Michał Baran
Instytut Matematyczny PAN - Warszawa

Minimalizacja ryzyka inwestycyjnego w modelach rynków finansowych.

Omówione zostanie kilka aspektów związanych z tak zwanym problemem zabezpieczania kwantylowego. Celem jest zmaksymalizowanie prawdopodobieństwa $P(X_T^{x,\pi} \geq H)$, gdzie $X_t^{x,\pi}$ jest procesem sterowanym, zaś H zmienną losową, poprzez odpowiedni dobór strategii π. Omówione zostaną pewne wyniki dotyczące modeli rynków z czasem dyskretnym i ciągłym oraz z czasem dyskretnym z uwzględniniem kosztów za transakcje. Przedstawione wyniki stanowią uogólnienie wyników z prac [1] i [2].

Bibliografia

[1] Föllmer H., Leukert P. (1999) *Quantile Hedging*, Finance and Stochastics 3 , 251-273,
[2] Föllmer H., Leukert P. (2000) *Efficient Hedging: Cost versus Shortfall Risk*, Finance and Stochastics 4 ,117-146,

Artur Bator
UMCS, Lublin
Dominik Szynal
UMCS, Lublin

Charakteryzacja podwójnego rozkładu wykładniczego w terminach momentów k-tych wartości rekordowych

W komunikacie podamy twierdzenia charakteryzujące podwójny rozkład wykładniczy (rozkład Laplace'a) w terminach momentów różnic k-tych wartości rekordowych i pewnych relacji między produktowymi momentami k-tych wartości rekordowych.

Bibliografia

[1] Govindarajulu, Z. (2001), Characterization of double exponential distribution using moments of order statistics, Commun. Statist. - Theory Meth., 30(11), 2355-2372

Witold Bednorz
Instytut Matematyki Uniwersytetu Warszawskiego

Zastosowania miar majoryzujących

W moim referacie zamierzam opowiedzieć o najnowszych pomysłach dotyczących oszacowań procesów stochastycznych. Pokażę zaproponowaną przez profesora Kwapienia definicję metryki minoryzującej, a następnie postaram się wykazać jej użyteczność do badania konkretnych zagadnień. Idea jest następująca.

Niech (T, d) będzie przestrzenią metryczną, ośrodkową. Niech μ-będzie borelowską miarą probabilistyczną na T. Założymy, że proces stochastyczny $(X_t)_{t\in T}$ jest ϕ-lipschitzowski, to znaczy

$$\sup_{s,t\in T} \mathbb{E}\phi(\frac{|X_s - X_t|}{d(s,t)}) \leqslant 1,$$

gdzie ϕ jest pewną funkcją Younga. Przy pewnych założeniach co do funkcji ϕ (np. kiedy ϕ spełnia warunek eksponencjalny $\phi^{-1}(xy) \leqslant \phi^{-1}(x) + \phi^{-1}(y)$) da się pokzać, że istnieje metryka τ na T związana z miarą μ taka, że

$$\mathbb{E} \sup_{s,t\in T} \phi(\frac{|X_s - X_t|}{\tau(s,t)}) \leqslant C < \infty.$$

Zamierzam również przedstawić własne pomysły co do przeniesienia rezultatów na przypadek kiedy proces X_t jest szacowany przez wiele metryk i funkcji Younga, czyli

$$\sup_{s,t\in T} \mathbb{E} \inf_{1\leqslant i\leqslant n} \phi_i(\frac{|X_s - X_t|}{d_i(s,t)}) \leqslant 1.$$

W szczególności powyższa metoda daje obiecujące rezulatаty przy badaniu wielowymiarowych chaosów gaussowskich.

Ostatnim punktem programu będzie rozważenie sytuacji kiedy badamy funkcje Younga postaci x^p. Omawiane rezultaty będą bazować na pracy profesora Kwapienia [1], pracach Talgranda [3],[4],[5] oraz własnych wynikach (w przygotowaniu). Należy też oddać cześć książce Ledoux-Talagranda [2].

Bibliografia

[1] Kwapień S., Rosiński J. (2003) Sample Hölder continuity of stochastic processes and majorizing measures, Preprint.

[2] Ledoux M., Talagrand, M. (1991) Probability in Banach spaces, Springer.

[3] Talagrand, M. (1990) Sample boundedness, The Annals of Probability, Vol 18, No.1, **1-49**.

[4] Talagrand, M. (1996) Majorizinig Measures: The generic chaining, The Annals of Probability, Vol 24, No. 3, **1049-1103**.

[5] Talagrand, M. (2003) The generic chaining, Book in preparation.

Bartłomiej Błaszczyszyn
Instytut Matematyczny Uniwersytetu Wrocławskiego i INRIA-ENS
François Baccelli
INRIA-ENS
Mohamed Kadhem Karray
France Telecom R&D

Intensywności blokad połączeń w dużych sieciach komórkowych typu CDMA; przestrzenny wzór Erlanga

CDMA (*Code Division Multiple Access*) — m.i. podstawa działania telefonii komórkowej trzeciej generacji (UMTS) — jest technologią, która pozwala zapewnić połączenia stacji bazowych z wieloma użytkownikami dzięki kodowaniu połączeń, realizowanych równocześnie we wspólnym paśmie częstotliwości. Zarówno teoretyczne rezultaty (twierdzenia Shannona) jak i praktycznie stosowane implementacje, wiążą przepustowość danego kanału informacyjnego z proporcją natężenia odebranego sygnału do natężenia szumu, na który składają się m.i. sygnały pochodzące z innych kanałów (tzw. interferencja).

Rozważmy sieć wielu stacji bazowych rozmieszczonych na płaszczyźnie, obsługujących użytkowników zgłaszających się do systemu w ustalonych podzbiorach (tzw. komórkach) płaszczyzny z żądaniem realizacji połączenia o określonej przepustowości. Możliwość równoczesnego spełnienia tych żądań można sprowadzić do zagadnienia istnienia nieujemnych rozwiązań $\mathbf{S}$ pewnej wielowymiarowej liniowej nierówności

$$\mathbf{S} \geq \mathbb{A}\mathbf{S} + \mathbf{b}\,, \tag{1}$$

gdzie $\mathbf{b} \geq 0$ oraz $\mathbb{A}$ jest pewną nieujemną macierzą, której elementy zależą od wzajemnego rozmieszczenia na płaszczyźnie stacji bazowych i użytkowników (wymiar $\mathbb{A}$ da się zredukować do liczby stacji bazowych). Warunkiem koniecznym i dostatecznym rozwiązywalności tego zagadnienia jest aby promień spektralny macierzy $\mathbb{A}$ był mniejszy od 1. Warunek ten jest trudny do weryfikacji w praktyce, gdy jest wielu użytkowników i stacji bazowych. Można jednak udowodnić następujący negatywny rezultat: jeśli założyć ustalony nieskończony model stacji bazowych na płaszczyźnie oraz losową, poissonowską konfigurację użytkowników, to nawet przy dowolnie małej intensywności procesu użytkowników nierówność (1) z pr. 1 nie ma nieujemnych rozwiązań (konsekwencja twierdzenia ergodycznego). Powyższy negatywny rezultat pokazuje, że w dużej sieci, nawet przy dowolnie małej intensywności zgłoszeń, pojawią się połączenia niemożliwe do zrealizowania (blokady, straty). Zagadnienie to jednak trudno analizować ilościowo w oparciu o warunek konieczny i dostateczny związany z promieniem spektralnym macierzy $\mathbb{A}$.

W pracach [1,2,3] zaproponowano i analizowano warunek wystarczający rozwiązywalności (1), który zakłada, że macierz $\mathbb{A}$ jest substochastyczna. W oparciu o ten warunek zdefiniowano algorytmy akceptacji/blokady zgłoszeń, które są łatwe w implementacji, a ponadto dają się analizować ilościowo. W niniejszej prezentacji przedstawimy wyliczenia natężenia blokady b_y typowego zgłoszenia w miejscu y, przy założeniu, że sieć stacji bazowych ma strukturę heksagonalną, a strumień zgłoszeń modelowany jest przestrzennym procesem narodzin i śmierci. W tym przypadku

$$b_y = \frac{\Pr\bigl(N \in \tilde{\mathbb{M}}, N + \varepsilon_y \notin \tilde{\mathbb{M}}\bigr)}{\Pr(N \in \tilde{\mathbb{M}})}\,, \tag{2}$$

gdzie N jest procesem punktowym Poissona (reprezentującym graniczny stacjonarny układ zgłoszeń do systemu w warunkach braku blokowania) a $\tilde{\mathbb{M}}$ jest zbiorem konfiguracji użytkowników w komórce do której należy y, dla których suma elementów w wierszu macierzy $\mathbb{A}$ odpowiadającym tej komórce jest mniejsza od 1. Na wyrażenie (2) można patrzeć jak na przestrzenne uogólnienie klasycznego wzoru Erlanga na prawdopodobieństwo blokady.

Bibliografia

[1] Baccelli, F., Blaszczyszyn, B. i Tournois, F. (2003) Downlink admission/congestion control and maximal load in CDMA networks, *Proc. of IEEE INFOCOM'03*,
[2] Baccelli, F., Blaszczyszyn, B. i Karray, M. (2003) Up and Downlink admission/congestion control and maximal load in large homogeneous CDMA networks, ukaże się w *MONET Special Issue on Optimization of Wireless and Mobile Networks* **10**, (April 2005),
[3] Baccelli, F., Blaszczyszyn, B. i Karray, M. (2004) Blocking rates in large CDMA networks via spatial Erlang formula, *w przygotowaniu*

Krzysztof Bogdan
Instytut Matematyczny PAN

Teoria potencjału stabilnych procesów o przyrostach niezależnych

Przedstawione zostaną wyniki z teorii potencjału stabilnych procesów Lévy'ego związane z własnościami funkcji Greena i innych funkcji nadharmonicznych tych procesów na obszarach o regularnej geometrii.

