Streszczenia referatów

Rafał Adamski
Wydział Matematyki Uniwersytetu Łódzkiego

Aproksymacja ciągów słabo-stacjonarnych ciągami zdeterminowanymi i całkowicie niezdeterminowanymi

Rozważmy przestrzeń probabilistyczną $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Niech $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ będzie słabo-stacjonarnym ciągiem (zespolonych) zmiennych losowych należących do $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Wówczas dla dowolnej liczby $\epsilon > 0$ istnieje słabo-stacjonarny i zdeterminowany ciąg $(Y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ z $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ taki, że $\|X_n - Y_n\|_2 < \epsilon$ dla $n \in \mathbb{Z}$. Ponadto, jeśli przestrzeń $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ jest nieskończenie wymiarowa, to dla dowolnych liczb $\epsilon > 0$ oraz $N \in \mathbb{N}$ istnieje słabo-stacjonarny i całkowicie niezdeterminowany ciąg $(Z_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ z $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ taki, że $\|X_n - Z_n\|_2 < \epsilon$ dla $0 \le n \le N$.

Bibliografia

[1] Urbanik, K. (1967) Lectures on Prediction Theory.

Michał Baran
Uniwersytet Kardynała Stefana Wyszyńskiego

Silne aproksymacje dla rozwiązań równan typu Lévy'ego

W komunikacie przedstawione zostaną wyniki dotyczące rownań postaci

$$dY_t = a(Y_{t-})dt + b(Y_{t-})dW_t + \int_{|x|\leq 1} F(Y_{t-}, x)\tilde{N}(dt, dx) + \int_{|x|>1} G(Y_{t-}, x)N(dt, dx),$$

gdzie W_t jest procesem Wienera, $N(t, A)$ losową miarą Poissonowską, zaś $\tilde{N}(t, A)$ jej miarą skompensowaną. Błąd aproksymacji Y_t^δ opartej o dyskretyzację odcinka $[0, T]$ o średnicy mniejszej od δ mierzony jest jako

$$\rho(Y_t^\delta) = E[\sup_{t\in[0,T]} \mid Y_t - Y_t^\delta \mid^2].$$

Głównym celem jest taka konstrukcja procesu Y_t^δ, ażeby rząd zbieżności nie przekraczał z góry ustalonej liczby γ, tzn. aby $\rho(Y_t^\delta) \leq C\delta^{2\gamma}$. Przedstawione wyniki stanowią uogólnienie twierdzeń z [1] dla przypadku równań dyfuzyjnych oraz z [2] dla równań dyfuzyjnych wzbogaconych o szum generowany przez standardowy proces Poissona.

Bibliografia

[1] Kloeden P., Platen E. (1995) Numerical Solutions of Stochastic Differential Equations, Springer-Verlag
[2] Gardoń A. (2004) The Order of Approximations for Solutions of Ito-type Stochastic Differential Equations with Jumps, Stochastic Analysis and Applications, Vol.22 No.3

Witold Bednorz
Instytut Matematyki, Uniwersytet Warszawski

Badanie ograniczoności procesów stochastycznych

W referacie zamierzam przedstawić uzyskane wyniki, dotyczące badania regularności procesów stochastycznych. Niech (T, d) będzie przestrzenią metryczną, φ-funkcją Orlicza-Younga, a $X(t)$, $t \in T$ ośrodkowym procesem spełniającym warunek

$$\mathbf{E}\varphi(\frac{|X(s) - X(t)|}{d(s,t)}) \leqslant 1.$$

Zakładamy więc, że proces ma przyrosty ograniczone względem metryki d i funkcji φ. Okazuje się, że pewne geometryczne własności przestrzeni T (np. istnienie miary majoryzującej) implikują ograniczoność, ciągłość a nawet Lipschitzowskość (względem odpowiedniej metryki), prawie wszystkich trajektorii procesu X. W wystąpieniu skomentuje rezultaty uzyskane w pracach [1], [2]. Następnie przechodząc do sytuacji szczególnej, kiedy $T = B_{\|\cdot\|}(0, r)$, $d(s,t) = \eta(\|s - t\|)$, gdzie $\|\cdot\|$ jest normą na $\mathbf{R}^{d^n}$, η-funkcją wklęsłą, rosnącą, $\eta(0) = 0$, pokażę charakteryzację 'wtedy i tylko wtedy' funkcji φ takich, że każdy proces o przyrostach ograniczonych (względem d i φ) ma prawie na pewno ograniczone trajektorie. Wyniki te pochodzą z pracy [3].

Bibliografia

[1] W. Bednorz, *A theorem on majorizing measures*, Annals of Probab., (2006), (to appear soon).
[2] W. Bednorz, *Hölder continuity of random processes*, submited to J. of Theor. Probab.
[3] W. Bednorz, *A type Sobolev inequality and its applications*, Stud. Math., (2006), (accepted).

Milena Bieniek
Uniwersytet Marii Curie-Skłodowskiej, Wydział Ekonomiczny
Dominik Szynal
Uniwersytet Marii Curie-Skłodowskiej, Instytut Matematyki

Czasy rekordowe, wartości rekordowe i ich momenty

Podajemy wzory na momenty k-tych czasów rekordowych oraz dolnych i górnych wartości rekordowych z dowolnego rozkładu. Uzyskane wyniki ilustrujemy wzorami na momenty k-tych wartości rekordowych z rozkładu wykładniczego, odwrotnego wykładniczego i Gumbela. Ważnymi elementami tych wzorów są funkcje specjalne (Dzeta i Psi) oraz liczby Stirlinga.

Bartłomiej Błaszczyszyn
Instytut Matematyczny UWr i ENS-INRIA Paris
François Baccelli
ENS-INRIA Paris
Mohamed Karray
FT R&D Paris

Przestrzenne markowskie procesy „narodzin, migracji i śmierci” z zastosowaniem do modelowania zagadnień komunikacji bezprzewodowej

Rozważa się pewną klasę przestrzennych markowskich procesów „narodzin, migracji i śmierci”, które są uogólnieniem procesów narodzin i śmierci (zobacz [1]) a także sieci kolejkowych typu Whitle’a (zobacz [2]). Podaje się warunki dostateczne na regularność jądra Markowa oraz na ergodyczność procesu. Charakteryzuje się rozkład stacjonarny. Podaje się warunki na to aby rozkład stacjonarny był miarą Gibbsa względem pewnego procesu Poissona. Powyższe rozważania motywowane są zastosowaniami do modelowania zagadnień z dziedziny współczesnej komunikacji bezprzewodowej (zobacz [3]).

Bibliografia

[1] C. Preston. Spatial birth-and-death processes, *Bull. Int. Statist. Inst.*, 46(2), 1997.
[2] X. Huang i R. F. Serfozo. Spatial queueing processes. *Math. Oper. Res.*, 24:865–886, 1999.
[3] F. Baccelli, B. Błaszczyszyn i M.K. Karray. Blocking rates in large CDMA networks via a spatial Erlang formula. *Proc. of IEEE INFOCOM*, Miami, 2005.

Konstancja Bobecka
Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych,
Politechnika Warszawska, Warszawa

Charakteryzacje związane z neutralnością losowych prawdopodobieństw

Zdefiniowane zostanie pojęcie neutralności wektora losowych prawdopodobieństw względem podziału zbioru indeksów. Pojęcie to obejmuje różne warianty neutralności istniejące w literaturze: neutralność podwektora w wektorze, całkowitą neutralność [1], neutralność lewo i prawostronną [2], globalną i lokalną niezależność [3]. Przedstawione zostaną charakteryzacje rozkładu i procesu Dirichleta związane z tym pojęciem, uogólniające charakteryzacje otrzymane w [3] i [4].

Wyniki uzyskano wspólnie z J. Wesołowskim.

Bibliografia

[1] Connor, J.R., Mosimann, J.E. (1969) Concepts of independence for proportions with a generalization of the Dirichlet distribution, *J. Amer. Statist. Assoc.*, 64, 194-206.
[2] Doksum, K. (1974) Tailfree and neutral random probabilities and their posterior distributions, *Ann. Probab.*, 2, 183-201.
[3] Geiger, D., Heckerman, D. (1997) A characterization of the Dirichlet distribution through global and local parameter independence, *Ann. Statist.*, 25, 1344-1369.
[4] James, I.R., Mosimann, J.E. (1980) A new characterization of the Dirichlet distribution through neutrality, *Ann. Statist.*, 8, 183-189.

Adam Bobrowski
IM PAN Katowice

On a semigroup generated by a convex combination of Feller generators

Let $\mathcal{S}$ be a locally compact Hausdorff topological space. Let A and B be two generators of Feller semigroups in $C_0(\mathcal{S})$ with related canonical Feller processes $\{X_A(t), t \geq 0\}$ and $\{X_B(t), t \geq 0\}$ and let α and β be two non-negative continuous functions on $\mathcal{S}$ with $\alpha + \beta = 1$. Assume that the closure C of $C_0 = \alpha A + \beta B$ with $\mathcal{D}(C_0) = \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B)$ generates a Feller semigroup $\{T(t), t \geq 0\}$ in $C_0(\mathcal{S})$. It is natural to think of the related Feller process $\{X_C(t), t \geq 0\}$ as that evolving according to the following heuristic rules. Conditional on being at a point $p \in \mathcal{S}$, with probability $\alpha(p)$ the process behaves like $\{X_A(t), t \geq 0\}$ and with probability $\beta(p)$ it behaves like $\{X_B(t), t \geq 0\}$. We provide an approximation of $\{T(t), t \geq 0\}$ via a sequence of semigroups acting in $C_0(\mathcal{S}) \times C_0(\mathcal{S})$ that supports this interpretation.

Krzysztof Bogdan
Wydział Matematyki i Informatyki Politechniki Wrocławskiej

Mnożniki fourierowskie

Przedmiot wykładu stanowią oszacowania w $L^p(\mathbb{R}^d)$ norm mnożników fourierowskich związanych z parą procesów Lévy'ego.

Tomasz Bojdecki
Uniwersytet Warszawski

O różnych dziwnych granicach czasów przebywania poissonowskich układów cząstek

W referacie będą omówione wyniki uzyskane wspólnie z L. Gorostiza i A. Talarczyk.

W chwili poczatkowej mamy w $\mathbb{R}^d$ poissonowski układ cząstek z miarą intensywności μ. Następnie każda czastka wykonuje, niezależnie jedna od drugiej, standardowy ruch α-stabilny. Ewolucja układu jest opisana przez *proces empiryczny* N, tzn. $N_t(A)$ jest liczbą cząstek należących w chwili t do zbioru $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Przeskalowany *proces przebywania* definiujemy jako $Y_T(t) = \int_0^{Tt} N_s ds$, a *proces fluktuacji*, to

$$X_T(t) = \frac{1}{F_T}(Y_T(t) - EY_T(t)),$$

gdzie F_T jest odpowiednim (deterministycznym) normowaniem. Interesuje nas sytuacja, gdy przyspieszamy czas, t.j. $T \to \infty$.

W [1], [2] pokazano, że gdy $\mu = \lambda =$ miara Lebesgue'a, wówczas X_T zbiega w sensie rozkładów do $K\lambda\xi$, gdzie ξ jest ułamkowym ruchem Browna, a K - stałą, o ile $d < \alpha$, natomiast przy $d \geq \alpha$ granicą jest pewien proces Wienera w przestrzeni dystrybucji $\mathcal{S}'$.

Obecnie zakładamy, że $\mu(dx) = (1 + |x|^\gamma)^{-1}dx$, $\gamma \geq 0$. Okazuje się, że w zależności od wzajemnych relacji między d, α, γ możliwych granic jest teraz znacznie więcej i bywają one, jak zapowiedziano w tytule, „dziwne".

Bibliografia

[1] Bojdecki, T., Gorostiza, L.G., Talarczyk, A. (2006) Limit theorems for occupation time fluctuations of branching systems I: Long range dependence, Stoch. Proc. Appl. 116, 1-18.
[2] Bojdecki, T., Gorostiza, L.G., Talarczyk, A. (2006) Limit theorems for occupation time fluctuations of branching systems II: Critical and large dimensions, Stoch. Proc. Appl. 116, 19-35.

Marek Bożejko
Uniwersytet Wrocławski

Rozklady Lévy'ego Meixnera w klasycznej i wolnej probabilistyce z zastosowaniami do macierzy losowych i problemu Bessis-Moussa-Villani (BMV)

Celem odczytu jest przedstawienie twierdzenia Laha-Lukacsa opisujace sześć podstawowych rozkładów (Gauss, Poisson, Gamma, Pascal, Meixner i binomialny) w klasycznej i wolnej probabilistyce, które otrzymaliśmy wspólnie z W. Brycem ([2]) oraz wolnej wersji twierdzenia Bryca-Plucińskiej i Wesołowskiego [13], opisującego wolne procesy Lévy'ego-Meixnera i związki z macierzami losowymi Wisharta-praca Capitaine-Cassalis [8].

Jako zastosowanie podamy częściowe rozwiązanie (BMV)-problemu, który jest następującym pytaniem:
Czy dla dowolnych macierzy samosprzężonych A i B, rozmiaru $n \times n$, $n = 2, 3, ...$ funkcja:

$$f(x) = f(A, B, x) = tr(exp(A + iB)$$

jest dodatnio określona dla x na prostej rzeczywistej? (równoważne sformułowanie patrz praca [11])

Pokażemy (praca [3]), ze hipoteza (BMV) jest prawdziwa dla wszystkich macierzy A i B, które pochodzą od uogólnionych procesów Gaussowskich, które wprowadzono i studiowano intensywnie w pracach [1], [4], [5], [7], [8], [12].

Przypadek wolnego procesu Gaussa (macierze losowe Wignera) został podany w pracy M. Fannesa i D. Petza [9].

Bibliografia

[1] L.Accardi,M. Bożejko, Interacting Fock spaces and gaussianization of probability measures, Infin. Dimens. Anal.Quantum Probab. Rel. Top., 1,1998,663-670.
[2] M. Bożejko, W. Bryc, On a class of free Lévy laws related to a regression problem, Journal Functional Analysis, 2006, 23 pp.
[3] M. Bożejko, Bessis-Moussa-Villani conjecture and generalized Gaussian random variables, Lectures at Tohoku University 2006.
[4] M. Bożejko,B.Kummerer,R.Speicher,q-Gaussian processes: non-commutative and classical aspects, Comm. Math. Phys., 185(1997), 129-154.
[5] M. Bożejko ,M. Guta, Functors of white noises associated to charactres of infinite symmetric group, Comm. Math. Phys., 229(2002), 209-227.
[6] W. Bryc,J. Wesołowski, Conditional moments of q-Meixner processes, Prob.Theory Related Fields, 131(2005), 415-441.
[7] M. Bożejko, H. Yoshida, Generalized q-Deformed Gaussian Random Variables, In Banach Center Publications, Quantum Probabilty II, 2006,13 pp.
[8] M. Capitaine, M. Casalis, Asymptotic freenes by generalized moments for Gaussian and Wishart matrices. Application to beta random matrices, Indiana Univ. Math. J., 53(2004), 397-431.

