupna (ang. call option).

Rafał Kulik
Instytut Matematyczny, Uniwersytet Wrocławski

Porządki dla funkcjonałów od wielowymiarowych procesów punktowych

W komunikacie zostaną przedstawione porządki zależności (tzw. *dependence orderings*) dla wielowymiarowych procesów punktowych i funkcjonałów na nich. Porządki te umożliwiają porównywanie modeli stochastycznych opartych na procesach punktowych nie będących procesami odnowy. Jako zastosowanie zostaną przedstawione nierówności dla modeli kolejkowych (*virtual waiting time*), czy wielowymiarowych modeli szoku.

Weronika Łaukajtys
Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet Mikołaja Kopernika, Toruń

Metoda penalizacji dla odbijających stochastycznych równań różniczkowych ze skokami.

Niech D będzie otwartym zbiorem wypukłym w $\mathbb{R}^d$. Rozważamy rozwiązanie X^n równania:

$$X_t^n = X_0 + \int_0^t f(X_{s-}^n)dZ_s^n - n\int_0^t (X_s^n - \Pi(X_s^n))ds \quad t \in \mathbb{R}^+, n \in \mathbb{N}, \qquad (*)$$

gdzie $X_0 \in \bar{D} = D \cup \partial D$, $\pi(x)$ jest rzutowaniem x na zbiór $\bar{D} = D \cup \partial D$, Z^n jest d- wymiarowym semimartyngałem oraz $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d$ jest funkcją ciągłą, Lipschitz'owską.

Składnik $n\int_0^t (X_s^n - \Pi(X_s^n))ds$, który utrzymuje X^n blisko zbioru $\bar{D}$ nazywamy składnikiem penalizującym. Wiadome jest, że istnieje jedyne mocne rozwiązanie $(*)$, a w przypadku, gdy Z^n jest standardowym procesem Wienera,
$E \sup_{t \le q} |X_t^n - X_t|^2 \to 0$, gdzie X jest rozwiązaniem stochastycznego równania różniczkowego z odbiciem postaci:

$$X_t = X_0 + \int_0^t f(X_{s-})dZ_s + K_t, \quad t \in \mathbb{R}^+ \qquad (**).$$

Przedstawione zostaną wyniki wspólnej pracy ze Słomińskim [1] dotyczące aproksymacji rozwiązania równania $(**)$ ciągiem X^n rozwiązań $(*)$ w przypadku gdy semimartyngał Z posiada skoki.

Bibliografia

[1] W. Łaukajtys, L. Słomiński, Penalization methods for reflecting stochastic differential equations whit jumps, *Preprints*,(2002).

Przemysław Matuła
Instytut Matematyki, Uniwersytet Marii Curie-Skłodowskiej, Lublin

O pewnych nierównościach dla zmiennych losowych dodatnio i ujemnie zależnych i ich zastosowania

Niech X i Y będą zmiennymi losowymi dodatnio lub ujemnie kwadrantowo zależnymi. Celem referatu jest przedstawienie elementarnego dowodu nierówności postaci

$$\sup_{x,y}\left|H_{X,Y}(x,y)\right| := \sup_{x,y}\left|\mathbb{P}(X \le x, Y \le y) - \mathbb{P}(X \le x)\mathbb{P}(Y \le y)\right|$$
$$\le C\left|Cov(X,Y)\right|^{1/3},$$

gdzie X i Y mają ciągłe gęstości.

Podamy również podobnego typu nierówności dla różnicy między gęstością łączną zmiennych losowych X i Y oraz iloczynem gęstości tych zmiennych losowych. W dalszej części omówimy przykłady ciągów zmiennych losowych $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dodatnio zależnych, dla których zachodzi nierówność

$$\sup_{x,y}\left|H_{X_i,X_j}(x,y)\right| \le C \cdot Cov(X_i, X_j)\,.$$

Nierówności powyższego typu znajdują zastosowanie w dowodzeniu twierdzeń dotyczących zbieżności dystrybuant empirycznych oraz estymatorów jądrowych funkcji gęstości; w referacie przedstawimy przykłady takich twierdzeń.

dr Joanna Nowicka-Zagrajek
Centrum Metod Stochastycznych im. H. Steinhausa
oraz Instytut Matematyki, Politechnika Wrocławska

Struktura zależności dla procesów R-GARCH z szumami stabilnymi

Modele typu GARCH (*Generalized Autoregressive Conditionally Heteroskedastic*) stały się w ostatnich latach bardzo popularne, gdyż można nimi dobrze opisywać finansowe szeregi czasowe (w odróżnieniu od procesów liniowych, które nie oddają dobrze własności danych finansowych). Są to modele nieliniowe, o grubych ogonach i warunkowej wariancji zależnej od przeszłości. Jednakże konstrukcja modeli GARCH nakłada pewne ograniczenia na grubość ogonów ich rozkładów bezwarunkowych. Ponieważ istnieją dane finansowe charakteryzujące się bardzo ciężkimi ogonami, podjęto próby stworzenia modeli typu GARCH, które mogłyby opisywać takie dane.