Tomasz Bojdecki
Uniwersytet Warszawski
L.G.Gorostiza, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, México

Granice fluktuacji czasów przebywania układów czastek–ułamkowy vs podułamkowy ruch Browna

W $\mathbf{R}^d$ mamy standardowy (tzn. miara intensywności $= \lambda$ – miara Lebesgue'a) układ czastek. Każda czastka zaczyna sie poruszać standardowym, symetrycznym ruchem stabilnym z parametrem α $(0 < \alpha \leq 2)$, niezależnie jedna od drugiej. Po czasie wykładniczym z parametrem V czastka ginie z prawdopodobieństwem $1/2$ albo z prawdopodobieństwem $1/2$ rozpada sie na dwie, które podejmuja ruch stabilny z tym samym parametrem.

N jest procesem empirycznym, tzn. $N_t(B)$ oznacza liczbe czastek znajdujacych sie w zbiorze B w chwili t. $L(t) = \int_0^t N_s ds$ jest *procesem przebywania* (*occupation process*). Przyspieszamy czas, tj. definiujemy $L_T(t) = L(tT)$ i badamy sytuacje, gdy $T \to \infty$. Rozważamy mianowicie *proces fluktuacji*

$$X_T(t) = \frac{1}{F_T}(L_T(t) - EL_T(t)),$$

gdzie F_T jest liczbowym parametrem normujacym. Dowodzimy, że gdy $\alpha < d < 2\alpha$ i $F_T = T^{3/2-d/(2\alpha)}$, to dla każdego $\tau > 0$

$$X_T \Longrightarrow C\lambda\beta \quad \text{gdy } T \to \infty, \text{w } C([0,\tau], \mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)),$$

($\Longrightarrow$ oznacza zbieżność wg rozkładów), gdzie β jest *podułamkowym ruchem Browna* z parametrem $h = 3 - d/\alpha$, tzn. ciagłym, scentrowanym procesem Gaussa w $\mathbf{R}$ o kowariancji

$$\mathrm{Cov}(\beta_s, \beta_t) = t^h + s^h - 1/2[(t+s)^h + |t-s|^h].$$

Jeżeli nie ma rozgałeziania, tj. $V = 0$, to dla $d < \alpha$, $F_T = T^{1-d/(2\alpha)}$ otrzymujemy zbieżność do $C\lambda\xi$, gdzie ξ jest ułamkowym ruchem Browna z parametrem $h = 2 - d/\alpha$, tzn. ciagłym, scentrowanym procesem Gaussa o kowariancji

$$\mathrm{Cov}(\xi_s, \xi_t) = 1/2(t^h + s^h - |t-s|^h).$$

Podułamkowy ruch Browna ma wiele własności podobnych do klasycznego ułamkowego r.B., ale przyrosty ma słabiej skorelowane i wykazuje słabsza "zależność dalekiego zasiegu" (stad nazwa).

Marta Borowiecka-Olszewska
Instytut Matematyki, Uniwersytet Zielonogórski

Wektory losowe ściśle substabilne

Wektor losowy $\mathbf{X}$ nazywamy β-substabilnym, $\beta \in (0, 2]$, jeżeli istnieje symetryczny β-stabilny wektor losowy $\mathbf{Y}$ oraz zmienna losowa $\Theta \geq 0$ niezależna od wektora $\mathbf{Y}$ taka, że $\mathbf{X} \stackrel{d}{=} \mathbf{Y}\Theta^{1/\beta}$.

W wystąpieniu wprowadzimy nową klasę rozkładów probabilistycznych - rozkłady ściśle substabilne. Klasa ta jest szersza od szeroko zbadanej już rodziny rozkładów substabilnych. Wektory losowe ściśle β-substabilne będą generowane przez ściśle β-stabilne wektory losowe $\mathbf{Y}$. Ponadto zajmiemy się sprawdzeniem kiedy wektory ściśle substabilne są ściśle stabilne oraz podamy pewne własności nowej klasy rozkładów.

Marek Bożejko
Instytut Matematyczny, Uniwersytet Wrocławski

Zastosowanie nieprzemiennej probabilistyki do klasycznych problemów probabilistyki

W referacie podam przykłady jak wolna probabilistyka Voiculescu i jej deformacje (q-deformacja, probabilistyka Boolowska i tym podobne) pozwalają rozwiązać problemy w klasycznej czyli przemiennej probabilistyce i w analizie funkcjonalnej.

Przykłady to:

1. Spacery losowe na drzewach -metody wolnej probabilistyki.
2. Procesy Markowa opisane przez W.Bryca i J.Wesołowskiego – metody q-probabilistyki.
3. Nierowności typu Chinczyna.

4. Nierowności hyperkontrakcyjne i ultrakontrakcyjne dla $L(p, m)$, gdzie miara m jest miarą ortogonalizującą wielomiany q-Hermite'a, wielomiany Czebyszewa lub też wielomiany Kestena.

Bibliografia

[1] Bozejko, Kummerer, Speicher, *q-Gaussian Processes: Noncommutative and Classical Aspects*, Comm. Math. Phys. 185 (1997), 129-154,

[2] Bozejko, Speicher, *Interpolations between Bosonic and Fermionic Relations given by Generalized Brownian Motion*, Math.Zeit.222, (1996),135-160,

[3] Bozejko, Speicher, *An Example of a Generalized Brownian Motion*, Comm. Math. Phys. 137 (1991), 519-531,

[4] M.Bozejko, M.Guta, *Functors of White Noise associated to Characters of the Infiniye Symmetric Group*, Comm. Math. Phys., 2002,

[5] M.Bozejko, J.Wysoczanski, *Remarks to t-transformations of measures and convolutions*, Ann. Inst. H.Poicare Probab. Statisti. 37 (2001),737-761,

[6] M.Bozejko, *Ultracontractivity and strong Sobolev inequality for q-Ornstein-Uhlenbeck semigroup*, Infinite Dim. Analysis, Quantum Prob. and Related Topics, 1998,

[7] W.Bryc, J.Wesolowski, *Conditional moments of q-Meixner processes*, http://arxiv.org/abs /math.PR/0403016, 2004,

[8] A.Krystek, H.Yoshida, *Generalized t-transformations of probability measures and deformed convolutins, Preprint 2004,*

[9] A.Plucinska, On a stochastic process determined by the condition expectation and the conditional variance, Stochastics 10(1983), 115-129,

[10] D.Voiculescu, Lectures on free probability theory, Lecture Notes in Math vol.1738, Springer, 2000, 279-349.

Artur Bryk
Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych, Politechnika Warszawska
Polsko-Japońska Wyższa Szkoła Technik Komputerowych

Zastosowanie metody rozkładu ortogonalnego do estymacji gęstości prawdopodobieństwa dla danych zależnych

Niech $(V_t)_{t=1}^{\infty}$ będzie stacjonarnym ciągiem rzeczywistych zmiennych losowych takim, że $E|V_1| < \infty$ oraz V_t jest $\mathcal{F}_t$-mierzalna, gdzie $(\mathcal{F}_t)_{t=-\infty}^{\infty}$ jest rosnącym ciągiem σ-ciał takich, że $\bigcap_{i=-\infty}^{t} \mathcal{F}_i$ jest trywialne dla dowolnego t.
Rozpatrzmy następujący rozkład na czynniki ortogonalne scentrowanej sumy $S_n = \sum_{t=1}^{n}(V_t - EV_t)$

$$S_n = \sum_{k=-\infty}^{n} E(S_n|\mathcal{F}_k) - E(S_n|\mathcal{F}_{k-1}) \qquad p.\,n.$$

Niech $||V|| = (EV^2)^{1/2}$. Powyższa równość prowadzi do oszacowania

$$\| S_n \|^2 \leq \sum_{k=-\infty}^{n} \left(\sum_{t=1}^{n} \| P_1 V_{t-k+1} \| \right)^2,$$

gdzie $P_k V_t = E(V_t|\mathcal{F}_k) - E(V_t|\mathcal{F}_{k-1})$.

W komunikacie omówione zostanie wykorzystanie reprezentacji ortogonalnej do badania własności asymptotycznych estymatorów jądrowych gęstości brzegowej f procesu średniej ruchomej nieskończonego rzędu postaci:

$$X_t = \sum_{i=0}^{\infty} c_i \eta_{t-i}, \qquad t = 1, 2, \ldots,$$

gdzie $(\eta_i)_{i=-\infty}^{\infty}$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie, średniej 0 i skończonej wariancji, a współczynniki $c_i \in \ell^2$.
Niech $\hat{f}_n(x) = (nb_n)^{-1} \sum_{t=1}^{n} K(b_n^{-1}(x - X_t))$ będzie estymatorem jądrowym dla ustalonej gęstości prawdopodobieństwa K i parametru wygładzającego b_n.
Oszacowanie $||S_n||^2$ dla $V_t = (nb_n)^{-1} K(b_n^{-1}(x - X_t))$ i $\mathcal{F}_t = \sigma(\ldots, \eta_{t-1}, \eta_t)$ prowadzą do oszacowania wariancji estymatora $\hat{f}_n(x)$. Struktura martyngałowa reprezentacji ortogonalnej oraz nierówności Freedmana [2] i Burkholdera wykorzystane są do uzyskania ich własności prawie na pewno i według prawdopodobieństwa (słaba i mocna zgodność oraz rzędy zbieżności).

W szczególności, dla absolutnie sumowalnych c_i rząd zbieżności p.n. $\hat{f}_n(x) - f(x)$ do 0 jest równy $O\big((\log n/nb_n)^{1/2} + b_n^2\big)$.

Powyższe wyniki można uogólnić na estymatory pochodnej gęstości dowolnego rzędu.