[9] M. Fannes,D. Petz, Perturbation of Wigner matrices and a conjucture, arXiv 2005.
[10] F. Lehner, Cumulants in noncommutative probability theory, I, II, III, IV, Part I-Math. Zeit., 248(2004), 67-100, partII-Probab. Theory and Rel. Top., 127(2003), 407-422, part III-Infin. Dim. Anal. Quant. Prob., 2005, part IV-arXiv 2006.
[11] E. Lieb, R. Seiringer, Equivalent form of Bessis-Moussa-Villani conecture, arXiv 2004.
[12] P. Śniady, Factoriality of Bożejko-Speicher von Neumann algebras, Comm. Math. Phys., 246(2004), 561-567.
[13] J. Wesołowski, Stochastic processes with linear conditional expectation and quadratic conditional variance, Probab. Math. Statist., 14(1993), 33-44.

Włodzimierz Bryc
Department of Mathematical Sciences, University of Cincinnati

Quadratic Harnesses

Harnesses were introduced by Hammersley (1967) as random fields that model ”long-range misorientation”. Quadratic harnesses are related to Hammersley-Manuy-Yor harnesses by mimicking the relation between the martingale and the quadratic martingale conditions.

Examples of quadratic harnesses are the Poisson, Gamma, Pascal (negative binomial), and the Wiener process. Less known examples are Markov processes associated with certain free Levy processes, and with non-commutative q-Gaussian processes introduced in the physics literature by Frisch-Bourret (1970) and constructed rigorously by Bozejko-Kummerer-Speicher 1997.

Artur Bryk
Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych, Politechnika Warszawska

O randomizacji w modelu regresji z silnie zależnymi błędami

W referacie rozpatruje się następującą metodę randomizacji modelu regresji z deterministycznymi zmiennymi objaśniającymi (*randomized fixed design*):

$$Y_{i,n} = g\Big(\frac{\sigma_n(i)}{n}\Big) + \epsilon_{i,n}, \qquad i = 1, \dots, n.$$

Zakłada się, że błędy $(\epsilon_{i,n})$ wykazują zależność długozasięgową (*long-range dependence*) oraz losowa permutacja $\sigma = \sigma_n$ jest niezależna od $(\epsilon_{i,n})$.
Celem referatu jest przedstawienie dychotomicznego zachowania się estymatora jądrowego regresji Priestleya-Chao

$$\hat{g}_n(x) = \frac{1}{nb_n}\sum_{i=1}^{n} K\Big(\frac{x-\sigma(i)/n}{b_n}\Big)Y_{i,n}$$

Przedstawione zostaną również wyniki badań symulacyjnych, które pokazują zalety rozważanej metody w porównaniu z estymacją w modelu z deterministycznymi zmiennymi objaśniającymi.
Omówione wyniki uzyskano wspólnie z J. Mielniczukiem.

Bibliografia

[1] A. Bryk, J. Mielniczuk (2005), Randomized fixed design regression under long-range dependent errors, preprint
[2] S. Csórgő, J. Mielniczuk(1999), Random design regression under long-range dependent errors. *Bernoulli*, **5**, 209-224

Joanna Chachulska
Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych Politechniki Warszawskiej

Dwuwymiarowe naturalne rodziny wykładnicze z liniową przekątną macierzowej funkcji wariancji

Naturalna rodzina wykładnicza określona jest jednoznacznie przez funkcję wariancji. Znane są jednak sytuacje, w których nawet niepełna wiedza o postaci funkcji wariancji wystarcza do identyfikacji odpowiedniej rodziny wykładniczej. W komunikacie podany zostanie pełny opis naturalnych dwuwymiarowych rodzin wykładniczych, dla których przekątna macierzy wariancji jest funkcją afiniczną. Wynik ten uogólnia, w przypadku dwuwymiarowym, klasyfikację naturalnych rodzin wykładniczych z liniową macierzą wariancji uzyskaną przez Letaca (1989). Prezentowany problem identyfikacji miar zostanie sformułowany w języku własności warunkowych wartości oczekiwanych. Największe wyzwanie od strony matematycznej stanowiło stwierdzenie, które z rozwiązań równania różniczkowego dla funkcji kumulanty (do równania takiego zredukowano problem wyjściowy) ma sens probabilistyczny. W szczególności do rozwiązania tego problemu w pewnych sytuacjach pomocne okazało się uogólnienie twierdzenia Marcinkiewicza o funkcji charakterystycznej postaci: funkcja wykładnicza kombinacji liniowej wielomianu i eksponent. Rozszerzenie wyników na przypadek wielowymiarowy, właśnie ze względu na konieczność identyfikacji transformat Laplace'a spośród rozwiązań odpowiedniego równania różniczkowego, wydaje się być zadaniem bardzo trudnym.

Bibliografia

[1] Bar-Lev, S. K., Bshouty, D., Enis, P., Letac, G., Li Lu, I. and Richards, D. (1994) The diagonal multivariate natural exponential families and their classification. *J. Theor. Probab.* 7, 883-929.
[2] Letac, G. (1989) Le probleme de la classificaton des familles exponentielles naturelles de $\mathbf{R}^d$ ayant une function-variance quadratique, *Probability Measures on Groups IX. Lecture Notes in Math.* 1379.

Anna Chojnowska-Michalik
Uniwersytet Łódzki, Łódź

L^1-własności a $L^p(p > 1)$-własności generatorów Ornsteina-Uhlenbecka

Przez proces Ornsteina-Uhlenbecka rozumiemy słabe rozwiązanie ("mild solution") stochastycznego równania liniowego w przestrzeni Hilberta H:

$$dX_t = AX_t dt + BdW_t,$$

gdzie A jest generatorem półgrupy operatorów liniowych na H, (W_t) – cylindrycznym procesem Wienera, zaś B operatorem liniowym ograniczonym. Zakładamy, że proces O-U ma miarę niezmienniczą μ.

Półgrupy O-U (czyli półgrupy przejścia dla procesów Ornsteina-Uhlenbecka) oraz ich generatory mają w przestrzeniach $L^p(H, \mu)$, dla $1 < p < \infty$, pewne własności regularności, które najpierw przypomnimy. Własności te załamują się w $L^1(H, \mu)$.

W szczególności przedstawimy (przy pewnych założeniach) opis L^1-spektrum generatora O-U. Twierdzenie to jest uogólnieniem znanego wyniku dla $H = \mathbb{R}^d$. Prosty kontrprzykład ilustruje patologiczne sytuacje pojawiające się w przypadku nieskończenie wymiarowej przestrzeni H.

Krzysztof Dębicki
Instytut Matematyczny, Uniwersytet Wrocławski, Wrocław

Własność Piterbarga dla procesów z zależnościami dalekiego zasięgu

Niech $X(t)$ będzie procesem o stacjonarnych przyrostach oraz c stałą taką, że $EX(1) < c < \infty$. Rozpatrujemy stacjonarny proces $\{Y(t) : t \geq 0\}$, gdzie

$$Y(t) = \sup_{t \geq s}(X(t) - X(s) - c(t - s)).$$

Proces ten, nazywany w literaturze *stacjonarnym procesem wypełnienia bufora*, pełni kluczową rolę w analizie kolejkowych modeli fluidowych.

Analiza asymptotycznych własności procesu $Y(t)$, dla $X(t) = B_H(t)$ będącego ułamkowym ruchem Browna z parametrem Hursta $H \in (0, 1)$, wykazała dość niezwykłą własność rozkładu $\sup_{t\in[0,T]} Y(t)$. Okazuje się, że dla $H > \frac{1}{2}$ oraz dowolnego $T > 0$ zachodzi ([2])

$$\lim_{u\to\infty} \frac{P(\sup_{t\in[0,T]} Y(t) > u)}{P(Y(0) > u)} = 1.$$

Własność ta, nazwana w pracy [1] *własnością Piterbarga*, zaobserwowana została także dla innych samopodobnych procesów $X(t)$; [1].

W referacie przedstawione zostanie jednolite podejście pozwalające na uogólnienie własności Piterbarga na $T = T(u)$ oraz analizę jej zachodzenia dla różnych procesów $X(t)$. W szczególności bliżej omówione zostanie zachodzenie własności Piterbarga, gdy $X(t)$ jest:
- procesem gaussowskim o stacjonarnych przyrostach;
- scałkowanym alternującym 0-1 procesem odnowy;
- $\alpha-$stabilnym procesem Lévy'ego.

Powiązane zostanie także zachodzenie własności Piterbarga z posiadaniem przez $X(t)$ własności *zależności dalekiego zasięgu*.

Bibliografia

[1] Albin, J., Samorodnitsky, G. (2004) On overload in a storage model, with a self-similar and infinitely divisible input. *Annals of Appl. Prob.* **42**, 820–844.
[2] Piterbarg, V. (2001) Large deviations of a storage process with fractional Brownian motion as input. *Extremes* **4**, 147–164.

Bartłomiej Dyda
Instytut Matematyki i Informatyki Politechniki Wrocławskiej

Odstęp spektralny dla procesów stabilnych

Rozważamy półgrupę operatorów na $L^2(D)$ zadaną przez niezmienniczy na obroty proces α-stabilny zabity przy wyjściu z ograniczonego obszaru $D \subset \mathbb{R}^d$. Wiadomo, że istnieje układ ortonormalny $\{\varphi_n\}$ zupełny w $L^2(D)$ złożony z funkcji własnych φ_n generatora rozważanej półgrupy. Zakładamy przy tym, że funkcje te są uporządkowane w taki sposób, że $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \ldots$, gdzie $-\lambda_n$ jest wartością własną odpowiadającą funkcji własnej φ_n. Odstępem spektralnym („spectral gap") nazywamy różnicę $\lambda_2 - \lambda_1$.

Wyprowadzimy następujący wzór wariacyjny

$$\lambda_2 - \lambda_1 = \inf_{f \in \mathcal{F}} \frac{\mathcal{A}_{d,-\alpha}}{2} \int_D \int_D \frac{(f(x) - f(y))^2}{|x-y|^{d+\alpha}} \varphi_1(x)\varphi_1(y)\, dx\, dy, \tag{1}$$

gdzie

$$\mathcal{F} = \{f \in L^2(D, \varphi_1^2) : \int_D f^2(x)\varphi_1^2(x)\, dx = 1, \quad \int_D f(x)\varphi_1^2(x)\, dx = 0\}$$

oraz $\mathcal{A}_{d,-\alpha} = \Gamma((d-\alpha)/2)/(2^\alpha \pi^{d/2} |\Gamma(\alpha/2)|)$.

Wzór (1) pozwala otrzymać dość dobre oszacowania odstępu spektralnego z dołu i z góry dla obszarów specjalnej postaci (prostokątów lub ogólniej, wypukłych obszarów na płaszczyźnie symetrycznych względem obu osi współrzędnych).

Prezentowane wyniki dotyczące odstępu spektralnego pochodzą głównie ze wspólnej pracy z T. Kulczyckim [5].

Bibliografia

[1] R. Bañuelos, T. Kulczycki, *The Cauchy process and the Steklov problem*, J. Funct. Anal. 211 (2004), 355-423.
[2] R. Bañuelos, T. Kulczycki, *Eigenvalue gaps for the Cauchy process and a Poincare inequality*, J. Funct. Anal. (to appear).
[3] R. Bañuelos, T. Kulczycki, *Spectral gap for the Cauchy process on convex, symmetric domains*, preprint.
[4] Z.Q. Chen and R. Song, *Two sided eigenvalue estimates for subordinate Brownian motion in bounded domains*, J. Funct. Anal. 226 (2005), 90-113.
[5] B. Dyda, T. Kulczycki. *Spectral gap for stable process on convex double symmetric domains*, preprint.

Mariusz Górajski
Wydział Matematyki Uniwersytetu Łódzkiego

Redukcja grafów losowych, strategiczne rodziny czasów zatrzymania

Referat dotyczy łańcucha Markowa, dokładniej błądzenia po jego stanach nieistotnych. Opisane zostaną algorytmy pozwalające obliczać momenty rozkładu czasu pozostawania w stanach nieistotnych oraz obliczać prawdopodobieństwa wpadnięcia do poszczególnych klas stanów komunikujących się. Główną metodą w dowodach jest rozpatrywanie pewnych niemalejących rodzin czasów zatrzymania. Metoda ta prowadzić może do ogólnych twierdzeń i wyników praktycznych związanych np. z zagadnieniami ruiny gracza i ruiny ubezpieczycieli czy też wyznaczaniem rozkładu napięć w układach elektrycznych.

Anna Góralczyk
Wydział Matematyki, Informatyki i Ekonometrii, Uniwersytet Zielonogórski, Zielona Góra

Istnienie i własności wielowartościowej całki stochastycznej typu Stratonowicza

W komunikacie przedstawiona zostanie definicja wielowartościowej całki Stratonowicza względem procesu Wienera. Podane zostaną warunki istnienia tej całki oraz przedstawione zostaną jej własności.

Bibliografia

[1] Góralczyk, A., Motyl, J. (2006) Set-valued Stratonovich integral, Discusssiones Mathematicae, (w druku)
[2] Hukuhara, M. (1967) Intégration des applications measurables dont a valeur est un compact convexe, Funkcialaj Ekvacioj 10, 205-223.

Tomaz Grzywny
Instytut Matematyki i Informatyki Politechniki Wrocławskiej

Oszacowania funkcji Greena dla zaburzonego ułamkowego operatora Laplace'a

Rozważamy dwa symetryczne procesy Lévy'ego, których różnica miar Lévy'ego jest skończoną miarą znakowaną. Badamy porównywalność funkcji Greena dla zbiorów ograniczonych. Gdy miara Lévy'ego jednego procesu dominuje miarę Lévy'ego drugiego procesu, wtedy także funkcja Greena dla dowolnego ograniczonego zbioru otwartego dominuje funkcję Greena drugiego procesu. W przypadku, gdy jednym z procesów jest niezmienniczy na obroty proces α-stabilny, to przy pewnych założeniach na zachowanie się różnicy miar w okolicy zera uzyskaliśmy porównywalność ich funkcji Greena dla ograniczonych obszarów Lipschitza. Ciekawym przykładem spełniającym wspomniane założenia jest proces relatywistyczny.

Bibliografia

[1] Grzywny T., Ryznar M. (2006) Estimates of the Green function for the perturbed fractional Laplacian on Lipschitz domain, *preprint*

Ewa Iwaniec
Politechnika Warszawska, Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych

Asymptotyczne rozwinięcia kopuł z zastosowaniem funkcji jednorodnych dowolnego stopnia.