Jedną z propozycji jest klasa modeli R-GARCH (*Randomized Generalized Autoregressive Conditionally Heteroskedastic*), obejmująca m. in. modele ARCH, GARCH, procesy de Vriesa oraz dyskretne wersje procesów podporządkowanych. Dla modeli R-GARCH z szumami ściśle stabilnymi można pokazać, że rozkłady bezwarunkowe są symetryczne α-stabilne. Ponieważ dla takich procesów funkcja kowariancji nie jest zdefiniowana, do opisu struktury zależności należy wykorzystać miarę zależności *"codifference"*. Analiza zachowania tej miary pokazuje, że zanika ona wykładniczo, czyli że rozważane procesy nie mają własności długoterminowej zależności. Strukturę zależności warto prześledzić w szczególnym przypadku R-GARCH(1,1,0).

Krzysztof Oleszkiewicz
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

O pewnej półgrupie operatorów i nierównościach typu Chinczyna-Kahane'a

Niech $X, X_1, X_2, \ldots, X_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi Bernoulliego o średniej zero i jednakowym rozkładzie: $P(X = -\alpha) = \beta, P(X = \beta) = \alpha$, gdzie $\alpha \in (0, 1/2]$, zaś $\beta = 1-\alpha$. Niech $v_1, v_2, \ldots, v_n$ będą wektorami pewnej przestrzeni wektorowej z normą i dla $p \geq 1$ oznaczmy

$$\|S\|_p = (E\|\sum_{k=1}^{n} X_k v_k\|^p)^{1/p}.$$

Pokażemy, że istnieje pewna stała uniwersalna A taka, iż dla dowolnego $q \geq 2$ spełniona jest nierówność:

$$\|S\|_q \leq A(1/\alpha)^{1/2-1/q}\|S\|_2,$$

jeśli $q \leq \ln(1/\alpha)$, zaś

$$\|S\|_q \leq A\sqrt{q}\sqrt{\frac{1/\alpha}{\ln(1/\alpha)}}\|S\|_2,$$

jeśli $q \geq \ln(1/\alpha)$. Z dokładnością do wartości stałej A to oszacowanie jest optymalne, co łatwo sprawdzić biorąc $n = \lceil \frac{q}{\ln(1/\alpha)} \rceil$ i $v_1 = v_2 = \ldots = v_n \neq 0$.

Adam Paszkiewicz
Wydział Matematyki, Uniwersytet Łódzki

Podporządkowania i dylatacje martyngałów

Omówiona będzie uniwersalność pewnych klas $\mathbb{M}$ martyngałów w następującym sensie. Każdy martyngał ma dylatację należącą do klasy $\mathbb{M}$. Istotne okażą się ciągi o przyrostach niezależnych.

Agnieszka Plucińska
Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych, Politechnika Warszawska

Charakteryzacje procesów wielomianowo-gaussowskich

Podane zostaną charakteryzacje procesów wielomianowo-Gaussowskich bazujące na warunkowej wartości przeciętnej i warunkowej wariancji procesu.

Teresa Rajba
ATH Bielsko-Biała

Multiply c-decomposable infinitely divisible measures on the real line and their characteristic functions

Given a probability measure P on the real line, we say that P is n-times c-decomposable ($n \in \mathbb{N},\ c \in \mathbb{R}$) if there exist probability measures $P_{c,(1)}, \dots, P_{c,(n)}$ such that

$$P = T_c P * P_{c,(1)}, \dots, P_{c,(n-1)} = T_c P_{c,(n-1)} * P_{c,(n)}, \tag{1}$$

where $T_c x = cx\ (x \in \mathbb{R}),\ T_c P(B) = P(T_c^{-1} B),\ B \subset \mathbb{R},\ c \neq 0$ and $T_0 P = \delta_0$ ($*$ denotes the convolution of measures). The concept of c-decomposable measures (n=1) was introduced by Loéve . A generalization of n-times c-decomposable measures to the non-integer case is given by Nguyen Van Thu. Multiply selfdecomposable measures, i.e. multiply c-decomposable for each $c \in (0,1)$ were also investigated on multidimensional spaces. In particular their characteristic functionals are well known (K.Urbanik, K.Sato, Z.Jurek, Nguyen Van Thu).

In this paper we give characteristic functions of α-times c-decomposable infinitely divisible distributions ($\alpha > 0$) and completely c-decomposable ($\alpha = \infty$), i.e. n-times c-decomposable for each n. We give the relation of representations of α times c-decomposable distributions ($0 < \alpha \leq \infty$) to the well-known representations of α-times selfdecomposable distributions.