Bibliografia

[1] A. Bryk, J. Mielniczuk (2003), Asymptotic properties of density estimates for dependent data: application of projection method, preprint
[2] D. Freedman (1975), On tail probabilities for martingales, *The Annals of Probability* **3**, 100-118

Krzysztof Dębicki
Instytut Matematyczny, Uniwersytet Wrocławski
Sem Borst
CWI, Amsterdam
Bert Zwart
Eindhoven University of Technology

Subwykładnicze asymptotyki rozkładu supremum z perturbowanego alternującego procesu odnowy

Niech $X(t), Y(t)$ będą niezależnymi procesami stochastycznymi o stacjonarnych przyrostach. Jednym z intensywnie badanych zagadnień jest analiza rozkładu

$$\sup_{t\geq 0}(X(t)+Y(t)-ct), \tag{3}$$

gdzie $c > EX(1) + EY(1)$.

Badania te, motywowane zastosowaniami w teorii ryzyka, prowadzone są obecnie dla znacznie szerszej klasy procesów stochastycznych (na przykład opisujących wielokanałowe modele kolejkowe z priorytetem). W szczególności w przypadku, gdy $X(t), Y(t)$ są scałkowanymi alternującymi procesami odnowy, dotychczasowe prace koncentrowały się nad charakteryzacją warunków przy których zachodzi asymptotyczna równoważność

$$P(\sup_{t\geq 0}(X(t)+Y(t)-ct)>u) = P(\sup_{t\geq 0}(X(t)+EY(t)-ct)>u)(1+o(1)) \quad \text{dla } u\to\infty,$$

zwana *zasadą zredukowanego załadowania* (reduced load principle). Pozwala ona na redukcję problemu do szukania asymptotyki rozkładu supremum tylko z procesu $X(t)$.

W referacie skoncentrujemy się na analizie asymptotyki ogona rozkładu (3), gdy zasada zredukowanego załadowania **nie** zachodzi. W szczególności rozważania dotyczyć będą przypadku, gdy $X(t)$ jest scałkowanym alternującym procesem odnowy, a proces zaburzający $Y(t)$ jest scentrowanym procesem gaussowskim o stacjonarnych przyrostach.

Bibliografia

[1] Borst, S., Dębicki, K., Zwart, B. (2004) Subexponential asymptotics of hybrid fluid and ruin models. *Accepted for publication in Ann. Appl. Prob.*
[2] Borst, S., Dębicki, K., Zwart, B. (2004) The supremum of a Gaussian process over a random interval. *Accepted for publication in Stat. Prob. Lett.*

Łukasz Dębowski
Instytut Podstaw Informatyki Polskiej Akademii Nauk, Warszawa

O sumie autokorelacji dla procesu stacjonarnego o bezwzględnie sumowalnej funkcji częściowej autokorelacji

Niech ϕ_{nk} będą współczynnikami najlepszych liniowych predyktorów zmiennych X_{n+1} względem zmiennych $X_1, ..., X_n$ dla słabo stacjonarnego procesu $(X_i)_{i\in\mathbb{Z}} =: X_\mathbb{Z}$ o wartościach zespolonych. Dodefinujmy $\phi_{n0} := -1$ i $\phi_{nk} := 0$ dla $k > n$ i niech $\alpha(n)$ oznacza funkcję częściowej autokorelacji tego procesu. Następujące twierdzenie wynika z rekursji Durbina-Levinsona [1] i pewnego twierdzenia z monografii [2]:

Twierdzenie 1 *Niech* $\phi_n(z) := \sum_{k=0}^{n} \phi_{nk} z^k$. *Dla* $|z| \leq 1$ *zachodzi*

$$|\phi_n(z)| \in \left[\prod_{k=1}^{n}(1-|\alpha(k)|), \prod_{k=1}^{n}(1+|\alpha(k)|)\right]. \tag{4}$$

Oprócz tego, $\sum_{j=0}^{n} |\phi_{nj}| \le \prod_{k=1}^{n} (1 + |\alpha(k)|)$ *i*

$$\sum_{j=0}^{n} |\phi_{nj} - \phi_{mj}| \le \prod_{k=1}^{n} (1 + |\alpha(k)|) - \prod_{k=1}^{m} (1 + |\alpha(k)|)$$

dla $n > m$. *Jeżeli dodatkowo* $\alpha(k) \in \mathbb{R}$ *dla wszystkich* $k \le n$, *to*

$$\phi_n(\pm 1) = \prod_{k=1}^{n} \left(1 - (\pm 1)^k \alpha(k)\right). \tag{5}$$

Definicja 1 *Proces* $X_{\mathbb{Z}}$ *nazywamy kwazifinitarnym, jeżeli* $\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha(k)| < \infty$ *oraz* $|\alpha(k)| < 1$ *dla wszystkich* k.

W świetle twierdzenia 1, dla każdego procesu kwazifinitarnego , $\phi_n(z)$ zbiega jednostajnie do $\phi(z)$ dla $|z| \le 1$ przy $n \to \infty$.

W oparcu o zmienne $Z_{p+n}^{p} := \left[-\sum_{k=0}^{n-1} \phi_{n-1,k} X_{p+n-k}\right] / \sqrt{\gamma(0) v_{n-1}}$, gdzie $v_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 - |\alpha(k)|^2\right)$, konstruujemy ciąg standardowych białych szumów $Z_{\{p+1,p+2,\ldots\}}^{p}$. Dla każdego skończonego p mamy $X_{p+n} = \sum_{k=0}^{n-1} \psi_{n-1,k} Z_{p+n-k}^{p}$ i $Z_{p+n}^{p} = \sum_{k=0}^{n-1} \pi_{n-1,k} X_{p+n-k}$, gdzie π_{nk} i ψ_{nk} można łatwo obliczyć z ϕ_{nk}. Dla każdego procesu niedeterministycznego równości $\lim_{p\to\infty} Z_n^{-p} = Z_n^{-\infty}$ zachodzą w $\mathcal{L}^2$, gdzie $Z_{\mathbb{Z}}^{-\infty}$ jest standardowym białym szumem danym jednoznacznie przez rozkład Wolda. Zachodzi zbieżność punktowa $\psi_k := \lim_{n\to\infty} \psi_{nk}$ i $\pi_k := \lim_{n\to\infty} \pi_{nk}$.

Dla każdego procesu kwazifinitarnego $\pi_n(z) := \sum_{k=0}^{n} \pi_{nk} z^k$ także zbiega jednostajnie dla $|z| \le 1$ — do $\pi(z) = \phi(z)/\sigma$, gdzie $\sigma > 0$ jest wariancją innowacji. Ponieważ $|\pi(z)| \ge \prod_{k=1}^{\infty} \sqrt{\frac{1-|\alpha(k)|}{1+|\alpha(k)|}} > 0$, możemy dowieść, że π_k i ψ_k dobrze definiują przedstawienia odwracalne i kauzalne, $Z_n^{-\infty} = \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k X_{n-k}$ oraz $X_n = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k Z_{n-k}^{-\infty}$. Oprócz tego, proces $X_{\mathbb{Z}}$ jest kauzalny i odwracalny, tzn. $\sum_{k=0}^{\infty} |\psi_k| < \infty$, $\sum_{k=0}^{\infty} |\pi_k| < \infty$. Dzięki temu wiemy, że $\pi(z)\psi(z) = 1$ dla $|z| \le 1$.

Niech $\rho(n)$ będzie funkcją autokorelacji procesu $X_{\mathbb{Z}}$. Z poprzedzających rozważań wynika twierdzenie główne:

Twierdzenie 2 *Proces kwazifinitarny jest procesem o zależności krótkiego zasięgu, tzn.* $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\rho(k)| < \infty$, *przy czym*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \rho(k) z^k \in \left[\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1 - |\alpha(k)|}{1 + |\alpha(k)|}, \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1 + |\alpha(k)|}{1 - |\alpha(k)|}\right] \tag{6}$$

dla $|z| \le 1$. *Jeżeli dodatkowo* $\alpha(k) \in \mathbb{R}$ *dla wszystkich* k, *to*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} (\pm 1)^k \rho(k) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1 + (\pm 1)^k \alpha(k)}{1 - (\pm 1)^k \alpha(k)}. \tag{7}$$

Bibliografia

[1] Brockwell, P. J., R. A. Davis, R. A. (1987) Time Series: Theory and Methods, Springer.
[2] Grenander, U. Szegö, G. (1984) Toeplitz Forms and Their Applications, Chelsea.

Adam Jakubowski
Uniwersytet Mikołaja Kopernika

W stronę ogólnego twierdzenia Dooba-Meyera

W swoich doniosłych pracach [4] i [5], Paul-André Meyer udowodnił, że dowolny submartyngał klasy (D) posiada jednoznaczny rozkład na sumę jednostajnie całkowalnego martyngału i "‘naturalnego" (dziś: prognozowalnego) całkowalnego procesu rosnącego.

Ponad 20 lat później, Graversen i Rao [2] otrzymali rozkład typu Dooba-Meyera (bez jednoznaczności) dla procesów o skończonej energii. Mimo braku jednoznaczności, rezultat Graversena i Rao pozostaje użytecznym narzędziem w badaniu procesów Markowa [2], a także procesów Dirichleta i ich rozszerzeń [1].

Celem komunikatu jest przedstawienie jednolitego podejścia do zagadnienia istnienia rozkładu typu Dooba-Meyera. Kluczowym narzędziem jest prawo wielkich liczb Komlósa, zastosowane w sposób analogiczny jak w pracy [3]. Uzyskany rezultat pokazuje, że klasa procesów posiadających rozkład typu Dooba-Meyera jest istotnie obszerniejsza od przestrzeni liniowej generowanej przez "‘klasyczne przypadki" omówione powyżej.