Do badania asymptotyki kopuł w okolicy zera lub innych „punktach ekstremalnych” można zastosować funkcje jednorodne. Wystarczy przedstawić kopułę w postaci sumy dwóch funkcji, z których jedna jest funkcją jednorodną, a druga jest pewną funkcją ograniczoną o zadanych własnościach. Okazuje się, że wyznaczenie takiego rozkładu sprowadza się do obliczenia pewnej granicy, której istnienie jest jednoznaczne z istnieniem asymptotycznego rozwinięcia kopuły.

Podczas referatu przedstawione zostanie twierdzenie reprezentacyjne o istnieniu asymptotycznych rozwinięć kopuł z zastosowaniem funkcji jednorodnych dowolnego stopnia, własności takich rozwinięć oraz ich zastosowania.

Bibliografia

[1] Embrechts, P., Lindskog, F., McNeil, A. (2001) ”Modelling Dependence with Copulas and Applications to Risk Management”, www.risklab.ch.
[2] Jaworski, P. (2003) ”Asymptotyka dwuwymiarowych kopuli”, Matematyka Stosowana 4, 2003, pp. 78-89.
[3] Jaworski, P. (2004) ”On Uniform Tail Expansions of Bivariate Copulas”, Applicationes Mathematicae 31, 4 (2004), pp. 397-415.
[4] Kjersti Aas, (2004) ”Modelling the dependence structure of financial assets: A survey of four copulas", Norwegian Computing Center, Oslo, Norway.

Adam Jakubowski
Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu
Katarzyna Bartkiewicz
Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu

Stabilne granice dla sum i autokowariancji procesów ARCH(1)

Proces ARCH(1) to łańcuch Markowa dany wzorem rekurencyjnym

$$X_{n+1} = \sqrt{\beta + \lambda X_n^2} Z_{n+1},$$

gdzie $\beta, \lambda > 0$ i $\{Z_n\}$ jest niezależnym od X_0 ciągiem niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie $\mathcal{N}(0,1)$. Dla $\lambda \in (0, 2e^{\gamma})$ istnieje jedyny rozkład stacjonarny X_0, o ogonach $\sim \frac{c}{2} x^{-2\kappa}$, gdzie stałe c i κ zależą od λ i β (zob. np. [1], str. 467).

W komunikacie formułujemy twierdzenia graniczne o zbieżności do rozkładów stabilnych dla sum częściowych $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ i (zmodyfikowanych) autokowariancji empirycznych $Z_{m,n} = X_1 X_{1+m} + X_2 X_{2+m} + \ldots X_n X_{n+m}$, $m = 0, 1, 2, \ldots$.

Bibliografia

[1] Embrechts, P., Kluepellberg, C. and Mikosch,T., **Modelling Extremal Events**, Springer 1997.

Jacek Jakubowski
Instytut Matematyki, Uniwersytet Warszawski

Model HJM z szumem Lévy'go

Niech $P(t,\theta)$, $0 \leq t \leq \theta$ oznacza cenę rynkową obligacji zerokuponowej płacącej 1 w chwili zapadalności θ. Funkcja $f(t,\theta)$:

$$P(t,\theta) = e^{-\int_t^\theta f(t,s)ds}. \tag{2}$$

zdefiniowana dla $\theta \geq t$ opisuje chwilową stopę forward. Heath, Jarrow and Morton [1] zaproponowali, by chwilową stopę forward opisać równaniem Itô

$$df(t,\theta) = \alpha(t,\theta)dt + \sum_{j=1}^{d} \sigma_j(t,\theta)dW_j(t), \tag{3}$$

gdzie $W_1, \dots, W_d$ są niezależnymi procesami Wienera, $0 \leq t \leq \theta$ i dla każdego θ procesy $\alpha(t,\theta)$, $\sigma_j(t,\theta)$, $t \leq \theta$ adaptowane do danej filtracji $(\mathcal{F}_t)$ są odpowiednio całkowalne.

W referacie zostanie rozpatrzone uogólnienie tego modelu przez wzięcie procesu Lévy'ego Z o wartościach w przestrzeni Hilberta zamiast procesu Wienera.

Zostaną podane warunki na momenty eksponencjalne miary skoków procesu Lévy'ego zapewniające zachodzenie postulatu HJM (mówiącego, że zdyskontowany proces cen jest lokalnym martyngałem). Okazuje się, że przy słabych założeniach postulat HJM zachodzi wtedy i tylko wtedy warunek HJM zachodzi.

Referat opiera się na wspólnej pracy z prof. J. Zabczykiem, będącej rozszerzeniem preprintu [2].

Bibliografia

[1] D. Heath, R. Jarrow and A. Morton, *Bond pricing and the term structure of interest rates: a new methodology, Econometrica, 60 (1992), 77- 101.*
[2] J. Jakubowski, J.Zabczyk, *HJM condition for Models with Lévy Noise, Preprint IM PAN nr 651* .

Tomasz Jakubowski
Instytut Matematyki i Informatyki Politechniki Wrocławskiej

Elementy teorii potencjału stabilnych procesów Ornsteina-Uhlenbecka

Rozważmy α-stabilny proces Ornsteina-Uhlenbecka X_t dany stochastycznym równaniem różniczkowym

$$dX_t = -\lambda X_t dt + d\hat{X}_t,$$

gdzie $\hat{X}_t$ jest symetrycznym, niezmienniczym na obroty, α-stabilnym procesem Lévy'ego o wartościach w $\mathbb{R}^d$. Celem referatu jest przedstawienie oszacowań średniego czasu wyjścia z kuli $B(x,r)$ procesu X_t dla wszystkich $x \in \mathbb{R}^d$ i $r > 0$ oraz omówienie nierówności Harnacka dla procesu X_t.

Bibliografia

[1] Jakubowski, T. (2006) The estimates of the mean first exit time from the ball for the α–stable Ornstein-Uhlenbeck processes, preprint.
[2] Jakubowski, T. (2006) On Harnack inequality for α-stable Ornstein-Uhlenbeck processes, preprint.

Katarzyna Jańczak
Instytut Matematyki i Fizyki, Akademia Techniczno-Rolnicza, Bydgoszcz

Dyskretna aproksymacja stochastycznych równań różniczkowych wstecz z losowym momentem końcowym

W pracy [1] udowodnione zostało istnienie i jednoznaczność mocnego rozwiązania stochastycznego równania różniczkowego wstecz z odbiciem z losowym momentem końcowym postaci

$$Y_{t\wedge\tau} = \xi + \int_{t\wedge\tau}^{\tau} f(s, Y_s, Z_s)ds - \int_{t\wedge\tau}^{\tau} Z_s dW_s + K_\tau - K_{t\wedge\tau}, \quad t \in \mathbb{R}^+, \tag{4}$$

gdzie τ jest prawie wszędzie skończonym momentem zatrzymania, ξ jest $\mathcal{F}_\tau$–mierzalną zmienną losową, a W standardowym d-wymiarowym procesem Wienera.

Celem komunikatu jest przedstawienie schematu numerycznego rozwiązywania równania (4) oraz jego zastosowanie do aproksymacji rozwiązań równań różniczkowych cząstkowych z przeszkodą.

Bibliografia

[1] É. Pardoux, A. Răşcanu, Backward stochastic differential equations with subdifferential operator and related variational inequalities, Stochastic Process. Appl. **76** (1998), 191–215.
[2] S. Toldo, Convergence de filtrations; application à la discrétisation de processus et à la stabilité de temps d'arrêt, PhD Thesis, University of Rennes I (2005).

Zbigniew J. Jurek
Uniwersytet Wrocławski

O związkach między transformatami Cauchy'ego i Fouriera skończonych miar borelowskich.

Dla skończonej miary borelowskiej m (na prostej rzeczywistej $\mathbb{R}$) jej *transformatę Cauchy'ego* określamy wzorem:

$$G_m(z) := \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{z-x}\, m(dx), \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}.$$

Z drugiej strony, dla dowolnej miary nieskończenie podzielnej ν i dla procesu Lévy'ego $Y_\nu(s), s \geq 0$ definujemy odwzorowanie całkowe

$$\mathcal{K}(\nu) := \mathcal{L}(\int_0^\infty s\, dY_\nu(1-e^{-s})),$$

gdzie $\mathcal{L}(Y_\nu(1)) = \nu$. W szczególności, jeśli $e(m)$ oznacza złozony rozkład Poissona to istnieje związek pomiędzy G_m i transformatą Fouriera miary probabilistycznej $\mathcal{K}(e(m))$, której transformata Fouriera jest postaci:

$$(\mathcal{K}(e(m)))\widehat{}(t) = \exp \int_{\mathbb{R}} \Big(\frac{1}{1-itx} - 1\Big) m(dx).$$

Stąd wywnioskujemy, ze transformata Cauchy'ego, zredukowana do osi urojonej, także jednoznacznie wyznacza miarę m.

Relacje powyższe przedstawimy też w kontekście tzw. „free-probability".

Dorota Juszczak
Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet Mikołaja Kopernika, Toruń

Wielowymiarowe twierdzenia o wielkich odchyleniach dla rozkładów kratowych

Przypuśćmy, że rozkład wektora losowego należy do pewnej klasy rozkładów kratowych. Dowody twierdzeń o wielkich odchyleniach dla sum niezależnych wektorów losowych o jednakowym rozkładzie oparte są na zastosowaniu asymptotycznych własności rozkładów sprzężonych. Szczególną rolę odgrywają lokalne twierdzenia graniczne, które bezpośrednio prowadzą do twierdzeń o wielkich odchyleniach.

Bibliografia

[1] Nagaev, A.V. (1967) Local limit theorems with regard to large deviations, *Limit Theorems and Probabilistic Processes*, 71–88, Izdat. ”Fan” Uzbek. SSR, Tashkent.
[2] Nagaev, A. V. (1998) Large deviations for sums of lattice random variables under the Cramér condition, *Discrete Math. Appl.* **8**, 4, 403–419.

Rafał Kapica
Uniwersytet Śląski

O podmartyngałowych charakteryzacjach krat Banacha

Nawiązując do prac J. Szulgi i W. A. Woyczyńskiego [2], [3], przedstawimy charakteryzacje krat Banacha, wykorzystujące podmartyngały. Podane charakteryzacje dotyczyć będą AL-przestrzeni oraz KB-przestrzeni (patrz np. [1]).

Bibliografia

[1] Aliprantis, C. D., Burkinshaw, O. *Positive operators*, Academic Press, Inc., Orlando, FL, 1985
[2] Szulga, J. *Regularity of Banach lattice valued martingales*, Colloq. Math. 41 (1979), 303-312
[3] Szulga, J., Woyczyński, W. A. *Convergence of submartingales in Banach lattices*, Ann. Probability 4 (1976), 464-469

Paweł Kisowski
Instytut Matematyczny Uniwersytetu Wrocławskiego
Krzysztof Dębicki
Instytut Matematyczny Uniwersytetu Wrocławskiego

Asymptotyka rozkładu supremum dla $(\alpha(t), A(t))-$lokalnie stacjonarnych procesów gaussowskich.

W referacie podamy dokładną asymptotykę $\mathbb{P}(\sup_{t\in[0,S]} X(t) > u)$, przy $u \to \infty$, dla scentrowanego procesu gaussowskiego o funkcji kowariancji spełniającej

$$1 - \mathbb{C}\mathrm{ov}(X(t), X(t+h)) = A(t)|h|^{\alpha(t)} + o(|h|^{\alpha(t)}),$$

przy $h \to 0$, gdzie $A(t)$ jest funkcją ciągłą, spełniającą $0 < \inf_{t\in[0,S]} A(t) \leq \sup_{t\in[0,S]} A(t) < \infty$, $\alpha(t) \in (0, 2]$ i dodatkowo spełnia pewne warunki regularności.

Wynik ten rozszerza rezultat uzyskany dla gaussowskich procesów lokalnie stacjonarnych zdefiniowanych przez Bermana, gdzie zakłada się, że $\alpha(t) \equiv \alpha$. Okazuje się, że istotnym dla asymptotyki jest zachowanie się funkcji $\alpha(t)$ w sąsiedztwie jej globalnego minimum na $[0, S]$.

Jako przykład zastosowania uzyskanego wyniku przeprowadzona zostanie analiza asymptotycznych własności supremum ze standaryzowanych wieloułamkowych ruchów Browna. Procesy te, będąc uogólnieniem klasy ułamkowych ruchów Browna, są obecnie intensywnie badane.

Bibliografia

[1] Berman, S.M. (1974) Sojourns and extremes of Gaussian processes. *Ann. Probability* **2**, 999–1026, Correction **8** (1980) 999, **12** (1984) 281.
[2] Benassi, A., Jaffard, S. & Roux, D. (1997) Elliptic Gaussian random processes. *Revista Math. Iberoamericana* **13**, 19–90.

Marek Kociński
SGGW, Warszawa

Minimalizacja ryzyka w czasie dyskretnym - metoda martyngałowa

Na rynku z czasem dyskretnym jedną z metod stosowaną do zagadnienia minimalizacji ryzyka straty zdefiniowanej jako tzw. *expected shortfall risk* jest programowanie dynamiczne w którym optymalne rozwiązanie wyznaczane jest wstecz od końca horyzontu czasowego aż do chwili początkowej. Alternatywnym podejściem jest metoda martyngałowa w której strategia optymalna polega na zabezpieczeniu wypłaty wyznaczonej przy pomocy pewnej uogólnionej miary martyngałowej. W wystąpieniu pokazane zostanie jak metodę martyngałową można wykorzystać na rynku niezupełnym, jak również z kosztami za transakcje.

Tadeusz Kulczycki
Wydział Matematyki i Informatyki Politechniki Wrocławskiej

Teoria spektralna dla symetrycznego procesu stabilnego

Rozważamy proces Cauchy'ego w $\mathbb{R}^d$. Badamy własności spektralne półgrupy tego procesu zabitego przy wyjściu z ograniczonego obszaru D. Dokładnie interesują nas wartości własne i funkcje własne generatora tej półgrupy. Ustalamy związek pomiędzy półgrupą tego procesu i pewnym zagadnieniem brzegowym dla Laplasjanu w wymiarze o jeden większym znanym jako problem Stekłowa. Za pomocą tej metody dostajemy wzory wariacyjne na wartości własne λ_n i odstęp spektralny $\lambda_2 - \lambda_1$. Ta charakteryzacja prowadzi do wielu rezultatów inspirowanych przez klasyczne wyniki dla półgrupy dla ruchu Browna. W szczególności dla zbiorów wypukłych na płaszczyźnie symetrycznych względem 2 osi otrzymaliśmy oszacowania na odstęp spektralny. W najprostszym geometrycznie przypadku gdy $D = (-1, 1)$ uzyskaliśmy m.in. pewne szczegółowe informacje o 2 i 3 wartości i funkcji własnej.

Część z powyższych wyników dla procesu Cauchy'ego została uogólniona za pomocą innych metod dla półgrupy symetrycznego procesu α-stabilnego w $\mathbb{R}^d$. W szczególności otrzymano oszacowania wartości własnych przez odpowiadające im wartości własne dla ruchu Browna (wynik Z.-Q. Chena i R. Songa). Otrzymaliśmy oszacowania na odstęp spektralny. Uzyskaliśmy także pewne informacje o kształcie pierwszej funkcji własnej.