Tomasz Rolski
Instytut Matematyczny, Uniwersytet Wrocławski

Technika wykładniczej zamiany miary dla procesów Markowa

Rozpatrujemy proces Markowa $X(t)$ z rozszerzonym generatorem A i dziedziną $\mathcal{D}(\mathcal{A})$. Niech F_t będzie prawostronną filtracją historii i P_t oznacza obcięcie podstawowej miary probabilistycznej do F_t. Definiujemy eksponencjalny martyngal $E^h(t)$ dla funkcji $h \in \mathcal{D}(A)$ i niech P' będzie inną miarą taką, że

$$\mathrm{d}P_t/P'_t = E^h(t).$$

Okazuje się, że $X(t)$ jest procesem Markowa na nowej przestrzeni probabilistycznej z miarą P'. Znajdziemy wzór na roszerzony generator A' i podamy warunki dostateczne dla $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(A')$. Dokładniejsze wyliczenia zostaną podane dla przypadków: ciągłe w czasie łańcuchy Markowa, kawałkami deterministyczne procesy Markowa, procesy dyfuzyjne (w tym przypadku specjalny wybór h pociąga klasyczne twierdzenie Camerona-Martina-Girsanowa. Praca jest wspólna z Z. Palmowskim.

dr Andrzej Rozkosz
Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet Mikołaja Kopernika, Toruń

Stochastyczne równania różniczkowe wstecz a półliniowe równania różniczkowe cząstkowe w formie dywergencyjnej

W komunikacie omówione zostaną związki między rozwiązaniami półliniowego problemu Cauchy'ego

$$\begin{cases} (D_t + A_t)u(t,x) = -f(t,x,u(t,x),(\sigma\nabla u)(t,x)), & (t,x) \in [0,T) \times \mathbb{R}^d, \\ u(T,x) = \varphi(x), & x \in \mathbb{R}^d, \end{cases}$$

gdzie

$$A_t = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d} D_i(a^{ij}(t,x)D_j), \quad a = \sigma\sigma^*$$

i $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $f : [0,T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ są zadanymi funkcjami, a rozwiązaniami (Y,Z) stochastycznych równań różniczkowych wstecz postaci

$$Y_t = \varphi(X_T) + \int_t^T f(s,X_s,Y_s,Z_s)\,ds - \int_t^T Z_s\,dW_s, \;\; t \in [0,T], \;\; P_{s,x}\text{ - p.w.},$$

gdzie $(X, P_{s,x})$ jest dyfuzją o generatorze A taką, że $P_{s,x}(X_s = x) = 1$.

Okazuje się, że przy standardowych w $\mathbb{L}_2$ - teorii równań różniczkowych cząstkowych założeniach na a, φ, f, przy których istnieje jednoznaczne rozwiązanie u problemu Cauchy'ego w przestrzeni Sobolewa $W_2^{0,1}((0,T) \times \mathbb{R}^d)$, istnieje również dokładnie jedno rozwiązanie (Y,Z) powyższego równania stochastycznego oraz

$$(Y_t, Z_t) = (u(t,X_t), (\sigma\nabla u)(t,X_t)), \;\; t \in [s,T], \;\; P_{s,x}\text{ - p.w.}$$

W szczególności $u(s,x) = Y_s$ dla $(s,x) \in [0,T) \times \mathbb{R}^d$ oraz $(\sigma\nabla u)(s,x) = Z_s$ dla prawie wszystkich (względem miary Lebesgue'a) $(s,x) \in [0,T) \times \mathbb{R}^d$, co daje reprezentację stochastyczną zarówno rozwiązania u, jak i jego gradientu.

dr hab. Leszek Słomiński
Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet Mikołaja Kopernika, Toruń

Procesy Dirichleta ze skokami

W komunikacie rozważana będzie klasa procesów Dirichleta ze skokami wprowadzona przez Strickera w [2]. Podany zostanie dla niej wzór Itô w przypadku odwzorowań klasy $\mathcal{C}^1$, z którego w szczególności wynika, że klasa procesów Dirichleta ze skokami jest stabilna ze względu na przekształcenia $\mathcal{C}^1$. Omówione zostaną również jej podklasy, względem których określona może być całka stochastyczna.

Bibliografia

[1] F. Coquet, J. Mémin i L. Słomiński, On non continuous Dirichlet processes, *Journal of Theoretical Probability*, 2002.
[2] C. Stricker, Variation conditionnelle des processus stochastiques, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, **24**, 295–305, 1988.