Bibliografia

[1] Coquet, F., Jakubowski, A., Mémin, J. i Słomiński, L. (2004) Natural decomposition of processes and weak Dirichlet processes, preprint.
[2] Graversen, S.E. i Rao, M. (1985) Quadratic variation and energy, *Nagoya Math. J.*, **100**, 163-180.
[3] Jakubowski, A. (2002) An almost sure approximation for the predictable process in the Doob-Meyer decomposition theorem, ukaże się w: **Séminaire de Probabilités XXXVIII**, *Lecture Notes in Mathematics.*
[4] Meyer, P.A. (1962) A decomposition theorem for supermartingales, *Illinois J. Math.*, **6**, 193–205.
[5] Meyer, P.A. (1963) Decomposition of supermartingales: The uniqueness theorem, *Illinois J. Math.*, **7**, 1–17.

Katarzyna Jańczak
Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet Mikołaja Kopernika, Toruń

Dyskretna aproksymacja stochastycznych równań różniczkowych wstecz z odbiciem

W pracy Gégout-Petit i Pardoux [3] udowodniono istnienie i jednoznaczność mocnego rozwiązania stochastycznego równania różniczkowego wstecz z odbiciem w zbiorze wypukłym $D \subset \mathbb{R}^d$ postaci:

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s)ds - \int_t^T Z_s dW_s + K_T - K_t, \quad t \in [0, T],$$

gdzie W jest standardowym d-wymiarowym procesem Wienera, a f jest funkcją lipschitzowską ze względu na zmienne przestrzenne.

W komunikacie przedstawiony zostanie schemat numerycznego rozwiązywania powyższego równania, wykorzystujący metody aproksymacyjne dla równań wstecz bez odbić z prac [1] i [2].

Bibliografia

[1] Briand P., Delyon B., Mémin J. (2001) Donsker-type theorem for BSDEs, Electron. Comm. Probab. 6, 1–14.
[2] Briand P., Delyon B., Mémin J. (2002) On the robustness of backward stochastic differential equations, Stochastic Process. Appl. 97(2), 229–253.
[3] Gégout-Petit, A., Pardoux, E. (1996) Équations différentielles stochastiques rétrogrades réfléchies dans un convexe, Stochastics Stochastics Rep. 57, no. 1-2, 111–128.

Zbiegniew J. Jurek

O rozkładach niezmienniczych pewnego przekształcenia losowego

Proces stochastyczny typu 'shot-noise' opisuje totalną sumę losowych wpłwow/sygnałów, które pojawiają się w chwilach losowych. Ponadto wpływy/sygnały są modyfikowane w czasie tzw. funkcją 'response'.

PYTANIE: czy istnieją niezdegenerowane rozkłady wpływów/sygnałów, które są niezmiennicze na powyżej opisaną transformację losową (tzw.'shot-noise transform') ?

Bibliografia

[1] A.M. Iksanov, Z.J. Jurek, *On fixed points of Poisson shot noise transforms, Adv. Appl. Probab. 34, December 2002, 798-825.*

Rafał Kapica
Uniwersytet Śląski

Twierdzenia typu Throna dla funkcji o wektorowych wartościach losowych a twierdzenie Kreina-Rutmana

W przypadku deterministycznym mamy użyteczne twierdzenia W.J. Throna [2], które opisują szybkość zbieżności do zera ciągu iteracji funkcji postaci $f(x) = sx+x^{1+\alpha}F(x)$, gdzie $s \in [0,1]$, $\alpha > 0$, a F jest funkcją ograniczoną. W referacie przedstawimy wyniki dotyczące szybkości zbieżności do zera ciągu iteracji funkcji losowej $f : X \times \Omega \to X$. Przez iteracje takiej funkcji rozumiemy funkcje $f^n : X \times \Omega^{\mathbb{N}} \to X$ określone w następujący sposób:

$$f^1(x,\omega) = f(x,\omega_1), \quad f^{n+1}(x,\omega) = f(f^n(x,\omega),\omega_{n+1}),$$

dla $x \in X$ i $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots) \in \Omega^{\mathbb{N}}$. Nawiązując do [3] zakładać będziemy, że X jest stożkiem w przestrzeni Banacha i dla pewnego ciągłego operatora liniowego L spełniającego założenia twierdzenia Kreina-Rutmana [1] mamy

$$\lim_{x \to 0} \sup_{\omega \in \Omega} \frac{||f(x,\omega) - Lx||}{||x||} = 0.$$

Bibliografia

[1] H.G. Kreĭn and M.A. Rutman, *Linear operators leaving invariant a cone in a Banach space*, Uspehi Matem. Nauk (N.S.) **3**, no. 1 (23) (1948), 3-95; English translation: *Functional Analysis and Measure Theory*, Amer. Math. Soc. Translations, Series 1, vol. **10**, 1962, 199-325.
[2] W.J. Thron, *Sequences generated by iteration*, Trans. Amer. Math. Soc. **96** (1960), 38-53.
[3] J. Walorski, *Convex solutions of the Schröder equation in Banach spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **125** (1997), 153-158.

Łukasz Kruk
UMCS, Lublin

Sterowanie optymalne w pewnych n–wymiarowych problemach singularnego sterowania stochastycznego

Sterowanie singularne procesami Markowa to klasa problemów, w których sterujący może zmieniać dryf procesu za cenę proporcjonalną do wahania całkowitego procesu sterującego. W referacie omówimy sterowanie optymalne n–wymiarowym ruchem Browna w nieskończonym przedziale czasowym, w którym koszt marginalny jest sumą funkcji użyteczności h obecnego stanu procesu i kosztu sterowania, proporcjonalnego do przemieszczenia spowodowanego w chwili obecnej przez sterowanie. Rozważymy dwa typy problemów:

i) Dyskontowanie wykładnicze przy założeniu wypukłości h. W tym wypadku, przy dowolnym n, optymalnie sterowany proces jest ruchem Browna odbitym ukośnie od brzegu tzw. obszaru niedziałania (non–action region).

ii) Sterowanie ergodyczne, w którym dopuszczalnymi sterowaniami są odbicia normalne ruchu Browna na brzegach obszarów będących zbiorami Caccioppoli. Używając narzędzi geometrycznej teorii miary otrzymujemy istnienie obszarów (sterowań) optymalnych dla dowolnego n i pewne ich własności, np. gładkość przy $n \leq 7$.

Weronika Łaukajtys
Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet Mikołaja Kopernika, Toruń

Stochastyczne równania różniczkowe z odbiciem w zbiorach wypukłych

W komunikacie przedstawione zostanie twierdzenie o istnieniu i jednoznaczności rozwiązania stochastycznego równania różniczkowego z odbiciem w zbiorze wypukłym D postaci

$$X_t = H_t + \int_0^t F(X)_{s-}\, dZ_s + K_t, \quad t \in \mathbb{R}^+,$$

gdzie H jest procesem adaptowanym, Z jest semimartyngałem, a F operatorem lipschitzowskim. Powyższe twierdzenie uogólnia wcześniejsze wyniki Tanaki [3] i Słomińskiego [2]. Ponadto podane zostaną nowe oszacowania dla rozwiązań deterministycznego problemu Skorochoda stowarzyszonego z dowolna funkcją prawostronnie ciągłą z lewostronnymi granicami.

Bibliografia

[1] Łaukajtys, W. (2004) On stochastic differential equations with reflecting boundary condition in convex domains (preprint).
[2] Słomiński, L. (2000) On $\mathbb{L}^p$-distance between semimartingales reflecting in different domains, *Stochastics Stochastics Rep.* **71**, 91–118.
[3] Tanaka, H. (1979) Stochastic differential equations with reflecting boundary condition in convex regions, *Hiroshima Math. J.* **9**, 163–177.

Rafał Łochowski
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski
Szkoła Główna Służby Pożarniczej, Warszawa

Oszacowania momentów i ogonów wielowymiarowego chaosu generowanego przez nieujemne zmienne losowe z logarytmicznie wklęsłymi ogonami

W komunikacie zostaną podane precyzyjne oszacowania momentów i ogonów wielowymiarowego chaosu $\sum a_{i_1,\dots,i_d} X_{i_1}^{(1)} \cdots X_{i_d}^{(d)}$ ($a_{i_1,\dots,i_d} \geq 0$) generowanego przez niezależne, nieujemne zmienne losowe $X_{i_1}^{(1)}, \dots, X_{i_d}^{(d)}$ z logarytmicznie wklęsłymi ogonami. Oszacowania te są optymalne z dokładnością do uniwersalnych stałych. Podane zostanie również zastosowanie tych oszacowań w pewnym modelu grafu losowego.

Bibliografia

[1] Latala, R., Łochowski R. *Moment and tail estimates for multidimensional chaoses generated by positive random variables with logarithmically concave tails*, Progress in Probability 56, Birkhäuser, Basel 2003, 77-92

Iwona Malinowska
Politechnika Lubelska, Lublin
Piotr Pawlas
UMCS, Lublin
Dominik Szynal
UMCS, Lublin

Estymacja parametrów rozkładów prawdopodobieństwa w terminach k-tych wartości rekordowych

W komunikacie prezentujemy wzory na nieobciążone estymatory liniowe o minimalnej wariancji parametrów skali i położenia dla różnych rozkładów prawdopodobieństwa. Estmatory otrzymane metodą najmniejszych kwadratów rozszerzają wyniki Ahsanullaha na przypadek k-tych dolnych i górnych wartości rekordowych.

Bibliografia

[1] Ahsanullah, M. (1995) Record Statistics, Nova Science, Commack, NY.
[2] Lloyd, E.H. (1952) Least squares estimation of locations and scale parameters, Ann. Math. Prob. 3.
[3] Pawlas, P. and Szynal, D. (1998) Relations for single and product moments of k-th record values from exponential and Gumbel distributions, J. Appl. Statist. Sci. 7(1).