Mateusz Kwaśnicki
Instytut Matematyki Politechniki Wrocławskiej
Krzysztof Bogdan
Instytut Matematyki Politechniki Wrocławskiej
Tadeusz Kulczycki
Instytut Matematyki Politechniki Wrocławskiej

Jednostajna brzegowa zasada Harnacka i reprezentacja Martina dla funkcji α-harmonicznych w dowolnym otwartym podzbiorze R^d

Niech X_t będzie symetrycznym procesem α-stabilnym w $\mathbf{R}^d$, $d = 1, 2, \ldots$, $0 < \alpha < 2$. Niech τ_D będzie czasem pierwszego wyjścia z D. Funkcję f nazywamy regularnie α-harmoniczną w D, jeśli $f(x) = E_x f(X(\tau_D))$; f nazywamy α-harmoniczną w D, jeśli $f(x) = E_x f(X(\tau_U))$ dla $U \subset\subset D$. Brzegowa zasada Harnacka (BHP) dla funkcji α-harmonicznych na zbiorach Lipschitza została udowodniona w 1997 roku ([1]), a w 1999 roku rozszerzona na dowolne zbiory otwarte, ze stałą w nierówności zależną od lokalnej geometrii brzegu ([6]). Powstało pytanie, czy stała może zostać dobrana niezależnie od zbioru.

Niech $G_D(x, y)$ oznacza funkcję Greena otwartego zbioru D (zakładamy, że $G_D(x, y)$ jest skończone; w przeciwnym razie wszystkie funkcje α-harmoniczne w D są stałe), $P_D(x, y) = \int_D G_D(x, z)\nu(z-y)dz$ – jądro Poissona, $\nu(x) = \mathcal{A}_{d,-\alpha}|x|^{-d-\alpha}$ – gęstość miary Lévy'ego. Niech $B = B(0, 1)$.

Lemat Istnieje $C = C_{d,\alpha}$ taka, że dla każdej funkcji $f \geq 0$ regularnie α-harmonicznej na $D \subset B$ i równej zero na $B \setminus D$ mamy:

$$C^{-1} \leq \frac{f(x)}{E_x\tau_D \int_{|z|>1/2} f(z)\nu(z)dz} \leq C\,, \;\; x \in D\,, |x| < 1/2\,.$$

Twierdzenie 1. (Jednostajna BHP) Niech G będzie otwarty, $K \subset G$ zwarty. Istnieje stała $C = C_{d,\alpha,G,K}$ taka, że dla wszystkich $f, g \geq 0$ regularnie α-harmonicznych na $D \subset G$ i równych zero na $G \setminus D$ zachodzi:

$$C^{-1}\frac{f(y)}{g(y)} \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq C\frac{f(y)}{g(y)}\,, \quad x, y \in D \cap K\,.$$

Twierdzenie 2. Niech D, K, G, f, g będą jak w twierdzeniu 1. Wówczas:

$$\lim_{D\ni v\to x} \frac{f(v)}{g(v)} \text{ istnieje dla wszystkich } x \in K \cap \partial D\,.$$

Mówimy, że D jest *chudy* (*gruby*) w y, jeśli $\int_D E_z\tau_{D\cap B(y,1)}\,\nu(z-y)dz < \infty$ (odpowiednio: $\int \ldots = \infty$). Mówimy, że D jest *chudy* (*gruby*) *w nieskończoności*, jeśli $E_x\tau_D < \infty$ (odpowiednio: $E_x\tau_D = \infty$) dla (wszystkich) $x \in D$. Zbiór punktów chudych dla D oznaczamy $\partial_M D$, brzeg D w $\mathbf{R}^d \cup \{\infty\}$ — ∂D^*.

Ustalmy dowolny punkt $x_0 \in D$. Określamy jądro Martina D:

$$M_D(x,y) = \lim_{D \ni v \to y} \frac{G_D(x,v)}{G_D(x_0,v)}\,, \; x \in \mathbf{R}^d\,,\, y \in \partial D^*\,.$$

Twierdzenie 3. $M_D(x,y)$ jest dobrze określone i łącznie ciągłe na $D \times \partial D^*$. $M_D(x,y)$ jest α-harmoniczne względem $x \in D$ wtedy i tylko wtedy, gdy D jest gruby w y. Jeśli D jest chudy w y, to $M_D(x,y) = P_D(x,y)/P(x_0,y)$. Jeśli D jest chudy w nieskończoności, to $M_D(x,\infty) = E_x\tau_D/E_{x_0}\tau_D$.

Twierdzenie 4. (reprezentacja Martina) Dla każdej $f \geq 0$ α-harmonicznej na D istnieje jedyna miara μ na $\partial_M D$ taka, że:

$$f(x) = \int_{D^c \setminus \partial_M D} P_D(x,y)f(y)dy + \int_{\partial_M D} M_D(x,z)\mu(dz)\,, \quad x \in D\,.$$

$P_D(x,\cdot)$ jest P_x-gęstością rozkładu $X(\tau_D)$ na $D^c \setminus \partial_M D$.

Powyższe twierdzenia uzupełniają i rozszerzają wyniki wcześniejszych badań w tym kierunku.

Bibliografia

[1] Bogdan, K. (1997) The boundary Harnack principle for the fractional Laplacian. *Studia Math.* 123, 43–80.

[2] Bogdan, K. (1999) Representation of α-harmonic functions in Lipschitz domains. *Hiroshima Math. J.* 29, 227–243.

[3] Bogdan, K., Byczkowski, T. (1999) Probabilistic proof of boundary Harnack principle for α-harmonic functions. *Potential Anal.*, 11(2), 135–156.

[4] Chen, Z.-Q., Song, R. (1998) Martin Boundary and Integral Representation for Harmonic Functions of Symmetric Stable Processes. *J. Funct. Anal.* 159, 267–294.

[5] Michalik, K., Samotij, K. (2000) Martin representation for α-harmonic functions. *Probab. Math. Statist.* 20, 75–91.

[6] Song, R., Wu, J.-M. (1999) Boundary Harnack Principle for Symmetric Stable Processes. *J. Funct. Anal.* 168, 403–427

Rafał Latała
Wydział Matematyki Mechaniki i Informatyki, Uniwersytet Warszawski

Oszacowania momentów i ogonów chaosów losowych i U-statystyk

W pierwszej części omówimy otrzymane w ostatnich latach dwustronne oszacowania momentów i ogonów chaosów losowych postaci

$$\sum_{1\le i_1<i_2<\ldots<i_d\le n} a_{i_1,\ldots,i_d} X_{i_1} X_{i_2} \cdots X_{i_d},$$

gdzie $X_1, X_2, \ldots, X_n$ są niezależnymi (nieujemnymi bądź symetrycznymi) zmiennymi losowymi.

W drugiej części (opartej w dużej części na wynikach Radosława Adamczaka, doktoranta IMPAN) pokażemy jak niektóre z oszacowań dotyczących chaosów losowych można uogólnić na przypadek U-statystyk, tzn. zmiennych postaci

$$\sum_{1\le i_1<i_2<\ldots<i_d\le n} h_{i_1,\ldots,i_d}(X_{i_1}, X_{i_2}, \cdots, X_{i_d}).$$

Jako przykład zastowania sformułujemy warunki konieczne i dostateczne dla prawa iterowanego logarytmu dla kanonicznych U-statystyk dowolnych rzędów.

Bibliografia

[1] R. Adamczak, Moment Inequalities for U-statistics, *Ann. Probab.*, przyjęte, http://www.arxiv.org/abs/math.PR/0506026.
[2] R. Adamczak, R. Latała, The LIL for canonical U-statistics, preprint, http://www.arxiv.org/abs/math.PR/0604262.
[3] R. Latała, Tail and moment estimates for some types of chaos, *Studia Math.* 135 (1999), 39–53.
[4] R. Latała, Estimation of moments and tails of Gaussian chaoses, *Ann. Probab.*, przyjęte, http://www.arxiv.org/abs/math.PR/0505313.
[5] R. Latała, R. Łochowski, Moment and tail estimates for multidimensional chaoses generated by positive random variables with logarithmically concave tails, *Progr. Probab.* 56 (2003), 77–92.

Weronika Łaukajtys
Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet Mikołaja Kopernika, Toruń
Leszek Słomiński
Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet Mikołaja Kopernika, Toruń

Aproksymacja rozwiązań stochastycznych równań różniczkowych z odbiciem w zbiorach wypukłych

W komunikacie przedstawione zostaną wyniki dotyczące aproksymacji stochastycznych równań różniczkowych z odbiciem

$$X_t = H_t + \int_0^t \langle f(X_{s-}), dZ_s \rangle + K_t, \quad t \in \mathbb{R}^+,$$

gdzie $f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d$ jest funkcją ciągłą spełniającą warunek liniowego wzrostu, H jest procesem adaptowanym, a Z jest semimartyngałem, za pomocą rozwiązań stochastycznych równań różniczkowych ze składnikiem penalizującym postaci

$$X_t^n = H_t^n + \int_0^t \langle f(X_{s-}^n), dZ_s^n \rangle - n \int_0^t (X_s^n - \Pi(X_s^n))ds, \quad t \in \mathbb{R}^+.$$

Bibliografia

[1] Łaukajtys, W. (2004) On stochastic differential equations with reflecting boundary condition in convex domains, *Bulletin of the Polish Academy of Sciences, Mathematics,* **52**, No.4, 445–4.
[2] Łaukajtys, W. Słomiński, L. (2003) Penalization methods for reflecting stochastic differential equations with jumps, *Stochastics Stochastics Rep.* **75**, No. 5, 275–293.

Rafał Łochowski
Szkoła Główna Handlowa w Warszawie

Oszacowania momentów i ogonów wieloliniowych form losowych generowanych przez zmienne dwupunktowe i ich zastosowanie w teorii grafów losowych

Zaprezentowane zostaną oszacowania momentów i ogonów wieloliniowych form losowych postaci $S = \sum a_{i_1,\ldots,i_d} X_{i_1}^{(1)} \cdots X_{i_d}^{(d)}$, gdzie zmienne losowe $X_{i_1}^{(1)}$, ..., $X_{i_d}^{(d)}$ to niezależne zmienne dwupunktowe o rozkładzie $P(X_{i_j}^{(j)} = 1) = \alpha = 1 - P(X_{i_j}^{(j)} = 0)$. Podane zostanie rownież pewne zastosowanie powyższych oszacowań w teorii grafów losowych.

Bibliografia

[1] S. Janson, K. Oleszkiewicz and M. Ruciński (2004) Upper tails for subgraph counts in random graphs, *Israel J. Math.* 141, 61-69.
[2] R. Łochowski (2005) Oszacowania momentów i ogonów wieloliniowych form losowych, Rozprawa doktorska, Uniwersytet Warszawski.

Krzysztof Michalik
Instytut Matematyki i Informatyki Politechniki Wrocławskiej

Zbieżność niestyczna funkcji α-harmonicznych na ograniczonych obszarach Lipschitza

Rozpatrujemy nieujemne funkcje u, v, które są α-harmoniczne na ograniczonym obszarze Lipschitza i zerują się poza obszarem. Zbadane zostanie zachowanie się ilorazu $\frac{u(x)}{v(x)}$, gdy x zbiega niestycznie do punktu brzegowego zbioru. Przeanalizowany zostanie także ważny przypadek, gdy funkcja normująca v jest odtwarzana poprzez miarę powierzchniową brzegu zbioru, a u jest odtwarzana poprzez miarę absolutnie ciągłą względem miary powierzchniowej.

Bibliografia

[1] K. Michalik, M. Ryznar, *Relative Fatou theorem for α-harmonic functions in Lipschitz domains*, Illinois J. of Math., Volume 48, Number 3, pp 977-998.
[2] K. Michalik, *Sharp estimates of the Green function, the Poisson kernel and the Martin kernel of cones for symmetric stable processes*, Hiroshima Math. J., 2005, w druku.

Zbigniew Michna
Department of Mathematics, Wroclaw University of Economics, Wroclaw, Poland

Approximation of a symmetric α-stable Lévy motion by a Lévy motion with finite moments of all orders

We consider a symmetric α-stable Lévy motion. We use a series representation of the symmetric α-stable Lévy motion to condition on the largest jump. Then we get a Lévy motion which has finite moments of all orders. This process in the first expansion is a Brownian motion. We show that this Lévy motion converges to the symmetric α-stable Lévy motion uniformly on compact sets with probability one. We also study integral of a non-random function with respect to this Lévy motion and derive the covariance function of those integrals. A symmetric α-stable random vector is approximated by a random vector with components having finite second moments.

Bibliografia

[1] Asmussen, S. and Rosiński, J. (2001) *Approximation of small jumps of Lévy processes with a view towards simulation*, Journal of Applied Probability 38, 482–493.
[2] Feller, W. (1971) *An Introduction to Probability Theory and its Applications*, Vol. 2, Wiley, New York.
[3] Janicki, A. and Weron, A. (1994) *Simulation and Chaotic Behavior of α–Stable Stochastic Processes*, Marcel Dekker, New York.
[4] Kallenberg, O. (1997) *Foundations of Modern Probability*, Springer, New York,
[5] LePage, R. (1980) *Multidimensional infinitely divisible variables and processes. II*, Lecture Notes in Mathematics 860, Springer, Berlin, 279–284.
[6] Protter, Ph. (1990) *Stochastic Integration and Differential Equations*, Springer, New York.
[7] Rosiński, J. *Series representation of Lévy processes from the perspective of point processes*, Univ. of Tennesse, preprint.
[8] Samorodnitsky, G. and Taqqu, M. (1994) *Non–Gaussian Stable Processes: Stochastic Models with Infinite Variance*, Chapman and Hall, London.
[9] Weron, A. (1984) *Stable processes and measures: A survey*, in: *Probability Theory on Vector Spaces III*, D. Szynal and A. Weron (ed.), Lecture Notes in Mathematics 1080, Springer, Berlin, 306–364.

Mariusz Michta
Wydział Matematyki, Informatyki i Ekonometrii, Uniwersytet Zielonogórski, Zielona Góra

Słabe rozwiązania inkluzji typu Stratonowicza

Referat poświęcony jest określeniu wielowartościowej całki Stratonowicza dla pewnej klasy multifunkcji nie spełniających klasycznych warunków regularności oraz liniowego wzrostu. Wprowadzona całka pozwala badać istnienie rozwiązań odpowiadającej jej inkluzji.

Bibliografia

[1] Michta M., Motyl J. (2006) Convex selections of multifunctions and their applications, Optimization 55 (1-2), pp. 91-99.
[2] Michta M., Motyl J. (2006) Differentiable selections of multifunctions and their applications, Nonlin. Anal. TMA (w druku).
[3] San Martin J. (1993) One dimensional Stratonovich differential equations, Annals Probab. 21 (1), pp. 509-553.