Łukasz Stettner
Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk, Warszawa

Wrażliwa na ryzyko optymalizacja portfela z obserwowanymi całkowicie i częściowo czynnikami

Mamy rynek z m akcjami i $k_1 + k_2$ czynnikami ekonomicznymi wpływającymi w czasie dyskretnym (powiedzmy w chwilach $t = 1, 2, \dots,$) na cenę akcji. Jeżeli oznaczymy przez $S_i(t)$ cenę i-tej akcji w chwili t to zależy ona od czynników $x(t) = (z_1(t), z_2(t))$ poprzez wzór

$$dS_i(t) = a_i(x(n))S_i(t)dt + \sum_{j=1}^{m} \sigma_{ij} S_i(t) dw_j(t)$$

dla $n \le t < n+1$, gdzie $W(t) = (w_1(t), \dots, w_m(t))^T$ jest standardowym procesem Wienera o wartościach w R^m. Zakładamy, że k_1 czynników $(z_1(n))$ tworzy proces Markowa o prawdopodobieństwie przejścia niezależnym od $(W(t))$ i jest całkowicie obserwowanych. Pozostałe czynniki mogą zależeć od $(W(t))$, też tworzą proces Markowa, ale są częściowo obserwowane z obserwacją $(y(n))$ daną wzorem

$$y(n) = h(z_2(n), \bar{w}_n),$$

gdzie $h(z, \cdot)$ tworzy C^1 dyffeomorfizm R^d, zaś $(\bar{w}_n)$ jest ciągiem i.i.d. zmiennych losowych w R^d o dodatniej gęstości. Badane zagadnienie polega na znalezieniu strategii portfelowej dla której wrażliwy na ryzyko przyrost portfela $V(t)$ na nieskończonym przedziale czasu jest największy, co równoważnie odpowiada minimalizacji funkcjonału

$$\limsup_{n\to\infty} n^{-1} \ln E \left\{ \exp \left\{ \sum_{j=0}^{n-1} \frac{-\Theta}{2} F(x(j), h(j), W_j(\cdot)) \right\} \right\},$$

gdzie $h(n) = (h_1(n), \dots, h_m(n))^T$, zaś $h_i(t)$ oznacza część portfela ulokowaną w i-tą akcję w chwili t, a ponadto

$$\frac{V(n+1)}{V(n)} = \exp\left\{F(x(n), h(n), W_n(\cdot))\right\},$$

z $W_n(\cdot)$ oznaczającym trajektorię $W(s+n) - W(n)$ z $0 \leq s \leq 1$. Rozwiązując odpowiednie równania Bellmana pokazujemy, że istnieją optymalne strategie nie zależące od cen akcji, a jedynie będące funkcjami obserwowanych czynników $(z_1(t))$ i procesu obserwacji $(y(n))$.

dr hab. Ryszard Szekli
Instytut Matematyczny, Uniwersytet Wrocławski

Twierdzenie typu Blackwella dla pewnej klasy procesów punktowych o ciężkoogonowych odstępach między punktami

A lot of real systems are maintained and preserved going by performing repair upon each failure. Therefore the creation and analysis of suitable repair models is an important task of reliability theory. Early works on repairable systems assume that repairs restore the state of a system to a level corresponding to a new one at each failure (*perfect repair model*), but in practice, the repair of a failed system may not yield as a result a state which is as good as new. The perfect repair model is inadequate to model most repair processes. Usually the distribution of the remaining life (after repair) vary from one failure time to another. One such model used in the literature is the *imperfect repair* model introduced by Brown and Proschan (1983). Under this model repair performs randomly, with probability $1 - p$ restoring the system to its state just before failure (*minimal repair*) and with probability p being a perfect repair. Further generalizations of such models can be found in Block, Borges and Savits (1985), Kijima (1989), Baxter, Kijima and Tortorella (1996), Last and Szekli (1998a) where stochastic comparison and monotonicity results were obtained, and also Dorado, Hollander and Sethuraman (1997) where estimation of the life time distribution and the time to the first failure of repairable systems was done.

In this paper we prove polynomial ergodicity of a continuous time Markov process describing a repairable system. The polynomial speed of this convergence is shown. The obtained results describe in particular asymptotic properties of repairable systems working under heavy tailed lifetime distributions. Blackwell type results are shown for the underlying failure point processes. Polynomial speed of convergence for that type of convergence is studied. The results are illustrated by classical examples of repair policies, for example by the age dependent imperfect repair policy.

Zbigniew S. Szewczak
Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet Mikołaja Kopernika, Toruń

Wielkie odchylenia $O(\sqrt{n})$ dla łańcuchów Markowa.