Przemysław Matuła
Instytut Matematyki,
Uniwersytet Marii Curie–Skłodowskiej

O nierównościach dla pewnych klas dodatnio kwadrantowo zależnych zmiennych losowych

Niech X i Y będą zmiennymi losowymi (z.l.) z gęstościami f_X i f_Y odpowiednio. Wprowadźmy oznaczenie

$$H(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y) - P(X \leq x)P(Y \leq y).$$

Rozpatrywać będziemy z.l. dodatnio kwadrantowo zależne (PQD) czyli takie, dla których $H(x,y) \geq 0$ dla wszystkich $x, y \in R$. Celem referatu jest przedstawienie górnych oszacowań dla $\sup_{x,y\in R} H(x,y)$ w terminach kowariancji z.l. X i Y oraz $\|f_X\|_\infty$, $\|f_Y\|_\infty$ dla pewnych klas PQD z.l. w szczególności dla z.l. typu TP_2 (totally positive of order 2). Nierówności takie znajdują zastosowanie w badaniu zbieżności procesów empirycznych, estymatorów jądrowych budowanych w oparciu o ciągi dodatnio zależnych z.l.. W referacie przedstawione zostaną również pewne wielowymiarowe warianty takich nierówności. Omawiane wyniki stanowią rozszerzenie pracy [1] i zostały zawarte w artykule [2].

Bibliografia

[1] Matuła, P. (2003) On some inequalities for positively and negatively dependent random variables with applications, *Publ. Math. Debrecen* 63/4, pp. 511–521
[2] Matuła, P. (2003) A note on some inequalities for certain classes of positively dependent random variables, przesłane do druku

Grażyna Mazurkiewicz
Instytut Matematyki, Uniwersytet Zielonogórski, ul. Podgórna 50, 65-246 Zielona Góra, Poland

Weakly stable vectors and magic distribution of S. Cambanis, R. Keener and G. Simons

A random vector $\mathbf{X}$ is called weakly stable if for all random variables Θ_1 and Θ_2 independent of $\mathbf{X}$, $\mathbf{X}'$ there exists a random variable Θ independent of $\mathbf{X}$ such that

$$\mathbf{X}\Theta_1 + \mathbf{X}'\Theta_2 \stackrel{d}{=} \mathbf{X}\Theta.$$

J.K.Misiewicz and K.Urbanik showed (see [6]) that for every random vector $\mathbf{X}$ this property is equivalent to the following condition:

$$\forall a, b \in \mathbb{R}\ \exists \Theta \text{ independent of } \mathbf{X} : \quad a\mathbf{X} + b\mathbf{X}' \stackrel{d}{=} \mathbf{X}\Theta.$$

In this paper we consider weakly stable distributions and we give some elementary properties of weakly stable random vectors. The main results in the paper are connected with the distribution in $\mathbb{R}^n$ discovered by S. Cambanis, R. Keener and G. Simons in 1983, which is (up to rescaling) the only one extreme point in the family of ℓ_1-symmetric distributions. We give here explicite formulas for projections of this distribution, conditional densities and plots of some of this densities.

Bibliografia

[1] Bretagnolle, J., Dacunha Castelle, D., Krivine, J.-L., (1966) Lois stables et espaces L^p.
[2] Cambanis, S., Keener, R., Simons, G. (1983) On α-Symmetric Multivariate Distributions.
[3] Feller, W. (1966) An Introduction to Probability Theory and its Applications.
[4] Lukács, E., (1960) Characteristic Functions.
[5] Mazurkiewicz, G. (2002) When a scale mixture is equivalent with rescaling.
[6] Misiewicz, J.K., Urbanik, K. (reprint 2003) Classes of measures closed under mixing and convolution.
[7] Samorodnitsky, G., Taqqu, M.S., (1994) Stable Non-Gaussian Random Processes.
[8] Tortrat, A., (1969) Sur les mélanges de lois indéfiniment divisibles.
[9] Zolotarev, V.M. One-dimensional Stable Distributions.

Zbigniew Michna
Katedra Matematyki, Akademia Ekonomiczna we Wrocławiu

Aproksymacje procesu ryzyka przy dużych i małych obciążeniach w domenie α-stabilnej

W pracy przedstawiamy dwie aproksymacje procesu ryzyka przy różnych założeniach dotyczący wielkości składki w stosunku do oczekiwanych roszczeń. Przy tak zwanych dużych obciążeniach wielkość składki na jednostkę czasu niewiele przekracza średnią wielkość roszczeń na jednostkę czasu natomiast przy małych obciążeniach wielkość składki jest duża w stosunku do średniej wielkości roszczeń na jednostkę czasu. Zakładamy, że rozkład wielkości roszczeń należy do obszaru przyciągania rozkładu α-stabilnego ($1 < \alpha < 2$). Przy tych dwóch różnych założeniach proces ryzyka przybliżamy α-stabilnym ruchem Lévy'ego z liniowym dryfem to znaczy pokazujemy słabą zbieżność w topologii Skorochoda ciągu procesów ryzyka do α-stabilnego rychu Lévy'ego. Dokładne formuły na wyznaczenie prawdopodobieństwa ruiny dla α-stabilnego ruchu Lévy'ego pozwalają oszacować i porównać prawdopodobieństwo ruiny przy tych dwóch różnych założeniach.

Jolanta Misiewicz
Instytut Matematyki, Uniwersytet Zielonogórski
Grażyna Mazurkiewicz
Instytut Matematyki, Uniwersytet Zielonogórski

On (c,p)-pseudostable random variables

In [7] K. Oleszkiewicz defined a p-pseudostable random variable X as a symmetric random variable for which the following equation holds:

$$\forall\ a,b \in \mathbb{R}\ \exists\ d(a,b) \quad aX + bX' \stackrel{d}{=} (|a|^p + |b|^p)^{1/p} X + d(a,b)G,$$

where G independent of X has normal distribution $N(0,1)$, X' denotes independent copy of X, and $\stackrel{d}{=}$ denotes equality of distributions. In this paper we define and study (c,p)-pseudostable random variables X for which the following equation holds:

$$\forall\ a,b \in \mathbb{R}\ \exists\ d(a,b) \geq 0 \quad aX + bX' \stackrel{d}{=} c(a,b)X + d(a,b)G_p, \tag{1'}$$

where c is a quasi-norm on $\mathbb{R}^2$, G_p independent of X is symmetric p-stable with the characteristic function $e^{-|t|^p}$. This is a very natural generalization of the idea of p-pseudostable variables. In this notation X is p-pseudostable iff X is $(\|\cdot\|_p, 2)$-pseudostable. In the paper we show that if X is (c,p)-pseudostable then there exists $r > 0$, $C, D \geq 0$ such that $c(a,b)^r = |a|^r + |b|^r$ and $\mathbb{E}e^{itX} = \exp\{-C|t|^p - D|t|^r\}$.

Bibliografia

[1] Bretagnolle, J., Dacunha Castelle, D., Krivine, J.-L., (1966) Lois stables et espaces L^p.
[2] Cambanis, S., Keener, R., Simons, G. (1983) On α-Symmetric Multivariate Distributions.
[3] Feller, W. (1966) An Introduction to Probability Theory and its Applications.
[4] Lukács, E., (1960) Characteristic Functions.
[5] Mazurkiewicz, G. (2002) When a scale mixture is equivalent with rescaling.
[6] Misiewicz, J.K., Urbanik, K. (reprint 2003) Classes of measures closed under mixing and convolution.

[7] Oleszkiewicz, K., (2003) On p-pseudostable random variables, Rosenthal Spaces and ℓ_p^n ball slicing.
[8] Samorodnitsky, G., Taqqu, M.S., (1994) Stable Non-Gaussian Random Processes.
[9] Tortrat, A., (1969) Sur les mélanges de lois indéfiniment divisibles.
[10] Zolotarev, V.M. One-dimensional Stable Distributions.

Jan Obłój
Wydział Matematyki, Uniwersytet Warszawski
Laboratoire de Probabilités et Modèles Aléatoires, Université Paris 6
Marc Yor
Laboratoire de Probabilités et Modèles Aléatoires, Université Paris 6

Problem zanurzenia Skorohoda w nowym kontekście i jego rozwiązanie

Dokładnie 40 lat temu, Skorohod [4] postawił i rozwiązał problem znalezienia, mając daną miarę probabilistyczną, momentu stopu, który ją zanurza w ruchu Browna. Od tego czasu problem ten doczekał się wielu uogólnień i rozwiązań, jak również wielorakich zastosowań [3]. Prawdopodobnie najbardziej znane rozwiązanie zostało przedstawione przez Azéme i Yora [1].

We wspólnym artykule, z M. Yorem, rozważamy problem zanurzenia dla dodatnich funkcjonałów wycieczek ruchu Browna. Klasa ta zawiera tak ważne przykłady jak czas życia (czas od ostatniego pobytu w zerze) oraz maksimum. Niech F_t będzie procesem związanym z takim funkcjonałem. Mając daną miare μ na $\mathbb{R}_+$ szukamy momentu stopu T takiego, że $F_T \sim \mu$. Okazuje się, że owocne jest szukanie T postaci $\inf\{t > 0 : F_t \geq \varphi(L_t)\}$, gdzie (L_t) jest czasem lokalnym w zerze. Dostajmy proste wzory na φ, analogiczne do wspomnianego wyżej rozwiązania Azémy i Yora.

W referacie zostanie krótko omówiony klasyczny problem i rozwiązanie Azémy-Yora, co pozwoli zaproponować ogólną metodologię, która zostanie użyta do rozwiązania problemu w kontekście zarysowanym powyżej. Okazuje się ponadto, że ta sama metodologia pozwala na rozważenie tej tematyki dla ogólnych funkcjonałow wycieczek procesów Markowa. Pozwala to, na przykład, na rozwinięcie niezrandomizowanego, bezpośredniego, zanurzenia dla martyngału Azémy. Ten ostatni aspekt zostanie omówiony jeżeli pozwolą na to ramy czasowe.