Jolanta K. Misiewicz
Department of Mathematics, Informatics and Econometrics, University of Zielona Góra

Weak Lévy-Khintchine representation for weak infinite divisibility

A random vector $\mathbf{X}$ is weakly stable iff for all $a, b \in \mathbb{R}$ there exists a random variable Θ such that $a\mathbf{X} + b\mathbf{X}' \stackrel{d}{=} \mathbf{X}\Theta$. This is equivalent (see [2]) with the condition that for all random variables Q_1, Q_2 there exists a random variable Θ such that

$$\mathbf{X}Q_1 + \mathbf{X}'Q_2 \stackrel{d}{=} \mathbf{X}\Theta, \qquad (*)$$

where $\mathbf{X}, \mathbf{X}', Q_1, Q_2, \Theta$ are independent. In this paper we define generalized convolution of measures defined by the formula

$$\mathcal{L}(Q_1) \oplus_\mu \mathcal{L}(Q_2) = \mathcal{L}(\Theta),$$

if the equation $(*)$ holds for $\mathbf{X}, Q_1, Q_2, \Theta$ and $\mu = \mathcal{L}(\Theta)$. We study here basic properties of this convolution and basic properties of $\oplus_\mu$-infinitely divisible distributions. We find the analog of the Lévy measure for $\oplus_\mu$-infinitely divisible distributions.

Bibliografia

[1] Misiewicz, J.K. (1996) Infinite divisibility of substable processes. II. Logarithm of probability measure, Journ. of Math. Sci. 81(5), 2970–2978.
[2] Misiewicz, J.K.; Oleszkiewicz, K.: Urbanik, K. (2005) Classes of measures closed under mixing and convolution. Weak stability., Studia Math. 167(3), pp. 195–213.
[3] Misiewicz, J.K. (2006) Weak stability and genaralized weak convolution for random vectors and stochastic processes IMS Lecture Notes - Monograph Series.
[3] Ken-iti Sato, (2004) Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions, Cambridge University Press, Cambridge Studies in Advanced Mathematics **68**, ISBN 0 521 553024.
[4] Urbanik, K (1976) Remarks on $\mathcal{B}$-stable Probability Distributions. Bulletin of Polish Academy of Sciences, Mathematics, **24**(9), pp. 783-787.

Jerzy Motyl
Wydział Matematyki, Informatyki i Ekonometrii, Uniwersytet Zielonogórski, Zielona Góra

Inkluzja stochastyczna typu Itô z nieciągłą prawą stroną

W komunikacie przedstawione zostaną zagadnienia związane z istnieniem rozwiązań inkluzji stochastycznej typu Itô postaci:

$$dx_t \in F(x_t)dt + G(x_t)dW_t$$

z wielowartościowymi odwzorowaniami F i G. $W = (W_t)_{t\geq 0}$ oznacza proces Wienera.

Podane ostaną nowe warunki gwarantujące istnienie martyngałowych rozwiązań takiej inkluzji.

Bibliografia

[1] Michta M., Motyl J. (2006) Convex selections of multifunctions and their applications, Optimization 55 (1-2), pp. 91-99.

Małgorzata Murat
Politechnika Lubelska, Katedra Matematyki

Wzory na momenty rozkładów podwójnie złożonych

Niech $\{X_n, n \geq 1\}$ i $\{Y_n, n \geq 1\}$ będą dwoma ciągmi niezależnych zmiennych losowych o jednakowych rozkładach i niech ponadto zmienne losowe Y_n, $n \geq 1$ i N przyjmują wartości naturalne. Załóżmy dodatkowo, że zmienna losowa N nie zależy od zmiennych Y_n. Zdefiniujmy zmienną losową $S(Y;N) := Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_N$ o rozkładzie złożonym.

Losową sumę postaci

$$S := S(X; S(Y;N)) = X_1 + X_2 + \cdots + X_{S(Y;N)}$$

nazywa się zmienną losową o rozkładzie podwójnie złożonym. Taką zmienną można interpretować jako wielkość całkowitego roszczenia napływającego w danym okresie czasu do towarzystwa reasekuracyjnego. Zmienna $S(Y;N)$ reprezentuje wówczas liczbę roszczeń, a zmienne $\{X_n\}$ wielkość roszczeń poszczególnych towarzystw ubezpieczeniowych.

W komunikacie podane zostaną wzory rekurencyjne na momenty zmiennej $S(X;S(Y;N))$ o rozkładzie podwójnie złożonym.

Mariusz Niewęgłowski
Politechnika Warszawska, Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych

Warunki HJM dla obligacji z ryzykiem kredytowym

Obligacją bez ryzyka kredytowego o terminie zapadalności θ nazywamy instrument finansowy wypłacający 1 w chwili θ. W przypadku obligacji z ryzykiem kredytowym mamy kilka wariantów opisujących wielkość i moment wypłaty tzw. kwoty odzyskiwanej która jest wypłacana posiadaczowi obligacji jeżeli zdarzenie kredytowe nastąpiło przed upływem zapadalności obligacji. Przykładowo jeżeli w chwili τ-momencie wystąpienia zdarzenia kredytowego, obligacja wypłaca ułamek $\delta \in [0,1)$ wartości rynkowej obligacji przed wystąpieniem zdarzenia kredytowego, czyli kwotę $\delta D(\tau-,\theta)$ to mówimy o częściowym odzysku wartości rynkowej. Wartość rynkowa takiej obligacji dla $t \leq \theta$ jest postaci:

$$D(t,\theta) = \mathbb{1}_{\{\tau>t\}} e^{-\int_t^\theta g(t,u)du} + \mathbb{1}_{\{\tau\leq t\}} \delta D(\tau-,\theta) \frac{B_t}{B_\tau},$$

gdzie procesy $g(t,u)$ są tzw. kredytowymi stopami forward, $(B_t)_{t\geq 0}$ to rachunek oszczędnościowy. W referacie zostaną podane warunki równoważne zachodzeniu postulatu HJM mowiącego że zdyskontowane procesy cen obligacji są lokalnymi martyngałami w przypadku obligacji narażonych na ryzyko kredytowe. Warunki HJM sformułowane będą dla obligacji o różnych metodach odzysku, oraz podobnie jak w pracy Jakubowskiego-Zabczyka[3] w przypadku gdy szum w równaniach stochastycznych na kredytowe stopy forward jest procesem Lévy'ego przyjmującym wartości w przestrzeni Hilberta.

Referat opiera się na wspólnej pracy z prof. J. Jakubowskim i J. Zabczykiem, która jest rozszerzoną wersją preprintu [2].

Bibliografia

[1] D. Heath, R. A. Jarrow, and A. Morton. *Bond pricing and the term structure of interest rates: A new methodology for contingent claims valuation.* *Econometrica* 60 (1992), 77–105.

[2] J.Jakubowski, M. Niewęgłowski and J. Zabczyk. *Lévy Modelling of defaultable bonds. Inst. of Math., Polish Acad. of Sciences Preprint*, (658):1–22, 2005.

[3] J. Jakubowski and J. Zabczyk. *HJM condition for models with Lévy noise. Inst. of Math., Polish Acad. of Sciences Preprint*, (651):1–11, 2004.

Ernest Nieznaj
Politechnika Lubelska

Centralne twierdzenie graniczne dla dyfuzji w losowym ośrodku

W niniejszej pracy dowodzimy centralnego twierdzenia granicznego dla procesu dyfuzji (w losowym ośrodku) z niezerowym dryfem. Stanowi to pewne uogólnienie prac np. [5], [10]. Dodatkowo pokazujemy, że macierz kowariancji granicznego wektora losowego odpowiadającego dyfuzji z dryfem zbiega, gdy dryf dąży do zera, do macierzy kowariancji granicznego rozkładu dyfuzji z zerowym dryfem. W dowodzie powyższych faktów używamy m. in. metod równań różniczkowych cząstkowych, w szczególności nierówności Harnacka.

Bibliografia

[1] A. Fannjiang, T. Komorowski, *An invariance principle for diffusion in turbulence*, Ann. of Prob., 27 (1999). pp. 751-781.
[2] Helland Inge S., *Central limit theorems for martingales with discrete or continuous time*, Scand J Statist 9: 79-94, 1982
[3] T. Komorowski, S. Olla, *A note on the central limit theorem for two-fold stochastic random walks in a random environment*, Bull. Polish Acad. Scien. Math, Vol 51, No. 2, pp. 217-232 (2003)
[4] T. Komorowski, S. Olla, *On homogenization of time-dependent random flows*, Probab. Theory Relat. Fields 121, pp. 98-116 (2001)
[5] Kozlov S.M., *Avareging of random operators*, Math. USSR Sbornik, Vol. 37 (1980) No. 2
[6] C. Landim, S. Olla, H.T. Yau, *Convection-diffusion equation with space-time ergodic random flow*, Probab. Theory Relat. Fields., 112, pp. 203-220 (1998)
[7] J. Moser, *A Harnack inequality for parabolic differential equations*, Comm. Pure Appl. Math., Vol. 17, 1964, pp. 101-134.
[8] S. Olla, *Notes on central limit theorems for tagged particles and diffusions in random environment*, Notes of the course given at *Etats de la recherche: Milieux Aleatoires* CIRM, Luminy 23-25 November 2000, Panorama et Syntheses 12, 75-100, 2001.
[9] K. Oelschläger, *Homogenization of a diffusion process in a divergence free random field*, Ann. of Prob., 16 (1988), pp. 1084-1126.
[10] G. Papanicolaou, S. R. S. Varadhan, *Boundary value problems with rapidly oscillating random coefficients*, Coll. Math. Soc. Janos Bolyai, 27 Random fields, (Esztegrom 1979), 835-873 North-Holland, Amsterdam 1982.

Jan Obłój
Université Paris 6
Alexander Cox
University of York

O fraktalach ukrytych w błądzeniu losowym

W abstrakcyjnym ujęciu, problem zanurzeń Skorochoda można streścić następująco: dla danego procesu (X_t) o wartościach w (E, ρ) oraz miary probabilistycznej μ na E znaleźć moment stopu T taki, że $X_T \sim \mu$. Najczęściej, aby otrzymać "dobre" rozwiązania, należy nałożyć dodatkowe warunki na T.

Kiedy $X = B$ jest ruchem Browna oraz μ jest scentrowana wymaga się, aby $(B_{t\wedge T} : t \geq 0)$ był jednostajnie całkowalnym (JC) martyngałem. Równoważnie można wymagać, aby T był minimalny (tzn. $S \leq T$, $B_T \sim B_S$ implikuje $T = S$). Kryterium minimalności można stosować dla dowolnej miary μ.

Celem referatu jest rozważenie podobnych zagadnień dla X_n – błądzenia losowego na $\mathbb{Z}$. Pokażemy, że dla dowolnej miary probabilistycznej μ na $\mathbb{Z}$ istnieje minimalny moment stopu τ taki, że $X_\tau \sim \mu$. Jednocześnie okaże się, że klasa miar które można otrzymać jako X_τ przy $(X_{n\wedge\tau} : n \geq 0)$ JC jest znacznie mniejsza i tworzy fraktal w $[0,1]^N$ (gdzie N jest odpowiednim wymiarem).

Celem przykładu podamy tu najprostszy wynik. Niech $\mu(\{-2,0,2\}) = 1$ będzie scentrowaną miarą probabilistyczną. Taka miara jest jednoznacznie opisana przez $\mu(\{0\}) = p \in [0,1]$. Okazuje się, że istnieje moment stopu τ taki, że $X_\tau \sim \mu$ oraz $(X_{n\wedge\tau} : n \geq 0)$ jest JC martyngałem *wtedy i tylko wtedy* gdy $p \in S$, gdzie S jest fraktalem będącym punktem stałym kontrakcji f działającej na domkniętych podzbiorach $[0,1]$ poprzez:

$$A \xrightarrow{f} [0, \frac{1}{8}] \cup (\frac{1}{4}A + \frac{1}{8}) \cup (\frac{1}{4}A + \frac{1}{4}) \cup \{1\}.$$

Bibliografia

[1] Barnsley, M.F. i Demko, S. (1985) Iterated function systems and the global construction of fractals, *Proc. Roy. Soc. London Ser. A* **399**, No. 1817: 243–275
[2] Obłój, J. (2004) Skorokhod embedding problem and its offspring, *Probability Surveys* **1**:321–392

Jakub Olejnik
Uniwersytet Łódzki, Wydział Matematyki

O zbieżności prawie pewnej pewnych szeregów funkcji z L_p

Przedstawiony zostanie wynik dotyczący charakteryzacji prawie pewnej zbieżności szeregów elementów przestrzeni typu L_p spełniających warunek pseudo-ortogonalności

$$\left\|\sum_{i=n}^{m} X_i\right\|^p \leq \sum_{i=n}^{m} \|X_i\|^p.$$

Bibliografia

[1] Kashin, B. S. and Saakyan, A. A. (1989) Orthogonal Series, Translations of mathematical monographs, vol. 75.
[2] Paszkiewicz, A. (2005) A new proof of the Rademacher-Menshov Theorem, Acta Sci. Math. (Szeged), strony 631-642.
[3] Paszkiewicz, A. (2005) On complete characterization of coefficients (a_n) of a.e. converging Fourier series $\sum a_n \Phi_n$ in L_2, Preprint.

Adam Osękowski
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego

Dwie nierówności między pierwszymi momentami martyngału, jego funkcji maksymalnej oraz jego funkcji kwadratowej

Niech H będzie przestrzenią Hilberta, a $(M_n, \mathcal{F}_n)$ będzie martyngałem o wartościach w H. Niech (M_n^*), $(S_n(M))$ oznaczają funkcję maksymalną oraz funkcję kwadratową (nawias kwadratowy) tego martyngału, odpowiednio. Celem odczytu będzie udowodnienie następujących dwóch nierówności:

$$\mathbb{E}|M_n| \leq 2\mathbb{E}S_n(M), \;\; n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,$$

$$\mathbb{E}M_n^* \leq \mathbb{E}|M_n| + 2\mathbb{E}S_n(M) \;\; n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,$$

przy czym stała 2 występująca w pierwszej z tych nierówności jest optymalna. Dowód będzie przeprowadzony za pomocą modyfikacji metody Burkholdera, pozwalającej na jednoczesne operowanie martyngałem, jego funkcją maksymalną oraz jego funkcją kwadratową.

Jan Palczewski
Uniwersytet Warszawski
Łukasz Stettner
Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk

O optymalnym inwestowaniu z kosztami transakcji

W referacie opowiem o wynikach dotyczących istnienia strategii optymalnej dla problemu maksymalizacji średniej stopy zwrotu z inwestycji w papiery wartościowe. Tym, co wyróżnia prezentowane rezultaty, jest przyjęcie kosztów transakcji składających się zarówno z części proporcjonalnej do wielkości transakcji jak i z części stałej oraz wprowadzenie tzw. procesu czynników ekonomicznych. Szczególnie koszt stały stwarza problemy w trakcie matematycznej analizy zaburzając „ciągłe zachowanie” modelu.