Niech $\{\xi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ będzie jednorodnym łańcuchem Markowa określonym na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega,\mathcal{F},P)$ i przestrzeni fazowej $\mathbb{R}$. Niech $P(x,A) = P(\xi_1 \in A\,|\,\xi_0 = x)$ będzie regularnym rozkładem warunkowym zaś $\mu(A) = P(\xi_0 \in A)$ rozkładem początkowym dla ξ_k, gdzie A jest zbiorem borelowskim oraz $x \in \mathbb{R}$. Załóżmy, że spełniony jest następujący warunek (Ψ): istnieją liczby rzeczywiste $a > 0$, $b < \infty$ takie, że dla dowolnego zbioru borelowskiego A, $\mu(A) > 0$, mamy $a\mu(A) \le P(\xi_1 \in A\,|\,\xi_0 = x) \le b\mu(A)$ dla μ prawie wszystkich x. Niech $\mathfrak{C}(\mu)$ oznacza klasę funkcji borelowskich takich, że dla $f \in \mathfrak{C}(\mu)$ istnieje, zależny od f, niepusty przedział $\mathbb{S} = (s_-,s_+)$ taki, że dla dowolnego $s \in \mathbb{S}$ mamy $\int e^{sf(y)}\mu(dy) < \infty$. Dla $f \in \mathfrak{C}(\mu)$, $X_k = f(\xi_k)$ definiuje rodzinę łańcuchów Markowa. Niech $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ oraz π będzie rozkładem stacjonarnym łańcucha ξ_k. Załóżmy, że $E_\pi(X_0) = 0$ oraz niech $\sigma^2 = E_\pi f^2(\xi_0) + 2\cdot\sum_{k=1}^\infty E_\pi f(\xi_0)f(\xi_k)$. Dla $s \in \mathbb{S}$ i $f \in \mathfrak{C}(\mu)$ zdefiniujmy $\mathbf{L}_s h = \int e^{sf(y)}h(y)P(\,\cdot\,,dy)$, $h \in L_\infty(\mu)$. Niech $\rho(s)$, u_s i v_s oznaczają odpowiednio promień spektralny, gęstość własną i funkcję własną operatora $\mathbf{L}_s$. Zdefinujmy łańcuch sprzężony $\{\xi_k^s\}_{k\in\mathbb{N}}$ o prawdopodobieństwie przejścia $P_s(x,A) = \int_A \frac{e^{sf(y)}v_s(y)}{\rho(s)v_s(x)}P(x,dy)$. Niech $\pi_s(A) = \int I_A v_s u_s d\mu$ i $\bar{f}(\cdot) = f(\cdot) - E_{\pi_s}(f)$. Załóżmy, że rozkład $\mathcal{L}(X_0)$ jest niekratowy. Warunek (Ψ) gwarantuje, że $\sigma_s^2 = E_{\pi_s}\bar{f}^2(\xi_0^s) + 2\cdot\sum_{k=1}^\infty E_{\pi_s}\bar{f}(\xi_0^s)\bar{f}(\xi_k^s) > 0$ dla $f \in \mathfrak{C}(\mu)$. Niech $M(s) = \frac{d}{ds}\log\rho(s)$ oraz $f^- = \operatorname{ess\,inf}_y f(y)$, $\quad f^+ = \operatorname{ess\,sup}_y f(y)$. Niech $s = s(t)$ będzie rozwiązaniem równania $M(s) = t$, $f^- < t < f^+$ oraz $\alpha(t) = \rho(s(t))e^{-ts(t)}$ i $A_{x,h}(t) = (\sqrt{2\pi}\sigma_{s(t)}s(t))^{-1}v_{s(t)}(x)\int h(y)u_{s(t)}(y)\mu(dy)$.

Twierdzenie. *Załóżmy, że prawdopodobieństwo przejścia łańcucha Markowa $\{\xi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ spełnia warunek (Ψ) oraz, że $f \in \mathfrak{C}(\mu)$. Jeśli $0 \le h \in L^\infty(\mu)$ to*
1) $\sigma_s^2 > 0$ dla każdego $s \in \mathbb{S}$ oraz rozwiązanie $s = s(t)$ równania $M(s) = t$ istnieje dla $t \in (f^-, f^+)$;
2) dla F^+, ε takich, że $f^+ > F^+ > \varepsilon > 0$ wyrażenie

$$\sup_{\varepsilon\le t\le F^+}\operatorname*{ess\,sup}_x\left|E\left(\frac{I(S_n \ge nt)\,h(\xi_n)}{A_{x,h}(t)n^{-\frac{1}{2}}\alpha^n(t)}\,\Big|\,\xi_0 = x\right) - 1\right|$$

jest rzędu $o(1)$ *lub* $O(\frac{1}{n})$ *w zależności od tego czy rozkład* $\mathcal{L}(X_0)$ *jest niekratowy, czy też spelnia warunek* (C) *Craméra.*

Twierdzenie to jest uogólnieniem pewnego wyniku autora dostępnego pod adresem http:////www.mat.uni.torun.pl//preprints.

dr Piotr Śniady
Institute of Mathematics, University of Wrocław

Empirical eigenvalues distribution and its random regularization

To a a matrix A with eigenvalues $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ we assign a probability measure $\mu_A = \frac{1}{N}(\delta_{\lambda_1} + \cdots + \delta_{\lambda_N})$ which is (up to a normalization) a measure counting eigenvalues of A. If A is a random matrix then the random measure $\omega \mapsto \mu_{A(\omega)}$ is called empirical eigenvalues distribution.