Bibliografia

[1] J. Azéma and M. Yor (1979) *Une solution simple au problème de Skorokhod*, Séminaire de Probabilités XIII, Lectures notes in Math **721**, 90–115.
[2] J. Obłój and M. Yor (2004) *An explicit Skorokhod embedding for the age of Brownian excursions and Azéma martingale*, Stochastic Process. Appl. **110**, no. 1, 83–110.
[3] J. Obłój (2004) *The Skorokhod problem and its offspring*, Math ArXiv:math.PR//0401114.
[4] A. V. Skorokhod (1965) *Studies in the theory of random processes* Translated from the Russian by Scripta Technica. Inc. Addison-Wesley Publishing Co., Inc., Reading, Mass.

Adam Osękowski
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego

O nierównościach martyngałowych wynikających z pewnych rodzajów dominacji

Niech $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n), \mathbb{P})$ będzie przestrzenią probabilistyczną wyposażoną w pewną dyskretną filtrację. Niech (M_n), (N_n) będą martyngałami adaptowanymi do tej filtracji, przyjmującymi wartości w przestrzeniach Hilberta $\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$, odpowiednio. Oznaczmy ciągi różnic tych martyngałów przez (d_n), (e_n). Przypuśćmy, że różnice (e_n) dominują różnice (d_n), tzn. istnieje pewna relacja $\prec$ taka, że dla każdego n mamy $d_n \prec_{\mathcal{F}_{n-1}} e_n$ (mówimy wtedy, że martyngał M jest dominowany przez martyngal N w sensie relacji $\prec$). Na przykład, dla każdego n mamy $\mathbb{E}(|d_n|_{\mathcal{H}}|\mathcal{F}_{n-1}) \leq \mathbb{E}(|e_n|_{\mathcal{K}}|\mathcal{F}_{n-1})$ (jest to tzw. silna dominacja martyngałów).

Interesować nas będą nierówności między martyngałami j.w., m. in.

$$t\mathbb{P}(|M_n| \geq t) \leq C\mathbb{E}|N_n|, \ t > 0, \ n = 0, 1, 2, \ldots$$

(nierówność słabego typu) oraz

$$(\mathbb{E}|M_n|^p)^{1/p} \leq C_p(\mathbb{E}|N_n|^p)^{1/p}, \ n = 0, 1, 2, \ldots$$

(nierówność silnego typu).

Bardzo użytecznym narzędziem przy dowodzeniu tego rodzaju nierówności jest metoda Burkholdera. Okazuje się, że udowodnienie konkretnej nierówności sprowadza się do skonstruowania pomocniczej funkcji, spełniającej pewne specjalne warunki. W trakcie odczytu omówię szczegółowo tę metodę i przedstawię kilka rezultatów uzyskanych za jej pomocą.

Bibliografia

[1] Bañuelos, R., Trans. Amer. Math. Soc. 293 (1986), 547-563, *Martingale transforms and related singular integrals.*
[2] Bañuelos, R., Wang, G., Duke Math. J. (1995), 575-600, *Sharp inequalities for martingales with application to the Beurling-Ahlfors and Riesz transforms.*
[3] Burkholder, D. L., Ann. Prob. 7 (1979), 858-863, *A sharp inequality for martingale transforms.*
[4] Burkholder, D. L., Colloque Paul Lévy, Palaiseau, 1987, Astérisque 157-158 (1988b), 75-94, *Sharp inequalities for martingales and stochastic integrals.*
[5] Burkholder, D. L., Proceedings of the Seminar on Harmonic Analysis and Partial Differential Equations, El Escorial, 1987, Lecture Notes in Mathematics 1384 (1989a), 1-23, *Differential subordination of harmonic functions and martingales.*
[6] Burkholder, D. L., Ann. Prob. 22 (1994), 995-1025, *Strong differential subordination and stochastic integration.*
[7] Burkholder, D. L., Trans. Amer. Math. Soc. 354 (2002), 91-105, *The best constant in the Davis inequality for the expectation of the martingale. square function*
[8] Wang, G., doctoral thesis, University of Illinois, Urbana, Illinois (1989), *Some sharp inequalities for conditionally symmetric martingales.*
[9] Wang, G., Ann. Prob. 19 (1991), *Sharp inequalities for the conditional square function of a martingale.*

Zbigniew Palmowski
Uniwersytet Wrocławski
Andreas Kyprianou
Uniwersytet w Utrechcie, Holandia

Techniki martyngałowe związane z procesami Lévy'ego

W referacie przedstawimy różnorodne martyngały związane z procesem Lévy'ego $X(t)$ oraz z odbitym procesem Lévy'ego $Z(t) = \sup_{s \leq t} X(s) - X(t)$. Niektóre z tych martyngałów uogólniają dotychczas znane martyngały związane z ruchem Browna. Pozwalają one również na prostsze dowodzenie znanych problemów w teorii fluktuacji. W referacie skoncentrujemy się na klasycznych problemach wyjścia (patrz Zolotarev (1964), Takács (1967), Bingham (1975), Rogers (1990), Bertoin (1997) oraz ostatnio Kyprianou & Palmowski (2003, 2004), Nguyen-Ngoc & Yor (2004)). Do rozwiązania powyższych problemów wykorzystujemy transformację Esschera oraz martyngał Walda, który dzięki regule Itô daje uogólniony martyngał Kennedy'ego (1976) (patrz również Asmussen & Kella (2000)). Pozwala to uniknąć używania takich zaawansowanych metod jak teoria wycieczek czy też faktoryzacja Wienera-Hopfa. Faktoryzacja Wienera-Hopfa pojawia się tutaj jako jeden z wniosków i w przeciwieństwie do tradycyjnych metod nie jest używana w dowodach. Techniki martyngałowe pozwalają również na otrzymanie fluktuacyjnych tożsamości dla procesów Markowsko addytywnych. Tożsamości te są scharakteryzowane wtedy poprzez funkcje o wartościach macierzowych będące analogiem funkcji skalowych otrzymanych dla procesów Lévy'ego. Martyngały te mogą być także wykorzystane do badania zależności procesów zwarunkowanych z procesami transformowanymi przez h-transformatę (patrz Doob (1957), Bertoin (1997), Lambert (2002) oraz Palmowski & Rolski (2004)).

Bibliografia

[1] Asmussen, S. & Kella, O. (2000) Multi-dimensional martingale for Markov additive processes and its applications. *Adv. Appl. Probab.* **32(2)**, 376–380.
[2] Bertoin, J. (1997) Exponential decay and egrodicity of completely assymetric Lévy processes in a finite interval, *Ann. App. Prob.* **7**, 156–169.
[3] Bingham, N. H. (1975) Fluctuation theory in continuous time. *Adv. Appl. Probab.* **7**, 705–766.
[4] Kennedy, D. (1976) Some martingales related to cumulative sum tests and single-server queues. *Stoch. Proc. Appl.* **4**, 261–269.
[5] Kyprianou, A. & Palmowski, Z. (2003) Fluctuations of spectrally negative Markov additive processes. Złożony do druku.
[6] Kyprianou, A. & Palmowski, Z. (2004) A martingale review of some fluctuation theory for spectrally negative Lévy processes. Ukaże się w Seminaire de Probabilities.
[7] Lambert, A. (2000) Completely asymmetric Lévy processes confined in a finite interval, *Ann. Inst. H. Poincaré. Prob. et Stat.* **36**, 251–274.
[8] Nguyen-Ngoc, L. & Yor, M. (2004) Some martingales associated to reflected Lévy processes. Złożony do druku.
[9] Palmowski, Z. & Rolski, T. (2004) Markov processes conditioned to never exit a subspace of the state space with application to the single server queue. Złożony do druku.
[10] Rogers, L.C.G. (1990) The two-sided exit problem for spectrally positive Lévy processes. *Adv. Appl. Probab.* **22**, 486–487.

[11] Takács, L. (1967) *Combinatorial methods in the theory of stochastic processes.* John Wiley & Sons, Inc.
[12] Zolotarev, V.M. (1964) The first passage time of a level and the behavior at infinity for a class of processes with independent increments. *Theory Prob. Appl* **9**, 653–661.

Katarzyna Pietruska-Pałuba
Instytut Matematyki
Uniwersytetu Warszawskiego

Dyfuzje ułamkowe na przestrzeniach metrycznych

Ruch Browna na przestrzeni fraktalnej $\mathcal{F}$ jest przykładem dyfuzji ułamkowej: procesu (mocno) markowskiego o ciągłych trajektoriach, ktorego gęstość prawdopodobieństw przejścia względem odpowiedniej miary Hausdorffa μ na $\mathcal{F}$ spełnia następujące oszacowanie:

$$c_1 \frac{1}{t^{d_f/d_w}} \exp\left(-c_2 \left(\frac{d(x,y)}{t^{1/d_w}}\right)^{\frac{d_w}{d_w-1}}\right) \le p(t,x,y) \le c_3 \frac{1}{t^{d_f/d_w}} \exp\left(-c_4 \left(\frac{d(x,y)}{t^{1/d_w}}\right)^{\frac{d_w}{d_w-1}}\right),$$

które jest szczególnym przypadkiem oszacowania

$$\frac{1}{t^{d_f/d_w}} \Phi_1\left(\frac{d(x,y)}{t^{1/d_w}}\right) \le p(t,x,y) \le \frac{1}{t^{d_f/d_w}} \Phi_2\left(\frac{d(x,y)}{t^{1/d_w}}\right), \tag{8}$$

gdzie d_f to wymiar Hausdorffa zbioru $\mathcal{F}$, $d_w \ge 2$ to tzw. wymiar błądzenia (ang. *walk dimension*) zbioru $\mathcal{F}$, natomiast Φ_1 i Φ_2 są nieujemnymi monotonicznie malejącymi funkcjami na $[0, \infty)$.