Zbigniew Palmowski
Instytut Matematyczny, Uniwersytet Wrocławski, Wrocław
Florin Avram i Martijn Pistorius
Universite de Pau i King's College London

Problem optymalnej dywidendy dla spektralnie ujemnych procesów Lévy'ego

W referacie pokażemy jak znaleźć optymalną strategię maksymalizującą średnią łączną zdyskontowaną dywidendę dla procesu ryzyka, który ewoluuje jak spektralnie ujemny proces Lévy'ego. Rezultat oparty jest głównie o nowe twierdzenia fluktuacyjne i martyngałowe dla odbitego procesu Lévy'ego w przeszłym supremum i przeszłym infimum. Przykłady obejmują m.in. ruch Browna, złożony process Poissona z dryfem czy też proces stabilny. Główny rezultat uogólnia prace Jeanblanc i Shiryaev (1995) oraz Gerber i Shiu (2004).

Bibliografia

[1] Avram, F., Palmowski, Z. i Pistorius, M. On the optimal dividend problem for a spectrally negative Lévy process. Złożony do publikacji.
[2] Gerber, H.U. i Shiu, E.S.W. (2004) Optimal dividends: analysis with Brownian motion, *North American Actuarial Journal* **8**, 1–20.
[2] Jeanblanc, M. i Shiryaev, A.N. (1995) Optimization of the flow of dividends, *Russian Math. Surveys* **50**, 257–277.

Adam Paszkiewicz
Uniwersytet Łódzki

Prawie pewna zbieżność i prawie pewna ciągłość

Podamy pełną charakteryzację ciągów liczbowych (a_n) speńiających warunek:

szereg $\sum a_n \phi_n$ jest zbieżny prawie pewnie dla każdego (Φ_n)-O.N. w L_2.

Scharakteryzujemy procesy o przyrostach ortogonalnych w L_2 ciągłe prawie pewnie.

Katarzyna Pietruska-Pałuba
Instytut Matematyki Uniwersytetu Warszawskiego

Nierówności typu Gagliardo-Nirenberga dla miar gaussowskich

Nierównościami Gagliardo-Nirenberga (w przestrzeniach $L^p(\mathbb{R}^n, dx)$) zwykło się nazywać nierówności postaci

$$\|\nabla^{(k)} f\|_q \leq C \|f\|_r^{1-\frac{k}{m}} \|\nabla^{(m)} f\|_p^{\frac{k}{m}}, \tag{5}$$

gdzie $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ jest funkcją dostatecznie gładką , $m \geq k$, natomiast $p, q, r > 1$ są związane poprzez warunek $\frac{2}{q} = \frac{k}{m}\frac{1}{r} + (1 - \frac{k}{m})\frac{1}{p}$. Posiadają one również odpowiednik addytywny, tzn.

$$\|\nabla^{(k)} f\|_q \leq C \left(\|f\|_r + \|\nabla^{(m)} f\|_p \right). \tag{6}$$

W komunikacie przedstawię uogólnienie addytywnych nierówności Gagliardo-Nirengerga na szerszą klasę przestrzeni funkcyjnych $L^p(\mathbb{R}^n, d\mu)$, która zawiera w szczególności miary gaussowskie na $\mathbb{R}^n$. Co więcej, przestrzenie L^p mogą zostać zastąpione przez przestrzenie Orlicza.

Zbigniew Puchała
Instytut Matematyczny Uniwersytetu Wrocławskiego
Tomasz Rolski
Instytut Matematyczny Uniwersytetu Wrocławskiego

Czasy kolizji dla procesów Markowa

Rozważamy czas do kolizji dla n niezależnych kopii procesu Markowa $X_t^1, \ldots, X_t^n$, startujących odpowiednio z punktów x_i, $x_1 < \cdots < x_n$. Wychodząc z wyniku Doumerc'a i O'Connell'a [2], pokażemy że dla procesów takich jak ciągłe błądzenie przypadkowe, proces Poissona czy ruch Browna asymptotyka ogona czasu kolizji wynosi

$$P_x(\tau > t) \simeq Ch(x)t^{-\frac{n(n-1)}{4}}$$

gdze C jest znaną stałą, a $h(x)$ jest wyznacznikiem Vandermonda. Asymptotyka dla ruchu Browna zostala wczesniej podana przez Grabinera [1]. Referat opiera się na wspólnej pracy z Tomaszem Rolskim [4].

Bibliografia

[1] Grabiner, D.J. (1999) Brownian motion in the Weyl chamber, non-colliding particles, and random matrices. *Ann. Inst. Henri Poincare*, 35, 177-204
[2] Doumerc, Y., O'Connell, N., (2005) Exit problems associated with finite reflection groups. *Probability Theory and Related Fields* 132, 501 - 538
[3] Puchała, Z., (2005) Proof of Grabiner's theorem on non-colliding particles. *Probability and Mathematical Statistics*, Vol. 25, Fasc. 1, pp. 129-132.
[4] Puchała, Z., Rolski, T. (2005) The exact asymptotic of the time to collision. *Electronic Journal of Probability* 10, 1359-1380

Teresa Rajba
Akademia Techniczno–Humanistyczna, Bielsko-Biała

On certain classes of limit distributions of m-times selfdecomposable distributions

Let $0 < |c| < 1$ and $\mathcal{H} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$. We define the class $\widetilde{\mathcal{L}}(\mathcal{H}, c)$ as the class of limit distributions of normed sums

$$b_n^{-1} \sum_{j=1}^{k_n} X_j + a_n, \tag{7}$$

where $X_1, X_2, \ldots$ are independent random variables each with distributions in $\mathcal{H}$, $b_n > 0, \uparrow \infty$, $a_n \in \mathbb{R}^d$, $k_n \in \mathbb{N}, \uparrow \infty$, $\lim_{n\to\infty} b_{n+1}^{-1} b_n = c$. If furthermore, the random variables $\{b_n^{-1} X_j \colon 1 \leqslant j \leqslant k_n, n = 1, 2, \ldots\}$ satisfy the infinitesimal condition, we say, that the limit distribution of normed sums (7) belongs to the class $\mathcal{L}(\mathcal{H}, c)$. Let $C \subset [-1, 1]$. Put

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathcal{L}}(\mathcal{H}, C) &= \bigcap_{c \in C \setminus \{0,1,-1\}} \widetilde{\mathcal{L}}(\mathcal{H}, c), \\ \mathcal{L}(\mathcal{H}, C) &= \bigcap_{c \in C \setminus \{0,1,-1\}} \mathcal{L}(\mathcal{H}, c), \end{aligned}$$

The class $\mathcal{L}(\mathcal{H}, c)$ was introduced in Maejima and Naito [2]. Bunge [1] studied the class $\widetilde{\mathcal{L}}(\mathcal{H}, C)$ when $k_n = n$ and $d = 1$. In this paper we study distributions from the classes $\mathcal{L}(\mathcal{H}, C)$ and $\widetilde{\mathcal{L}}(\mathcal{H}, C)$ for $\mathcal{H} = L_m(\mathbb{R}^d)$ (the class of m-times selfdecomposable distributions), $m = 0, 1, 2, \ldots$. We obtain representations of characteristic functionals of their distributions.

Bibliografia

[1] Bunge, J. (1997) Nested classes of C-decomposable laws, Ann. Probab., **25,** 215–229.
[2] Maejima, M. and Naito, Y. (1998) Semi-selfdecomposable distributions and a new class of limit theorems, Prob. Theory Relat. Fields, **112,** 13–31.

Tomasz Rolski
Uniwersytet Wrocławski, Instytut Matematyki

Formuły quasi-produktowe dla sieci fluidowych z wpływem zadanym przez proces Levy'ego

Rozważamy stochastyczną drzewiastą sieć fluidową z wpływem zadanym przez proces Levy'ego. Dla takich sieci jest podany wzór na łączną transformatę Laplace'a dla stacjonarnego wektora wypełnienia bufora oraz okresu zajętości. Rozważa się też stacjonarny czas pustości dla poszczególnych stacji. W tym celu zadanie jest sprowadzone do podania łącznego rozkładu maksimów (po współrzędnych) i momentów ich pierwszego osiągnięcia oraz wykorzystania idei czasu rozczepiania (splitting time). W szczególności będzie rozważana prosta sieć tandemowa, oraz system priorytetowy.

Jan Rosiński
Department of Mathematics, University of Tennessee, USA

Stationary tempered stable processes

Tempered stable (TS) processes occur as result of random tempering of stable jumps. A Lévy TS process looks locally like a stable one but globally it may approximate another stable process of higher index or a Brownian motion, depending on the intensity of tempering. This can clearly be seen from shot noise representations of TS processes.

TS Lévy processes were first introduced in statistical physics to model turbulence and are known in physics literature as the *truncated Lévy flight model*, see [3]. They were also introduced in mathematical finance to model stochastic volatility, see [1] and [2]. The importance of TS processes comes from the fact that they combine both the α-stable and Gaussian trends. In [4] we define and study a more general and robust class of TS distributions than considered in these works.

In this talk we consider stationary TS processes. We obtain their spectral representation which, surprisingly, is simpler than the corresponding representation for stable processes. We discuss both types of representations in this talk. Roughly speaking, our representation relates a (possibly infinite) dynamical system to a stationary TS process. Ergodic theory decompositions of this dynamical system into invariant components lead to decompositions of the process into independent stationary TS processes with distinct ergodic characteristics.

Bibliografia

[1] Barndorff-Nielsen, O.E., Shephard, N. (2001) Non–Gaussian Ornstein–Uhlenbeck–based models and some of their uses in financial economics, J. R. Statist. Soc. B 63 1–42.
[2] Carr, P., Geman, H., Madan, D.B., Yor, M., (2002). The fine structure of asset returns: An empirical investigation, J. Business 75 303–325.
[3] Mantegna, R.N., Stanley, H.E., (1994). Stochastic process with ultraslow convergence to a Gaussian: The truncated Lévy flight, Phys. Rev. Lett. 73 2946–2949.
[4] Rosiński, J. (2004). Tempering stable processes. Preprint.
Available at www.math.utk.edu/˜rosinski/manuscripts.html.

Andrzej Rozkosz
Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet Mikołaja Kopernika

Interpretacja probabilistyczna rozwiązania problemu Dirichleta

W komunikacie rozważać będziemy problem Dirichleta w dziedzinie ograniczonej dla półliniowego równania drugiego rzędu w formie dywergencyjnej. Pokażemy, że przy klasycznych założeniach na współczynniki równania, jego prawą stronę i warunek brzegowy, słabe rozwiązanie problemu może być wyrażone w terminach rozwiązania pewnego stochastycznego równania różniczkowego wstecz z warunkiem końcowym w momencie losowym. Otrzymana interpretacja może być uważana za uogólnienie wzoru Kaca-Feynmana.

Bibliografia

[1] Rozkosz, A. (2005) BSDEs with random terminal time and semilinear elliptic PDEs in divergence form, *Studia Mathematica* **170**, 1–21.

Michał Ryznar
Instytut Matematyki i Informatyki Politechniki Wrocławskiej
Tomasz Byczkowski
Instytut Matematyki i Informatyki Politechniki Wrocławskiej

Czasy trafienia geometrycznego ruchu Browna

Niech τ będzie czasem pierwszego trafienia poziomu 1 przez geometryczny ruchu Browna $X(t) = x \exp(B(t) - 2\mu t)$ z dryftem $\mu \geq 0$ startujący z $x > 1$. $B(t)$ jest ruchem Browna startującym z 0 o wariancji $EB^2(t) = 2t$. Celem referatu jest opis gęstości następującego zastopowanego funkcjonału wykładniczego

$$A(\tau) = \int_0^\tau X^2(t)dt.$$

Gęstość funkcjonału $A(\tau)$ przedstawiona jest w postaci pewnej formuły całkowej. Reprezentacja ta umożliwia otrzymanie asymptotycznych własności gęstości w nieskończoności. Innym zastosowaniem reprezentacji całkowej jest opis jądra Poissona półprzestrzeni dla hiperbolicznego ruchu Browna dowolnego wymiaru.

Tomasz Schreiber
Katedra Teorii Prawdopodobieństwa i Analizy Stochastycznej,
Wydział Matematyki i Informatyki, UMK, Toruń

Separacja fazowa dla wielokątnych pól Markowa na płaszczyźnie

Wielokątne pola Markowa, skonstruowane po raz pierwszy w 1982 przez Araka, sa losowymi układami dowolnie zagnieżdżonych nieprzecinających się wielokątnych konturów na płaszczyźnie. Pola te posiadają dwuwymiarową własność Markowa, własność niezmienniczości ze względu na izometrie, a ponadto znane są jawne wzory analityczne dla licznych ich charakterystyk numerycznych. Po nałożeniu odpowiedniego oddziaływania modyfikacje gibbsowskie takich układów przejawiają wiele własności analogicznych do dwuwymiarowego modelu Isinga.

Celem referatu będzie przedstawienie otrzymanych przez nas wyników opisujących asymptotyczną geometrię tzw. separacji fazowej dla niskotemperaturowych wielokątnych pól Markowa w dziedzinie przejścia fazowego. Mowiąc nieformalnie, wielokątne kontury badanych ukladow można interpretować jako granice dwoch wspolzawodniczących i nie mieszających się ze sobą faz (ośrodków, np. woda i olej) i poprzez zadawanie odpowiednich warunków (odpowiadających stosownemu doborowi parametrów oddziaływań) można powodować przewagę jednej bądź drugiej fazy. Ze współistnieniem i separacją faz mamy do czynienia gdy warunki te nie faworyzują żadnej fazy. Pokażemy, że tworzą się wowczas makroskopowe 'krople' jednej fazy zanurzone w drugiej, o geometrii zdeterminowanej minimalizacją powierzchniowej energii swobodnej. Na koniec wspomnimy o zastosowaniu wypracowanych dla potrzeb powyzszych rozważań narzędzi teoretycznych do konstrukcji algorytmu do ... segmentacji obrazów cyfrowych, co jest obecnie tematem wspólnych badań we współpracy z M.C. van Lieshout (CWI, Amsterdam) i R. Kluszczyńskim (UMK, Torun).