L.G. Brown [1] showed how to generalize this construction; namely how to assign a probability measure on $\mathbb{C}$ to any operator x (which is assumed to be an element of a von Neumann algebra equipped with a tracial state ϕ).

Unfortunatelly, the empirical eigenvalues distribution does not behave in a continuous way with respect to the natural topology induced by $\star$–moments. This problem was overcome by Haagerup [2]: he showed that if a sequence (A_N) of random matrices (where A_N is a $N \times N$ matrix) converges in $\star$–moments to an operator x then there exists a random correction C_N which converges to 0 in a certain sense and such that the empiriacal eigenvalues distribution of $A_N + C_N$ converges to the Brown measure of x. However, it was difficult to apply practically this result since the random correction used by Haagerup was a matrix analogue of Cauchy distribution and hence it did not have finite second moment.

In [4] we have shown how to improve the method of Haagerup by using a Gaussian correction G_N. In this way we can show that the operator norm of G_N converges to zero almost surely and that the empirical eigenvalues distributions $\mu_{A_N+G_N}$ converge to the Brown measure μ_x almost surely. In our proof we consider a certain matrix–valued Brownian motion and we find stochastic differential equations fulfilled by its singular values.

The original result of Haagerup and our stronger version have important applications to the theory of random matrices and functional analysis [2,3].

Bibliografia

[1] L. G. Brown, Lidskiĭ's theorem in the type II case, *Geometric methods in operator algebras (Kyoto, 1983)*, pages 1–35. Longman Sci. Tech., Harlow, 1986
[2] Uffe Haagerup, Spectral decomposition of all operators in a II_1 factor, which is

embedable in R^ω, preprint, 2001
[3] Piotr Śniady, Inequality for Voiculescu's free entropy in terms of Brown measure, preprint, available at `http://arxiv.org/abs/math.OA/0112289`, 2001
[4] Piotr Śniady, Random regularization of Brown spectral measure, preprint, available at `http://arXiv.org/abs/math/0105109`, 2001

Anna Talarczyk
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Czas lokalny samoprzecięć pewnych procesów gaussowskich w $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ – o uzbieżnianiu

Niech $\{X_t\}_{t\in[0,1]}$ będzie ciągłym, scentrowanym procesem gaussowskim o wartościach w $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ – przestrzeni dystrybucji temperowanych na $\mathbb{R}^d$. Czas lokalny k-krotnych samoprzecięć definiuje się jako granicę przy $\varepsilon \to 0$ (o ile ta granica istnieje) procesów L^f_ε danych przez:

$$\left\langle L^f_\varepsilon(t),\varphi\right\rangle = \int_{[0,t]^k} \langle : X_{s_1}\otimes\ldots\otimes X_{s_k} :, \varphi(x_1)f_\varepsilon(x_1-x_2)\ldots f_\varepsilon(x_1-x_k)\rangle \, ds_1\ldots ds_k, \qquad \varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \quad (1)$$

gdzie $: X_{s_1}\otimes\ldots\otimes X_{s_k} :$ oznacza normalizację Wicka produktu tensorowego dystrybucji $X_{s_1}\otimes\ldots\otimes X_{s_k}$, $f_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^d} f(\frac{x}{\varepsilon})$ jest przybliżeniem delty Diraca w zerze, gdy $\varepsilon\to 0$. Na poprzedniej konferencji przedstawiono warunki na istnienie oraz ciągłość trajektorii czasu lokalnego samoprzecięć dla różnego typu procesów. Teraz zajmiemy się przypadkiem, gdy czas lokalny samoprzecięć nie istnieje.

Skupimy się na przykładach procesów, które pojawiają się jako granice fluktuacji układów cząstek. Warunki, przy których czas lokalny samoprzecięć istnieje zwykle są postaci $d < d_{crit}$, gdzie wymiar krytyczny d_{crit} zależy od rodzaju procesu i krotności przecięć, np. dla α-stabilnego procesu gęstości mamy $d_{crit} = \frac{k}{k-1}\alpha$.

Ograniczamy się do przecięć dwukrotnych i zajmiemy się przypadkiem gdy $d \geq d_{crit}$, a więc gdy procesy L^f_ε zdefiniowane w (1) nie są zbieżne przy $\varepsilon\to 0$. Badamy zachowanie tych procesów, a mianowicie szukamy wielkości C_ε (zależnej od d) takiej, że $C_\varepsilon L^f_\varepsilon$ zbiega według rozkładów. Opisujemy także proces graniczny. Granice mogą być gaussowskie lub nie. W przypadku krytycznym $d = d_{crit}$ granica nie zależy od funkcji f użytej do przybliżania delty Diraca we wzorze (1).

dr hab. Krystyna Twardowska
Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych, Politechnika Warszawska

Twierdzenia aproksymacyjne dla stochastycznych równań ewolucyjnych

Udowodnione zostanie twierdzenie aproksymacyjne typu Wonga-Zakai dla stochastycznych semi-liniowych równań ewolucyjnych w przestrzeniach Hilberta przy słabszych założeniach niż w pracy [1]. Pokazane zostaną przykłady modeli spełniających założenia z pracy [2].