Jeżeli na przestrzeni metrycznej z miarą (X, d, μ) istnieje dyfuzja ułamkowa (tzn. proces mocno markowski z gęstością przejścia spelniającą (8), to przy pewnych zalożeniach dotyczących całkowalności funkcji Φ_2 możemy uzyskać nietrywialne wyniki dotyczące pewnych przestrzeni funkcyjnych na X. W komunikacie wyniki te zostaną pokrótce omówione.

Bibliografia

[2] Grigoryan, A., Hu, J., Lau, K. S. (2003), Heat kernels on metric measure spaces and an application to semilinear elliptic equations, Trans. Amer. Math. Soc., **355**, 2065–2095
[2] Pietruska-Pałuba, K. (2000), On function spaces related to fractional diffusions on $d-$sets, Stoch. Stoch. Rep., **70**, 153–164
[3] Pietruska-Pałuba, K., J. (2004), Heat kernels on metric spaces and a theorem concerning constant functions, preprint.

Zbigniew Puchała
Instytut Matematyczny Uniwersytetu Wrocławskiego

Asymptotyki rozkładu czasu kolizji

Rozważmy n niezależnych cząstek Brownowskich $X_1, ..., X_n$ błądzących w R startujących odpowiednio z $x_1 < x_2 < ... < x_n$. Momentem pierwszej kolizji nazywamy zmienną losową

$$\tau = \inf\left\{ t \geq 0 : \prod_{i=1}^{n-1} \left| X_t^{i+1} - X_t^i \right| = 0 \right\}$$

Asymptotykę ogona rozkładu zmiennej losowej τ uzyskał Grabiner w pracy [1]. W komunikacie zostanie pokazane w jaki sposób otrzymać tę asymptotykę elementarnymi metodami. Podane zostaną także częsciowe wyniki gdy zamiast cząstek Brownowskich będziemy rozważać ciągłe błądzenie przypadkowe.

Bibliografia

[1] Grabiner, D.J. (1999) Brownian motion in the Weyl chamber, non-colliding particles, and random matrices. *Ann. Inst. Henri Poincare*, 35, 177-204

Teresa Rajba
ATH Bielsko-Biała

O miarach nadniezmienniczych na prostej

Niech $h > 0$. Niech λ będzie σ-skończoną miarą na $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Mówimy, że λ jest h-nadniezmiennicza, gdy

$$\lambda(B + h) \geq \lambda(B), \ \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}). \tag{9}$$

Niech $H \subset [0, \infty)$ będzie domkniętą (addytywną) półgrupą. Mówimy, że λ jest H-nadniezmiennicza, krócej nadniezmiennicza, gdy λ jest h-nadniezmiennicza $\forall h \in H$.
Przykłady.

a) $\lambda_a(dx) = (x - a)_+ dx$, $a \in \mathbb{R}$, $H = [0, \infty)$,

b) $\lambda_a = \sum_{n=0}^{\infty} \delta_{a+nh_0}$, $a \in \mathbb{R}$, $H = \{nh_0\}_{n=0}^{\infty}$, $h_0 > 0$.

Powyższe miary są nie tylko H-nadniezmiennicze, są one również H-niezmiennicze na zbiorach $E_a = [a, \infty)$ i $E_a = \{a + nh_0\}_{n=0}^{\infty}$, odpowiednio, gdy miara H-niezmiennicza na zbiorze $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ jest miarą taką, że

$$\lambda(B + h) = \lambda(B) \tag{10}$$

$\forall B \in \mathcal{B}(E)$, $\forall h \in H$. Dla $h > 0$ operator przyrostu Δ_h jest zdefiniowany następująco:

$$\Delta_h \lambda(B) = \lambda(B) - \lambda(B - h). \tag{11}$$

Otrzymujemy wtedy że, $\Delta_h \lambda$ jest miarą na $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ oraz λ jest h-nadniezmiennicza wtedy i tylko wtedy, gdy $\Delta_h \lambda \geq 0$.

Ogólniej, rozważając superpozycje wielu operatorów przyrostu, badamy miary wielokrotnie nadniezmiennicze: miary $(h_1, \ldots, h_k)$-nadniezmiennicze, gdzie $h_1 > 0, \ldots, h_k > 0$, $k \in \mathbb{N}$, i miary k-krotnie h-nadniezmiennicze, gdy $h_1 = \ldots = h_k = h$. Jako uogólnienie rozważamy miary α-krotnie nadniezmiennicze, gdy $\alpha > 0$ jest niekoniecznie liczbą naturalną, oraz miary ∞-razy h-nadniezmiennicze.

Wtedy, klasa miar spektralnych Lévy'ego odpowiadających pewnym rozkładom nieskończenie podzielnym wielokrotnie rozkładalnym pokrywa się z klasą miar wielokrotnie nadmiezmienniczych, (w multiplikatywnym przypadku), spełniających dodatkowe warunki całkowalności.

Jan Rosiński
University of Tennessee, USA

Ogólne kryteria ciągłości i ograniczoności trajektorii z zastosowaniem do procesów nieskończenie podzielnych

Odczyt ten będzie miał w dużej części charakter przeglądowy. Rozpoczynając od klasycznego kryterium Kołmogorowa, dyskutowane będą metody entropii metrycznej, miar majoryzujacych oraz systemów podzialów. Ta ostatnia metoda, wymyślona i obecnie lansowana przez Talagranda pod nazwą "generic chaining", pozwala na analizę sytuacji, które były zbyt skomplikowane do badania poprzednimi metodami. Wiele problemów pozostaje otwartych; niektóre z nich stanowią przedmiot ostatnich badań autora z S. Kwapieniem [1] i R. Latałą.

W ostatniej części odczytu podane będą zastosowania do analizy gładkości trajektorii procesów nieskończenie podzielnych na podstawie wspólnej pracy z M.B. Marcusem [2].

Bibliografia

[1] Kwapień, S. and Rosiński, J. (2004). Sample Hölder continuity of stochastic processes and majorizing measures. To appear in *Progress in Probability.* Birkhäuser.
[2] Marcus, M.B. and Rosiński, J. (2004). Continuity and boundedness of infinitely divisible processes: a Poisson point process approach. To appear in *Journal of Theoretical Probability.*

Andrzej Rozkosz
Wydział Matematyki i Informatyki UMK, Toruń

Reprezentacja stochastyczna dyfuzji stowarzyszonych z operatorami różniczkowymi w formie dywergencyjnej

Referat dotyczył będzie procesów dyfuzji stowarzyszonych z operatorami różniczkowymi postaci

$$A = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a^{ij}(t,x) \frac{\partial}{\partial x_j} \right).$$

O macierzy a zakładać będziemy jedynie, że ma ograniczone, mierzalne współczynniki i jest jednostajnie eliptyczna.

Brak założenia regularności a powoduje, że dyfuzje związane z A nie są, w ogólności, semimartyngałami. Okazuje się jednak, że są one procesami Dirichleta, to znaczy można je przedstawić jednoznacznie w postaci sumy ciągłego lokalnego martyngału i ciągłego procesu o zerowej wariacji kwadratowej. Co więcej, można podać reprezentację stochastyczną obu składowych.

W referacie omówimy pewne wyniki dotyczące wspomnianego rozkładu i reprezentacji. Wyniki te, w odniesieniu do dyfuzji związanych z A, wzmacniają znane rezultaty Fukushimy i Lyonsa-Zhenga. Wspomnimy też o zastosowaniach wyników o reprezentacji dyfuzji. Między innymi sformułujemy pewne uogólnienie wzoru Kaca-Feynmana.

Zdzisław Rychlik
Instytut Matematyki, Uniwesytet Marii Curie-Skłodowskiej,Lublin
Konrad Szuster
Instytut Matematyki, Uniwesytet Marii Curie-Skłodowskiej,Lublin

Prawie pewna wersja centralnego twierdzenia granicznego dla ciągów niezależnych zmiennych losowych o różnych rozkładach

Celem referatu jest przedstawienie prawie pewnej wersji centralnego twierdzenia granicznego dla niezależnych zmiennych losowych o różnych rozkładach. Niech $S_n, n \geq 1$, będzie sumą częściową niezależnych zmiennych losowych o zerowej wartości oczekiwanej i skończonych wariancjach i niech $a(x)$ będzie pewną funkcją rzeczywistą. Prezentujemy warunki dostateczne, przy których

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} a\left(S_{n_k}/(ES_{n_k}^2)^{1/2}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} a(x)d\Phi(x), \quad P\text{−p.p.}$$

dla pewnych podciągów $\{n_k,\ k \geq 1\}$, gdzie Φ oznacza dystrybuantę standardowego rozkładu normalnego.

Tomasz Szarek
Instytut Matematyczny PAN

Ergodyczne własności operatorów Markowa działających na miarach

Wykład będzie poświęcony ergodycznym własnościom procesów fellerowskich określonych w przestrzeniach metrycznych, które są ośrodkowe i zupełne. Wcześniejsze rezultaty były formułowane pod mocnym założeniem mówiącym, że operator Markowa opisujący dany proces jest nierozszerzający w metryce metryzującej słabą zbieżność (zob. [2], [3], [4]).