Piotr Sielski
Wydział Matematyki Uniwersytetu Łódzkiego

O nierównościach dotyczących odległości pomiędzy operatorami warunkowej wartości oczekiwanej

Niech $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ będzie przestrzenią probabilistyczną, $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ pod-σ-ciałami $\mathcal{F}$. Niech $d(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ oznacza odległość Hausdorffa pomiędzy $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$, tzn:

$$d(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \max\{\sup_{B \in \mathcal{B}} \inf_{A \in \mathcal{A}} P(A \triangle B), \sup_{A \in \mathcal{A}} \inf_{B \in \mathcal{B}} P(A \triangle B)\}.$$

Przedstawione zostaną nierówności typu:

$$||\mathbb{E}^{\mathcal{A}} - \mathbb{E}^{\mathcal{B}}||_{\infty,p} \leq C d(\mathcal{A}, \mathcal{B}).$$

Łukasz Stettner
IMPAN

Ergodyczność procesów filtracji - nowe podejście

Problem istnienia jedynych miar niezmienniczych dla procesu filtracji stał się otwarty z chwilą zauważenia błędu w pracy [2]. Okazało się bowiem, że podejście poprzez procesy stacjonarne wymaga spełnienia dodatkowych trudnych do sprawdzenia założeń. Pewnym krokiem naprzód byşo zastosowanie metryki Hilberta wprowadzonej do tej tematyki w pracy [1] i intensywnie stosowanej do dostatecznych warunków na ergodyczność w [3]. Alternatywą wydaje się być zupełnie nowe podejście poprzez charakterystykę funkcjonałów od miar niezmienniczych za pomocą metody znikającego dyskonta, z wykorzystaniem wypukłościowych własności procesów filtracji opisanych w pracy [4].

Bibliografia

[1] R. Atar, O. Zeitouni, *Lyapunov exponents for finite-state nonlinear filtering*, SIAM J. Control Optimiz. 35 (1997), 36–55.
[2] H. Kunita, *Asymptotic behaviour of the nonlinear filtering errors of Markov process*, J. Multivariate Anal. 1 (1971), 365–393.
[3] G. Di Masi, Ł. Stettner, Ergodicity of Hidden Markov Models, Mathematics of Control, Signals and Systems 17 No.4 (2005), 269-296,
[4] G. Di Masi, Ł. Stettner, Ergodicity of filtering processes: a new approach, preprint,

Andrzej Stós
Instytut Matematyki i Informatyki, Politechnika Wrocławska

Półgrupa podporządkowana na drzewach jednorodnych i przestrzeniach hiperbolicznych

Drzewa jednorodne są dyskretnym odpowiednikiem przestrzeni hiperbolicznych. Kontynuując badania z pracy [2], gdzie podano oszacowania gęstości prawdopodobieństw przejścia półgrupy stabilnej na przestrzeniach symetryczych (w tym hiperbolicznych), znajdujemy ([3]) analogiczne formuły dla drzew jednorodnych.

Omówimy też problem asymptotycznego rozkładu prawdopodobieństw przejścia, oszacowania czasu wyjścia i jądra Poissona (dużych) kul. Przedstawiana metoda (formalizm przestrzeni metrycznej) daje te wyniki zarówno dla drzew jednorodnych jak i przestrzeni hiperbolicznych.

Bibliografia

[1] Cowling M., Meda S., Setti A. G. (2000), Estimates for functions on the Laplace operator on homogeneous trees, TAMS 352, 4271-4293.
[2] Graczyk P., Stós A. (2004), Transition density estimates for stable processes on symmetric spaces, Pacific J. Math 217, 87-100.
[3] A. Stós, Stable semigroups on homogeneous trees and hyperbolic spaces, preprint.

Joachim Syga
Wydział Matematyki, Informatyki i Ekonometrii, Uniwersytet Zielonogórski Zielona Góra

Wielowartościowe całki stochastyczne, ich własności i zastosowania

W komunikacie przedstawione zostaną definicje wielowartościowych całek stochastycznych względem martyngału całkowalnego z kwadratem oraz semimartyngału. Omówione zostaną własności obu rozważanych całek.

Bibliografia

[1] Motyl, J., Syga, J. (2006) Properties of set-valued stochastic integrals, Discussiones Mathematicae-Probability and Statistics, (w druku)
[2] Protter, P. (1990) Stochastic Integration and Differential Equations (a new approach), Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York.

Krzysztof Szajowski
Instytut Matematyki i Informatyki Politechniki Wrocławskiej
Daniel Łebek
Instytut Matematyki i Informatyki Politechniki Wrocławskiej

Optymalne strategie przy inwestycjach wysokiego ryzyka

Inwestor obserwuje sekwncyjnie rangi n opcji. Ma do zainwestowania pewien kapitał w przedsięwzięcie, którego prawdziwa wartość jest znana na końcu okresu inwestycyjnego. Problem optymalnego inwestowania, gdy zysk przynoszą inwestycje w opcje o ekstremalnych rangach rozwiązali Bruss i Ferguson (2002). Inwestycje w przedsięwzięcia o niższych rangach przynoszą całkowitą stratę zainwestowanego kapitału. Część niezaiwestowana nie zmienia swojej wartości.

Przedstawione zostanie uogólnienie problemu na przypadek, gdy inwestycja przynosi zysk również przy nieco niższych rangach niż ekstremalna.

Bibliografia

[1] Bruss, F. T., Ferguson, T. S., (2002) High risk and competitive investment models. Ann. Appl. Probab. 12 (4), 1202–1226.

Tomasz Szarek
Uniwersytet Śląski

Istnienie miar niezmienniczych dla równań z impulsywnym szumem

W referacie sformułujemy kryteria istnienia miar niezmienniczych dla procesów Markowa. Wyniki te uogólniają rezultaty z pracy [3].

W dalszej części wykładu podamy ich zastosowanie do stochastycznych równań różniczkowych z impulsowym szumem, rozważanych przez Peszata i Zabczyka [2]. Są to wspólne wyniki z pracy z A. Lasotą [1].

Bibliografia

[1] Lasota A. i Szarek T., 2006, *Lower bound technique in the theory of a stochastic differential equation*, J. Differential Equations (przyjęta do druku),
[2] Peszat S. i Zabczyk J., 2005, *Stochastic heat and wave equations driven by an impulsive noise*, in Stochastic Partial Differential Equations and Applications - VII, Eds. G. Da Prato and L. Tubaro, A Series of Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics 245, ss. 229–242,
[3] Szarek T., 2006, *Feller processes on non–locally compact spaces*, Ann. Probab. **34 (5)**.

Wojciech Szatzschneider
Anahuac University, Mexico

Permits to Pollute or Principal -Agent? Which one contributes better to the environment

We propose the issue of environmental improvement certificates. We will show how these certificates could produce directly collusive equilibria using Nash approach. In environmental problems it is hardly possible to establish correct models. However, ”good” environmental certificates contribute positively to conservation in any state of nature. We work in diffusion setting.

Zbigniew S. Szewczak
Wydział Matematyki i Informatyki, UMK, Toruń

Relatywna stabilność silnie mieszających ciągów ściśle stacjonarnych

Niech ξ_k będzie ciągiem ściśle stacjonarnym, $U_2(x) = \mathrm{E}[\xi_1^2 I_{[|\xi_1| \leq x]}]$ funkcją wolno zmieniającą się, $U_2(\infty) = \infty$ i dla pewnego $\delta > 0$

$$\frac{n}{a_n}\alpha(\lfloor a_n \rfloor) \to 0, \qquad a_n = \left(\frac{b_n^\delta U_2(b_n)}{U_{2+\delta}(b_n)}\right)^{\frac{2}{\delta}},$$

gdzie b_n taki, że $nU_2(b_n) \sim b_n^2$ oraz $\alpha(n)$ współczynnik silnego mieszania. Wtedy $\{\xi_k^2\}$ jest ciągiem relatywnie stabilnym, tzn.:

$$b_n^{-2} \sum_{k=1}^{n} \xi_k^2 \to_P 1.$$

Warunki powyższe spełnia np. proces ARCH(1) (z $\delta = 1, b_n^2 = Cn \ln n, C = (2-\ln 2-\gamma)^{-1}$, gdzie γ jest stałą Eulera) zdefiniowany rekurencyjnie przez $\xi_k = \sqrt{1 + \xi_{k-1}^2}\zeta_k$, gdzie $\{\zeta_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie $\mathcal{N}(0, 1)$ i niezależnym od zmiennej losowej ξ_0 takiej, że $\mathcal{L}(\xi_0^2) = \mathcal{L}(\sum_{k=1}^{\infty} \prod_{\nu=1}^{k} \zeta_\nu^2)$.

Bibliografia

[1] Jakubowski, A., Szewczak, Z. S. (1989) *A Normal Convergence Criterion for strongly mixing stationary sequences, in: P. Révész (Ed.), Limit Theorems in Probability and Statistics, Coll. Math. Soc. J. Bolyai 57, Pécs, pp. 281–292.*
[2] Szewczak, Z. S. (2001) *Relative stability for strictly stationary sequences. J. Multivariate Anal., 78, 2, 235–251.*

Paweł Sztonyk
Instytut Matematyki i Informatyki Politechniki Wrocławskiej

Oszacowania jądra potencjału i nierówność Harnacka dla anizotropowego stabilnego procesu Lévy'ego

Rozważamy następujący operator

$$Au(x) = \int_{\mathbf{R}^d} [u(y+x) - u(x) - y \cdot \nabla u(x) \mathbf{1}_{|y|<1}] \nu(dy), \tag{8}$$

gdzie

$$\nu(D) = \int_{\mathbf{S}_{d-1}} \int_0^\infty \mathbf{1}_D(r\xi) r^{-1-\alpha} \, dr \mu(d\xi) \,, \quad D \subset \mathbf{R}^d \,, \tag{9}$$

μ jest dodatnią, skończoną, niezdegenerowaną i symetryczną miarą oraz $0 < \alpha < 2$. A jest generatorem α-stabilnego procesu Lévy'ego $\{X_t \,, t \geq 0\}$ na $\mathbf{R}^d$ o funkcji charakterystycznej

$$E^0 e^{iu \cdot X_t} = e^{-t\Phi(u)}, \quad u \in \mathbf{R}^d, \; t \geq 0, \tag{10}$$

gdzie wykładnik eksponenty Φ jest dany wzorem

$$\Phi(u) = c \int\limits_{\mathbf{S}_{d-1}} |u \cdot \xi|^\alpha \mu(d\xi).$$

Podajemy charakteryzację tych operatorów A, dla których zachodzi nierówność Harnacka, tzn. istnieje stała $C = C(\alpha, \nu)$ taka, że dla każdej funkcji u harmonicznej względem procesu w kuli jednostkowej i nieujemnej w $\mathbf{R}^d$

$$u(x_1) \leq C u(x_2) \,, \quad |x_1| < 1/2 \,, \; |x_2| < 1/2 \,. \tag{11}$$

Ponadto badamy ciągłość jądra potencjału procesu $\{X_t \,, t \geq 0\}$ na sferze jednostkowej $\mathbf{S}_{d-1}$ w $\mathbf{R}^d$.

Bibliografia

[1] K. Bogdan, P. Sztonyk, Harnack's inequality for stable Lévy processes, Potential Analysis 22 (2) (2005), 133–150.
[2] K. Bogdan, P. Sztonyk, Estimates of potential kernel and Harnack's inequality for anisotropic fractional Laplacian, preprint.

Dominik Szynal
Uniwersytet Marii Curie-Skłodowskiej, Instytut Matematyki
Milena Bieniek
Uniwersytet Marii Curie-Skłodowskiej, Wydział Ekonomiczny

Entropie losowego podziału odcinka

Podajemy dokładne wzory na momenty różnych entropii (Shannona, paired, genetic, Havrda i Chavrat α-entropy) losowego podziału odcinka. Ponadto dowodzimy, że entropie te są zbieżne kompletnie.

Anna Talarczyk
Uniwersytet Warszawski

Interpretacja czasu lokalnego samoprzecięć pewnych procesów w $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ przy pomocy układów gałązkowych.

Prezentowane wyniki dotyczą interpretacji dość abstrakcyjnego pojęcia czasu lokalnego samoprzecięć procesu o wartościach w przestrzeni dystrybucji temperowanych ($\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$). Rozważamy proces gęstości o wartościach w $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ związany z gałązkowym układem cząstek, którego stan początkowy wyraża się miarą losową Poissona, a ruch cząstek opisany jest przez proces Lévy'ego. Cząstki poruszają się niezależnie i podlegają gałązkowaniu binarnemu. Pokażemy, w jaki sposób czas lokalny samoprzecięć procesu gęstości wyraża się przy pomocy prostszego pojęcia czasu lokalnego przecięć "gałęzi" układu cząstek. Jest to uogólnienie wyniku z pracy [1], odpowiadającego przypadkowi bez gałązkowania. Podamy również warunek dostateczny istnienia czasu lokalnego przecięć gałęzi.

Bibliografia

[1] Bojdecki, T., Talarczyk, A. (2005). Particle picture approach to the self-intersection local time of density processes in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. Stoch. Proc. Appl. 115, 449-479.

Barbara Tylutki
Zespół Szkół Nr 1 w Rzeszowie
Krystyna Twardowska
Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych
Politechnika Warszawska

Zastosowanie teorii filtracji w naukach ubezpieczeniowych

Przedstawimy dwie metody prognozowania całkowitej wypłaty w modelu kolektywnego ryzyka oraz składek w ubezpieczeniach majątkowych. Pierwszą metodą jest filtracja z niegaussowskimi zmiennymi losowymi występującymi w ubezpieczeniach. Pokażemy, że różnica między błędem prognozy otrzymanej metodą filtru Kalmana, a metodą filtru o minimalnej wariancji w naszych modelach, dąży do zera, gdy czas dąży do nieskończoności. Drugą metodą jest metoda Monte Carlo zastosowana do powyższych modeli. Zaprezentujemy przykładowe kwartalne prognozy na zbiorczych danych dla polskich towarzystw ubezpieczeniowych z lat 1996 - 2005 otrzymanych z KNUiFE.

Bibliografia

[1] T. Michalski, K. Twardowska, B. Tylutki, Adaptive filtering analysis in insurance, Prace Naukowe Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu, praca przyjęta do druku w 2005 r.
[2] B. Tylutki, A Monte Carlo filtering approach for prediction of the total claim payments in the collective risk model, in preparation.

Jacek Wesołowski
Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych
Politechnika Warszawska, Warszawa

Asymptotyka doskonałych dopasowań w dwudzielnych grafach losowych

W grafie dwudzielnym o (n, m) wierzchołkach ($m \leq n$), doskonałym dopasowaniem nazywamy podgraf, w którym każdy z m wierzchołków jednej składowej łączy się z innym spośród n wierzchołków drugiej składowej. Z każdą krawędzią (i, j) wiążemy zmienną losową $X_{i,j}$ (np. kolor tej krawędzi), a z każdym doskonałym dopasowaniem funkcję symetryczną $h : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$ zmiennych $X_{i,j}$ odpowiadających krawędziom tego doskonałego dopasowania (np. wskaźnik monochromatyczności). Przedstawione zostanie twierdzenie graniczne dla sum takich funkcji po wszystkich doskonałych dopasowaniach w danym grafie dwudzielnym (np. dla liczby monochromatycznych doskonałych dopasowań) przy założeniu, że zmienne $X_{i,j}$ są iid, przy rozmiarach obu składowych m i n rosnących do nieskończoności. W granicy dostaje się sumę wielokrotnych całek Wienera funkcji będących elementami dekompozycji typu Hoeffdinga dla niekompletnych U-statystyk typu permanentowego (z jądrem h) zbudowanych na macierzy $[X_{i,j}]$ (zob. [3]), czyli tzw. P-statystyk. Korolyuk i Borovskikh (1990), wykorzystując twierdzenie Dynkina i Mandelbauma (1983), podali twierdzenie o zbieżności U-statystyk rosnącego rzędu. Wymaga ono jednak pewnych uściśleń. Z kolei twierdzenie o zbieżności dla P-statystyk otrzymuje się przez porównanie właśnie z asymptotyką U-statystyk rosnącego rzędu. Wyniki otrzymano wspólnie z G. Rempałą (Univ. of Louisville, USA). Jest to kontynuacja badań, które wcześniej (zob. [4]) prowadzone były dla iloczynowych jąder h, czyli dla losowych permanentów.