Bibliografia

[1] K. Twardowska, Approximation theorems of Wong-Zakai type for stochastic differential equations in infinite dimensions, Dissertationes Math., vol.325, 1993, pp.1-54.
[2] K. Twardowska, Wong-Zakai approximations for stochastic semi-linear evolution equations in Hilbert spaces, Part I and Part II, to appear.

dr hab. Krystyna Twardowska
Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych, Politechnika Warszawska

mgr Agata Nowak
Instytut Matematyki, Politechnika Rzeszowska

Związek pomiędzy całkami Itô i Stratonowicza w przestrzeniach Hilberta

Udowodniono istnienie całki Stratonowicza od funkcji zależnej od rozwiązania (w sensie osłabionym) stochastycznego równania ewolucyjnego w przestrzeniach Hilberta. Wyraża się tę całkę jako sumę całki Itô i dodatkowego członu, pojawiającego się w twierdzeniu aproksymacyjnym typu Wonga-Zakai. Wyniki opatre są na pracy [1].

Bibliografia

[1] K. Twardowska and A. Nowak, On the relation between the Itô and Stratonovich integrals in Hilbert spaces, to appear.

Jacek Wesołowski
Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych, Politechnika Warszawska

Charakteryzacje miar probabilistycznych w stożku macierzy symetrycznych dodatnio określonych związane z przekształceniami zachowującymi produktowość

Niech X, Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi o wartościach w stożku rzeczywistych dodatnio określonych macierzy symetrycznych - $\mathcal{V}_+$. Niech ψ będzie dyfeomorfizmem określonym na $\mathcal{V}_+$. Niech $(U, V) = \psi(X, Y)$. W literaturze znane są sytuacje gdy tak określone zmienne U i V są niezależne. Np. (a) dla X i Y o rozkładzie Wisharta, lub ogólniej, macierzowym rozkładzie gamma, produktowość zachowuje przekształcenie $\psi(x, y) = ((x+y)^{-1/2}y(x+y)^{-1/2}, x+y)$ - własność Lukacs'a, (b) dla X o macierzowym uogólnionym rozkładzie odwrotnym gaussowskim (GIG) i Y o macierzowym rozkładzie gamma produktowość zachowuje $\psi(x, y) = (x^{-1} - (x+y)^{-1}, x+y)$ - własność Matsumoto-Yor'a, (c) dla X i Y o macierzowych rozkładach beta produktowość zachowuje $\psi(x, y) = (x^{1/2}yx^{1/2}, (e - x^{1/2}yx^{1/2})^{-1/2}(e-y)(e-x^{1/2}yx^{1/2})^{-1/2})$, gdzie e jest macierzą jednostkową.

W wystąpieniu omówione będą zagadnienia odwrotne do przedstawionych w punktach (a-c). W szczególności w przypadku (a) udało się uzyskać tzw. mocną wersję twierdzenia Lukacs-Olkin-Rubin (bez założenia o niezmienniczości rozkładu "ilorazu"). Własność (b) odkryli ostatnio w jednym wymiarze Matsumoto i Yor (2001), badając pewne funkcjonały na procesach Lévy'ego. W obu przypadkach (a) i (b) podejście do zagadnienia odwrotnego polega na stosowaniu metod różniczkowania bez współrzędnych w stożku $\mathcal{V}_+$ i wymaga istnienia gładkich dodatnich gęstości. W przypadku (c) problem odwrotny pozostaje otwarty; znane jest jedynie rozwiązanie w jednym wymiarze.

Bibliografia

[1] Bobecka, K., Wesołowski, J. (2002) The Lukacs-Olkin-Rubin theorem without invariance of the "quotient", *Studia Math.* - w druku.
[2] Letac, G., Wesołowski, J. (2000) An independence property for the product of GIG and gamma laws, *Ann. Probab.* **28**, 1371-1383.

[3] Matsumoto, H., Yor, M. (2001) An analogue of Pitman's $2M - X$ theorem for exponential Wiener functionals. Part II: The role of the generalized inverse Gaussian laws, *Nagoya Math. J.* **162**, 65-86.
[4] Seshadri, V., Wesołowski, J. (2001) On a martingale property of beta random variables and related characterizations, *Preprint* [5] Wesołowski, J. (2002) The Matsumoto-Yor independence property for GIG and Gamma laws, revisited, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* - w druku.

