Joanna Karłowska-Pik
Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu

Procesy o przyrostach blokowo stowarzyszonych

Zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots, X_n$ są *stowarzyszone*, jeśli

$$\mathrm{Cov}(f(X_1, \ldots, X_n), g(X_1, \ldots, X_n)) \geqslant 0$$

dla wszystkich par funkcji $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ niemalejących po współrzędnych, dla których powyższa kowariancja istnieje (Esary, Proschan i Walkup [2]). Można pokazać, że niezależne zmienne losowe są stowarzyszone. W szczególności każdy proces stochastyczny $\{X_t\}_{t \geqslant 0}$ o przyrostach niezależnych ma przyrosty stowarzyszone w sensie Glassermana [3], tj. dla dowolnego wyboru punktów $0 \leqslant t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ różnice

$$\Delta_1 = X_{t_1} - X_0, \quad \Delta_2 = X_{t_2} - X_{t_1}, \quad \ldots, \quad \Delta_n = X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$$

są stowarzyszonymi zmiennymi losowymi.

Ta prosta i naturalna relacja nie jest już prawdziwa, gdy badamy procesy o wartościach w $\mathbb{R}^d$, $d \geqslant 2$. Celem naszych badań było więc takie zmodyfikowanie pojęcia stowarzyszenia, żeby każdy proces o wartościach w $\mathbb{R}^d$, $d \geqslant 2$, i przyrostach niezależnych miał przyrosty stowarzyszone w nowym sensie.

Rozważamy rodzinę $\mathbf{X} = \{X_i, i \in I\}$ rzeczywistych zmiennych losowych indeksowanych skończonym zbiorem indeksów $I = \bigcup_{k=1}^n I_k$, gdzie I_k są niepuste i parami rozłączne. Oznaczamy przez $X(I_k)$ wektor o składowych $\{X_i, i \in I_k\}$. Rodzinę $\mathbf{X}$ nazywamy *stowarzyszoną pomiędzy blokami*, jeśli dla wszystkich niemalejących funkcji $f_k : \mathbb{R}^{|I_k|} \to \mathbb{R}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, wektor losowy

$$(f_1(X(I_1)), f_2(X(I_2)), \ldots, f_n(X(I_n)))$$

jest stowarzyszony, tj. dla wszystkich niemalejących funkcji $g, h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$\mathrm{Cov}(g(f_1(X(I_1)), \ldots, f_n(X(I_n)), h((f_1(X(I_1)), \ldots, f_n(X(I_n)))) \geqslant 0,$$

o ile powyższa kowariancja istnieje.

Blokowe stowarzyszenie ma proste charakteryzacje dla pewnych klas wektorów losowych, np. w przypadku wektorów o wielowymiarowym rozkładzie normalnym jest równoważne nieujemności współczynników o indeksach nienależących do jednego bloku w macierzy kowariancji. Natomiast zastosowane do przyrostów procesu stochastycznego w klasie wielowymiarowych procesów gaussowskich jest równoważne z supermodularnością (w czasie) funkcji kowariancji.

Istnieją przykłady ciągów wektorów losowych, które są stowarzyszone pomiędzy blokami, a nie są słabo stowarzyszone w sensie Burtona, Dabrowskiego i Dehlinga [1]. W szczególności centralne twierdzenie graniczne z pracy [1] pozostaje prawdziwe przy osłabieniu założeń do stowarzyszenia pomiędzy blokami.

Wyniki zostały otrzymane wspólnie z Adamem Jakubowskim.

Bibliografia

[1] R. M. Burton, A. R. Dabrowski, H. Dehling, *An invariance principle for weakly associated random vectors*, Stochastic Process. Appl. 23 (1986), 301–306.

[2] J. D. Esary, F. Proschan, D. W. Walkup, *Association of random variables, with applications*, Ann. Math. Statist. 38 (1967), 1466–1474.

[3] P. Glasserman, *Processes with associated increments*, J. Appl. Probab. 29 (1992), 313–333.

[4] A. Jakubowski, J. Karłowska-Pik, *Processes with block-associated increments*, w przygotowaniu.