Niech (X_n) będzie dyskretnym procesem Fellera, a P odpowiadającym mu operatorem przejścia. Przyjmijmy oznaczenia:

$(\mathcal{E}\mathbf{1})$ $\exists z \in X \ \ \forall r > 0 \ \ \forall x \in X \ \ \exists n_0 \in \mathbb{N}$

$$P^n(x, B(z,r)) > 0 \quad \text{dla } n \geq n_0$$

oraz

$(\mathcal{E}\mathbf{2})$ $\forall f \in C(X)$ rodzina funkcji $\{P^n f; n = 1, 2, \ldots\}$ jest jednakowo ciągła na zwartych podzbiorach X (tu P oznacza operator działający na funkcjach i odpowiadający naszemu procesowi).

Główne twierdzenia wykładu brzmią:

Twierdzenie 1. Proces Fellera, który spełnia warunki $(\mathcal{E}1)$ i $(\mathcal{E}2)$ ma miarę niezmienniczą.

Twierdzenie 2. Załóżmy, że spełnione są założenia Twierdzenia 1. Jeżeli ponadto: $\forall\, r > 0 \ \exists\, \alpha > 0 \ \ \forall x \in X \ \ \exists n_0 \in \mathbb{N}$

$$P^n(x, B(z,r)) > \alpha \quad \text{dla } n \geq n_0,$$

to miara niezmiennicza jest jedyna oraz proces jest stabilny.

Powyższe twierdzenie wzmacnia wyniki Ł. Stettnera (zob. [1]).

Bibliografia

[1] Stettner Ł. (1994) *Remarks on ergodic conditions for Markov processes on Polish spaces*, Bull. Pol. Acad. Sci., Math. 42 (2), pp. 103–114,

[2] Szarek T. (2000), *The stability of Markov operators on Polish spaces*, Studia Math. 143 pp. 145–152,

[3] Szarek T. (2003), *Invariant measures for Markov operators with applications to function systems*, Studia Math. 154 (3), pp. 207–222,

[4] Szarek T. (2003), *Invariant measures for nonexpansive Markov operators on Polish spaces*, Dissert. Math. 415, pp. 62.

Wojciech Szatzschneider
Escuela de Actuaria Universidad Anahuac, Mexico
Monique Jeanblanc
Départment de Mathématiques, Université d'Evry Val d'Essone, France

Environment & financial markets

We argue that practical solutions for the environmental degradation are in a short supply. Most of the increasingly complex models set off different opinions about their applicability. Models should be well specified. It means that inputs should be observed or estimated. This requirement is hard to meet in environmental studies. Thus, the efficient global environmental decision–making becomes very difficult. Moreover politicians often tend to justify their decisions by inappropriate theories. This situation leads to proliferation of ineffective studies and waste of resources.

We shall propose to apply the market approach in the solutions of several environmental problems. It could result in more transparent transfer of funds and the involvement of everybody concerned. Also we can expect that the transparency could stem in an increment of these funds.

We shall focus on the issue of deforestation due to its importance for the global well–being, and the possibility to assess the number of trees. Our approach is based on a positive involvement of holders of "good" options bought or, in the first stage, obtained for free. In the case of the forest "good" means a kind of Asian call option. We will show that, in a natural way, three kinds of optimization problems crop up:

1)Individual agent problem.

2)Local optimization problem.

3)Global optimization problem.

The first one is how the holder of a good option could eventually contribute to reforestation. The second one is how to choose prices of options, to maximize the space mean of the temporal mean of the "asset" in given place. The last one is how to distribute funds into particular projects.

In the final part we analyze the dynamical control for bounded processes and awards partially based on the mean of the underlying value.

Bibliografia

[1] Jeanblanc, M., W. Szatzschneider (2002), *Environment and finance: why we should make the environment a part of the financial markets*, Revista Mexicana de Economia y Finanzas, Vol. 1, No. 2, pp. 131-142.

Kaziemierz Urbanik
Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk

Zagadnienie prognozy i przestrzenie Musielaka-Orlicza

Harmonizowalnym ciągiem zmiennych losowych nazywamy ciąg współczynników Fouriera miary losowej. W 1964 roku wprowadziłem pojęcie prognozy dla ciągów stacjonarnych, w którym ortogonalność z teorii Wienera i Kołmogorowa jest zastąpiona przez niezależność, a więc nie wymaga założenia skończoności drugiego momentu. Celem pracy jest pokazanie, że dla harmonizowalnych ciągów dopuszczających prognozę środkiem badawczym, analogicznym do przestrzeni L^2 w teorii Wienera-Kołmogorowa, są przestrzenie Musielaka-Orlicza. Charakteryzacja deterministycznych ciągów harmonizowalnych jest równoważna z rozwiązaniem problemu Kreina-Kołmogorowa-Szegö'go dla tych przestrzeni.

Jacek Wesołowski
Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych, Politechnika Warszawska

Grzegorz Rempała
Department of Mathematics, University of Louisville, USA

Asymptotyka produktów sum z zastosowaniem do wyznacznika macierzy Wisharta

Dla tablicy trójkątnej zmiennych losowych $\mathbf{X} = ((X_{k,i})_{i=1,\dots,k})_{k=1,2,\dots}$ sumy wierszowe oznaczamy jako $S_k = X_{k,1} + \ldots + X_{k,k}$, $k = 1, 2, \ldots$. W pracy [1], uogólniając wynik Arnolda i Villasenora z pracy [2] dotyczący asymptotyki sum rekordów z rozkładu Gumbela, przedstawiono ogólne twierdzenie graniczne ze zbieżnością do rozkładu lognormalnego dla iloczynów sum $\prod_{k=1}^{n} S_k$ w sytuacji gdy S_k były kolejnymi sumami częściowymi ciągu (X_n) niezależnych zmiennych losowych całkowalnych z kwadratem, tzn. gdy dla każdego $k = 1, 2, \ldots$ mamy $X_{k,i} = X_i$, $i = 1, \ldots, k$. Analogiczny wynik otrzymano również dla U-statystyk. W pracy [3] Qi rozszerzył omawiane twierdzenie na zbieżność do rozkładów logstabilnych o wykładniku stabliności $\alpha > 1$.

Najnowszy wynik, przedstawiony w pracy [4], dotyczy tablicy $\mathbf{X}$, w której wszystkie zmienne $X_{k,i}$ są dodatnie, całkowalne w potędze $p > 2$, niezależne i o jednakowym rozkładzie. Wtedy, przy odpowiednim normowaniu, również otrzymuje się asymptotyczną lognormalność iloczynów sum.

Okazuje się, że wynik ten można łatwo wykorzystać do uzyskania asymptotyki wyznacznika macierzy Wisharta. Znane są podobne twierdzenia asymptotyczne o dość skomplikowanych dowodach. Należą one do Gyrki i są przedstawione w jego monografii [5].

Bibliografia

[1] Rempała, G., Wesołowski, J. (2002) Asymptotics for products of sums and U-statistics, *Electr. Comm. Probab.* **7**, 47-54.
[2] Arnold, B.C., Villasenor, J.A. (1998) The asymptotic distribution of sums of records, *Extremes* **1:3**, 351-363.
[3] Qi, Y. Limit distributions for product of sums. *Statist. Probab. Lett.* **62** (2003), 93-100.
[4] Rempała, G., Wesołowski, J. (2004) Asymptotics for products of independent sums with an application to Wishart determinants, *Preprint.*
[5] Girko, V.L. (1990) *Theory of Random Determinants*, Kluwer, Dordrecht.

Oleksandr Zaihraiev
Uniwersytet Mikołaja Kopernika, Toruń

Ile składników uczestniczy w tworzeniu wielkiego odchylenia sumy niezależnych wektorów losowych?

Klasyczny wynik teorii wielkich odchyleń mówi, że jeśli przy sumowaniu niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie, należącym do obszaru przyciągania nie gaussowskiego rozkładu α-stabilnego, dochodzi do wielkiego odchylenia, to owo wielkie odchylenie tworzy się przez jeden najwięk- szy składnik, zaś wkład pozostałych składników można zaniedbać.

W wielu przypadkach ten wynik jest prawdziwy również dla wektorów losowych (patrz, na przykład [1],[2],[3]).

Okazało się jednak, że ilość składników, które uczestniczą w tworzeniu wielkiego odchylenia, może zależeć od jego kierunku. Na przykład w kierunkach osobliwych wielkie odchylenie może się tworzyć kosztem dwóch najwięk- szych składników.

Bibliografia

[1] Kalinauskaite, N. B. (1973) The influence of the maximum modulus of a summand on a sum of independent random vectors, I. *Litovsk. Mat. Sb.*, 13, No 4, 117–123.
[2] Tkačuk, S. G. (1974) A theorem on large deviations in R^s in case of a stable limit law. In: *Random Processes and Statistical Inference*, Fan, Tashkient, 5, 164–174.
[3] Zaigraev, A. (1999) Multivariate large deviations with stable limit laws. *Probab. Math. Stat.*, 19, No 2, 323–335.

Bartosz Ziemkiewicz
Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet Mikołaja Kopernika, Toruń

Wycena opcji zależnych od trajektorii w modelach rynku finansowego opartych na ułamkowym procesie Wienera

W komunikacie zostanie przedstawiona nowa metoda aproksymacji trajektorii ułamkowego procesu Wienera z parametrem Hursta $H \in (1/2, 1)$. Oparta została ona na reprezentacji całkowej ułamkowego procesu Wienera pochodzącej z pracy [1]. Podane zostanie twierdzenie opisujące tempo zbieżności tej aproksymacji w normie $\mathbb{L}^p$. Omówione zostaną również zastosowania zaproponowanej metody do wyceny opcji zależnych od przeszłości w ułamkowych modelach rynku finansowego.

Bibliografia

[1] Norros I., Valkeila E., Virtamo J. (1999) An elementary approach to a Grisanov formula and other analytical results on fractional Brownian motions, Bernoulli 5(4), 571-587.
[2] Valkeila E. (1998) On some properties of geometric fractional Brownian motions, Preprint.
[3] Ziemkiewicz, B. (2004) On approximation of average expectation prices for path dependent options in fractional models,