Oleksandr Zaihraiev
Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet Mikołaja Kopernika, Toruń

Wielkie odchylenia dla sum niezależnych wektorów losowych o jednakowym rozkładzie ze zwartym nośnikiem

Głównym celem komunikatu jest przedstawienie lokalnego twierdzenia granicznego dla wielkich odchyleń mocniejszego od udowodnionego w [1]. Mianowicie, niech $\xi_1,\ \xi_2, \ldots$ będą i. i. d. wektorami losowymi o wartościach w R^d i rozkładzie P. Przypuśćmy, że suma $\xi_1 + \cdots + \xi_n$ posiada jednostajnie ograniczoną gęstość $p_n(x)$ dla $n \geq n_0 \geq 1$. Niech funkcja tworząca momenty $f(s)$ odpowiadająca rozkładowi P będzie skończona na zbiorze $S \subset R^d$ zawierającym początek układu współrzędnych jako punkt wewnętrzny. Jak wiadomo, P generuje tzw. *naturalną rodzinę wykładniczą* $\{P_s,\ s \in S\}$. Niech $\gamma(s)$ i $B(s)$ będą odpowiednio gradientem i hessianem funkcji ln $f(s)$. Wiadomo, że $\gamma(s)$ jest odwzorowaniem różnowartościowym S na $\gamma(S) \subset R^d$. Oznaczmy przez $s(x)$ funkcję odwrotną do $\gamma(s)$, zaś przez F dowolny domknięty i ograniczony podzbiór S_0, gdzie S_0 jest zbiorem punktów wewnętrznych zbioru S. Wówczas z lokalnego twierdzienia granicznego dla wielkich odchyleń udowodnionego w [1] wynika, że

$$\sup_{x\in\gamma(F)} \left| \frac{p_n(nx)}{\psi_n(x)\rho^n(x)} - 1 \right| = o(1), \quad n \to \infty,$$

gdzie $\rho(x) = \inf\limits_{s\in S} f(s)\exp(-\langle s, x\rangle),\ \psi_n(x) = (2\pi n)^{-d/2}(\det B(s(x)))^{-1/2}$.

W niniejszym komunikacie rozważony został przypadek, kiedy rozkład P ma zwarty wypukły nośnik X. Omówione będą warunki, przy których w powyższym wzorze zamiast $\gamma(F)$ można wstawić $\gamma(R^d) = X$. Metoda postępowania polega na dowodzie tzw. twierdzenia typu *Abela* i znalezieniu niezdegenerowanych rozkładów granicznych dla odpowiednio przekształconych rozkładów z rodziny $\{P_s,\ s \in R^d\}$. Rozkłady graniczne generują rodziny wykładnicze, które są *stabilne* w tym sensie, że wszystkie rozkłady należące do tych rodzin są tego samego typu (patrz [2]).

Bibliografia

[1] Borovkov, A. A. and Rogozin, B. A. *On the central limit theorem in the higher-dimensional case*, Teor. Verojatn. i Primenen., **10** (1965), 1, 61–69.

[2] Balkema, A. A., Klüppelberg C. and Resnick, S. I. *Stability for multivariate exponential families*, J. Math. Sci., **106** (2001), 2, 2777–2790.

Ryszard Zieliński
Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk, Warszawa

Prawo wielkich liczb Bernoulliego dla statystyków

SPWL dla schematu Bernoulliego (w standardowych oznaczeniach: S_n - liczba sukcesów w n niezależnych eksperymentach z prawdopodobieństwem sukcesu θ w każdym z nich) można sformułować w następujący sposób

$$\forall\theta \in (0,1)\ \forall\varepsilon > 0\ \forall\eta > 0\ \exists N\ \forall n \geq N \quad P_\theta\left\{\left|\frac{S_n}{n} - \theta\right| > \varepsilon\right\} < \eta$$

Na mocy nierówności Czebyszewa wystarczy przyjąć $N = N(\theta, \varepsilon, \eta) = \theta(1 - \theta)\big/\eta\varepsilon^2$. To twierdzenie jest bezużyteczne dla statystyków, bo oni zwykle wiedzą tylko to, że $\theta \in (0,1)$. Łatwo jednak otrzymujemy "SPWL dla statystyków"

$$\forall\varepsilon > 0\ \forall\eta > 0\ \exists N\ \forall n \geq N\ \forall\theta \in (0,1) \quad P_\theta\left\{\left|\frac{S_n}{n} - \theta\right| > \varepsilon\right\} < \eta$$

wystarczy przyjąć $N = N(\varepsilon, \eta) = \dfrac{1}{4\eta\varepsilon^2}$

Podobnie można zredagować "MPWL dla statystyków" (pokażę), ale chyba niestety odpowiednie "CTG dla statystyków" nie jest prawdziwe (sformułuję dokładniej).

Dla głębszej ilustracji problemu pokażę także probabilistyczną i statystyczną wersję twierdzenia o zbieżności kwantyli próbkowych do kwantyli w populacji.