Bibliografia

[1] DYNKIN, E.B., MANDELBAUM, A. (1983) Symmetric statistics, Poisson point process and multiple Wiener integrals. *Ann. Statist.* **11**, 739-745.
[2] KOROLYUK, V.S., BOROVSKIKH, YU.V. (1990) U-statistics of increasing order. *Dokl. Akad. Nauk USSR* **82**, 3-7 (in Russian).
[3] REMPAŁA, G.A., WESOŁOWSKI, J. (2003) Incomplete U-statistics of permanent design *J. Nonpar. Statist.* **15**, 221-236.
[4] REMPAŁA, G.A., WESOŁOWSKI, J. (2005) Approximation theorems for random permanents and associated stochastic processes. *Probab. Theory Relat. Fields* **131**, 442-458.

Paweł Wolff
Instytut Matematyki, Uniwersytet Warszawski

O pewnej nierówności na momenty sum niezależnych zmiennych losowych o współczynnikach wektorowych

Niech ξ będzie rzeczywistą symetryczną zmienną losową, a $(F, \|\cdot\|)$ przestrzenią Banacha. Rozważmy sumę losową o współczynnikach wektorowych $S = \sum_{i=1}^{n} \xi_i v_i$, gdzie ξ_i to niezależne kopie zmiennej ξ, natomiast $v_i \in F$.

Dla pewnej klasy zmiennych ξ w prosty sposób pokażę, że p-ty moment $\|S\|$ szacuje się z góry przez $E\|S\|$ (pomnożoną przez stałą zależącą jedynie od rozkładu zmiennej ξ) i podwojony słaby p-ty moment wektora S. Kluczowy pomysł dowodu pochodzi od K. Oleszkiewicza, który ostatnio uzyskał podobny wynik dla sum rademacherowych.

Tego typu nierówności implikują np. fakt, że optymalne stałe w nierównościach typu Chinczyna-Kahane'a dla sum niezależnych kopii zmiennej ξ o współczynnikach wektorowych są tego samego rzędu co optymalne stałe w nierównościach typu Chinczyna (dla sum o współczynnikach rzeczywistych).

Janusz Wysoczański
Uniwersytet Wrocławski

t-transformacja miar i splotów i jej związki z nieprzemienną probabilistyką

Dla dodatniego parametru t określamy t-deformację miary probabilistycznej μ na prostej $\mathbb{R}$, jako kombinację wypukłą odwrotności jej transformaty Cauchy'ego $G_\mu(z)$ oraz funkcji tożsamościowej:

$$\frac{1}{G_{\mu_t}(z)} = \frac{t}{G_\mu} + (1-t)z$$

Otrzymujemy w ten sposób odwrotność transformaty Cauchy'ego pewnej miary probabilistycznej μ_t. Dla $t = 1$ transformacja jest identycznościowa. Jeśli $\mu \star \nu$ jest (jakimś) splotem określonym dla miar probabilistycznych μ, ν na prostej $\mathbb{R}$, to oznaczając t-transformację $\mathcal{U}_t : \mu \to \mu_t$, możemy też określić t-transformację tego splotu:

$$\mu \star_t \nu = (\mu_t \star \nu_t)_{1/t} = \mathcal{U}_{\frac{1}{t}} \left(\mathcal{U}_t(\mu) \star \mathcal{U}_t(\nu)\right)$$

Pokażemy jak ta transformacja zmienia centralne twierdzenie graniczne i twierdzenie graniczne typu Poissona dla klasycznego splotu miar: $\mu *_t \nu$ oraz dla wolnego splotu miar: $\mu \boxplus_t \nu$. W szczególności, dla $t = 1 - \frac{1}{2N}$ i splotu wolnego otrzymujemy graniczne miary

$$d\nu_N(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\sqrt{2N-1-N^2x^2}}{1-x^2} dx$$

odkryte przez Kestena dla spacerów losowych na grupie wolnej o N generatorach.

Opiszemy także kombinatoryczne własności tej transformacji, w szczególności sposób zmiany momentów i kumulant.

Referat jest oparty na wspólnych pracach z Markiem Bożejko:

1. M. Bożejko, J. Wysoczański, "Remarks on t-transformations of measures and convolutions". Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist. 37 (2001), no. 6, 737–761.

2. M. Bożejko, J. Wysoczański, "New examples of convolutions and non- commutative central limit theorems". Quantum probability (Gdańsk, 1997), 95–103, Banach Center Publ., 43, Polish Acad. Sci., Warsaw, 1998.

Ryszard Zieliński
IMPAN Warszawa
Wojciech Niemiro
UMK Toruń

Jednostajna asymptotyczna normalność w schemacie Bernoulliego

Dla każdego ustalonego prawdopodobieństwa sukcesu $\theta\ \in]0,1[$, ciąg doświadczeń Bernoulliego spełnia założenia centralnego twierdzenia granicznego, ale nie zachodzi to jednostajnie względem $\theta\ \in]0,1[$: istnieje takie ε, że dla każdego n znajdzie się takie $\theta\ \in]0,1[$ oraz takie $x \in R^1$, że $\left|P_\theta\{\frac{S_n - n\theta}{\sqrt{n\theta(1-\theta)}} \le x\} - \Phi(x)\right| > \varepsilon$. Pokażemy, że centralne twierdzenie graniczne zachodzi jednostajnie, gdy ciąg Bernoulliego jest zatrzymywany za pomocą odpowiednio skonstruowanej reguły stopu.

Bartosz Ziemkiewicz
Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet Mikołaja Kopernika, Toruń

Słaba aproksymacja ułamkowego procesu Wienera

W komunikacie przedstawiona zostanie nowa metoda słabej aproksymacji ułamkowego procesu Wienera $\{W^H\}$. Opiera się ona na reprezentacji całkowej tego procesu opisanej w pracy [1]. Ułamkowy proces Wienera przybliżać będziemy za pomocą sum postaci:

$$W_t^{H,n} = \sum_{k=1}^{[nt]} z^H\big(\tfrac{[nt]}{n}, \tfrac{k}{n}\big) X_{n,k} \ , \qquad t \in \mathbb{R}^+, n \in \mathbb{N} \ ,$$

gdzie $\{X_{n,k}\}$ jest tablicą różnic martyngałowych, a

$$z^H(t,s) = c_H s^{\frac{1}{2}-H} \int_s^t u^{H-\frac{1}{2}} (u-s)^{H-\frac{3}{2}} du \ .$$

Pokażemy, że jeżeli $\sum_{k=1}^{[n\cdot]} X_{n,k} \xrightarrow{\mathcal{D}} W$ w $\mathcal{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ oraz $\max_k E(X_{n,k})^2 \leq \frac{C}{n}$ dla pewnego $C > 0$, to $W^{H,n} \xrightarrow{\mathcal{D}} W^H$ w $\mathcal{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$. Wynik ten jest uogólnieniem wcześniejszych rezultatów Sottinena [3] i Nieminena [2]. W dowodzie wykorzystane zostanie nowe kryterium badania C-jędrności dla ciągu procesów dyskretnych.

Bibliografia

[1] Decreusefond L., Üstünel A. (1999), Stochastic Analysis of the fractional Brownian motion, Potential Anal. 10, 177–214,

[2] Nieminen A. (2004), Fractional Brownian motion and martingale-differences, Statist. Probab. Lett. 70, 1–10,

[3] Sottinen T. (2001), Fractional Brownian motion, random walks and binary market models, Finance Stoch. 5, 343–355,

Wiesław Zięba
Instytut Matematyki, UMCS w Lublinie

Ciągi mieszane i stabilne

Niech $(\Omega, \mathcal{A}\ , P)$ będzie przestrzenią prawdopodobieństwa.

Definicja 1. Ciąg zdarzeń $\{A_n\ , n = 0, 1, ...\}$ będzie silnie mieszany z granicą a, jeżeli dla każdego zdarzenia $B \in \mathcal{A}$ mamy:

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n \cap B) = aP(B)$$

gdzie $0 < a < 1$.

Twierdzenie 1. Jeżeli $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ jest przestrzenią prawdopodobieństwa, a ciąg zdarzeń $A_n, n = 0, 1, ...$ jest silnie mieszany z granicą a wtedy:

$$\lim Q(A_n) = a$$

zachodzi dla każdej miary prawdopodobieństwa Q na $\sigma-$ciele $\mathcal{A}$, która jest absolutnie ciągła względem miary P (tzn. dla zdarzenia $A \in \mathcal{A}$ mamy: $P(A) = 0 \Longrightarrow Q(A) = 0$).

Definicja 2. Ciąg zmiennych losowych η_n $(n = 1, 2, ...)$ nazywamy ciągiem mieszanym z graniczną funkcją rozkładu $F(x)$, jeśli dla każdego $B \in \mathcal{A}$ z $P(B) > 0$ oraz dla każdego x, który jest punktem ciągłości $F(x)$ mamy:

$$\lim_{n\to\infty} P(\eta_n < x \mid B) = F(x)\,.$$

Jedną z podstawowych własności ciągów mieszanych podaje następujące twierdzenie:

Twierdzenie 2. Niech $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n, ...$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych na przestrzeni prawdopodobieństwa $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Jeśli istnieje ciąg C_n liczb rzeczywistych oraz ciąg D_n liczb dodatnich taki, że $\lim D_n = +\infty$ i

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{\zeta_n - C_n}{D_n} < x\right) = F(x)$$

dla pewnej dystrybuanty F , gdzie $\zeta_n = \xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_n$, $(n = 1, 2, ...)$ to

$$\lim_{n\to\infty} Q\left(\frac{\zeta_n - C_n}{D_n} < x\right) = F(x)$$

dla dowolnej miary prawdopodobieństwa Q, która jest absolutnie ciągła względem miary P.

Ciąg zdarzeń $\{A_n,\, n = 0, 1, ...\}$ nazywamy ciągiem stabilnym jeżeli granica

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n \cap B) = Q(B)$$

istnieje dla każdego zdarzenia $B \in \mathcal{A}$. Funkcja $Q(B)$ jest ograniczoną miarą na $\mathcal{A}$, która jest absolutnie ciągła względem miary P, a stąd

$$Q(B) = \int_B \alpha dP$$

dla dowolnego $B \in \mathcal{A}$, gdzie $\alpha = \alpha(\omega)$ jest mierzalną funkcją na Ω taką, że $0 \le \alpha(\omega) \le 1$. Funkcję $\alpha(\omega)$ nazwiemy lokalną gęstością stabilnego ciągu zdarzeń $\{A_n\}$. W szczególności, gdy lokalna gęstość jest stała, tzn. $\alpha(\omega) = \alpha$, wtedy $Q(B) = \alpha P(B)$ dla każdego $B \in \mathcal{A}$, tzn.

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n \cap B) = \alpha P(B)$$

a więc ciąg ten jest ciągiem mieszanym.

Wprowadzimy teraz pojęcie stabilnego ciągu zmiennych losowych. Ciąg $\xi_n = \xi_n(\omega)$ będzie nazwany ciągiem stabilnym jeżeli dla każdego zdarzenia B z $P(B) > 0$ warunkowa dystrybuanta zmiennej losowej ξ_n względem zdarzenia B dąży do granicznej dystrybuanty, tzn.

$$\lim_{n\to\infty} P(\xi_n < x \mid B) = F_B(x)$$

dla każdego x , który jest punktem ciągłości dystrybuanty $F_B(x)$.

Ciąg elementów losowych przyjmujących wartości w przestrzeni metrycznej (S, ρ), jest stabilny jeśli

$$\lim_{n\to\infty} P(\xi_n \in A \mid B) = \mu_B(A)$$

dla każdego $A \in \mathcal{B}_S$, który jest zbiorem ciągłości miary ($\mu_B(\partial A) = 0$).

Jeśli rodzina miar $\{\mu_B, B \in \mathcal{A}, P(B) > 0\}$ spełnia warunki:

I) $P(\bigcup\limits_{k=1}^{n} B_k)\mu_{(\bigcup\limits_{k=1}^{n} B_k)}(A) = \sum\limits_{k=1}^{n} P(B_k)\mu_{B_k}(A)$ dla $B_i \cap B_j = \emptyset$ przy $i \neq j$

II) Jeśli $\mu_B(A) > 0$ to istnieje $B' \subset B$ takie, że $\mu_B(A) = 1$

to istnieje element losowy ξ taki, że $\xi_n \xrightarrow{P} \xi, n \to \infty$.

Ponadto pokażemy, że jeśli miary μ_B spełniają pewne warunki, to istnieje stabilny ciąg generujący tę rodzinę miar.

Tomasz Żak
Instytut Matematyki i Informatyki, Politechnika Wrocławska

Zespolony hiperboliczny ruch Browna: jądro Poissona i funkcja Greena kul

Rozważmy kulę jednostkową w C^n z metryką Bergmana. Jest to jeden z możliwych modeli zespolonej przestrzeni hiperbolicznej. W tej przestrzeni operator Laplace'a-Beltramiego

$$\Delta_{LB} = 4(1 - |z|^2) \sum_{j,k=1}^{n} (\delta_{jk} - z_j \bar{z}_k) \frac{\partial^2}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}$$

jest generatorem pewnego procesu stochastycznego — zespolonego, hiperbolicznego ruchu Browna.

W przypadku rzeczywistych przestrzeni hiperbolicznych T. Byczkowski i J. Małecki opisali ostatnio w pracy [1] jądro Poissona i funkcję Greena kul w terminach wielomianów Gegenbauera i funkcji hipergeometrycznej.

Okazuje się, że podobną metodą można wyznaczyć jądro Poissona i funkcję Greena kul w przypadku przestrzeni zespolonych. Otrzymuje się wówczas rozwinięcie szeregowe względem wielomianów Jacobiego.

Wcześniej globalne jądro Poissona kuli jednostkowej w C^n (tzn. jądro Poissona-Szegö) opisał metodami analitycznymi G.B. Folland w pracy [2].

Bibliografia

[1] T. Byczkowski, J. Małecki, *Poisson kernel and Green funtion of the ball in real hyperbolic spaces*, preprint 2005
[2] G.B. Folland *Spherical harmonic expansion of the Poisson-Szegö kernel for the ball*, Proc. Amer. Math. Soc. Vol. 47/2, 1975