Tadeusz Kulczycki
Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk, Wrocław,
Instytut Matematyki i Informatyki Politechniki Wrocławskiej

Jawny wzór na gęstość prawdopodobieństwa przejścia dla procesu Cauchy'ego zabitego przy wyjściu z półprostej

W niniejszym referacie omówiony jest pewien wynik z artykułu *Spectral properties of the Cauchy process on half-line and interval* [1].

Niech X_t będzie jednowymiarowym procesem Cauchy'ego, tzn. symetrycznym procesem α-stabilnym na R dla $\alpha = 1$. Gęstość prawdopodobieństwa przejścia dla procesu Cauchy'ego X_t dana jest wzorem

$$p(t,x,y) = \frac{1}{\pi}\frac{t}{t^2+(x-y)^2}.$$

Przez $\tau_{(0,\infty)} = \inf\{t \geqslant 0 : X_t \notin (0,\infty)\}$ oznaczamy czas pierwszego wyjścia procesu X_t z półprostej. Przez

$$p_{(0,\infty)}(t,x,y) = p(t,x,y) - E^x\left(p(t-\tau_{(0,\infty)}, X(\tau_{(0,\infty)}), y);\, \tau_{(0,\infty)} < t\right)$$

oznaczamy gęstość prawdopodobieństwa przejścia dla procesu Cauchy'ego zabitego przy wyjściu z półprostej. Gęstość ta spełnia:

$$P^x(X_t \in A;\, \tau_{(0,\infty)} > t) = \int_A p_{(0,\infty)}(t,x,y)\,dy.$$

W pracy [1] otrzymaliśmy następujacy jawny wzór na $p_{(0,\infty)}(t,x,y)$.

$$p_{(0,\infty)}(t,x,y) = \frac{1}{\pi}\frac{t}{t^2+(x-y)^2} - \frac{1}{xy}\int_0^t \frac{f(\frac{s}{x})f(\frac{t-s}{y})}{\frac{s}{x}+\frac{t-s}{y}}\,ds, \qquad t,x,y>0, \tag{1}$$

gdzie

$$f(s) = \frac{1}{\pi}\frac{s}{1+s^2}\exp\left(\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\log(s+w)}{1+w^2}\,dw\right), \qquad s>0.$$

Korzystając ze wzoru (1) można obliczyć wzór na rozkład czasu pierwszego wyjścia X_t z półprostej $(0,\infty)$:

$$P^x(\tau_{(0,\infty)} \in dt) = \frac{1}{\pi}\frac{x}{t^2+x^2}\left(\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\log(\frac{t}{x}+w)}{1+w^2}\,dw\right)dt. \tag{2}$$

Wzór (2) jest od dawna znany. Został udowodniony przez D. A. Darlinga w 1956 roku w pracy [2]. Wzór (1) nie był do tej pory znany.

Wzór (1) jest analogiczny do podobnego wzoru dla jednowymiarowego ruchu Browna, dla którego analogiczna wielkość dana jest wzorem

$$p^B_{(0,\infty)}(t,x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-(x-y)^2/(2t)} - \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-(x+y)^2/(2t)}.$$

Dla ruchu Browna wzór ten udowadnia się korzystając z zasady odbicia. Dla procesu Cauchy'ego nie można skorzystać z zasady odbicia. Wzór (1) udowadniamy korzystając z innych bardziej skomplikowanych metod. Mianowicie w pracy [1] znajdujemy jawny wzór na uogólnione funkcje własne ψ_λ dla półgrupy procesu Cauchy'ego zabitego przy wyjściu z półprostej:

$$\psi_\lambda(x) = \sin(\lambda x + \frac{\pi}{8}) - \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \int_0^\infty \frac{t}{1+t^2} \exp\left(-\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\log(t+s)}{1+s^2}\, ds\right) e^{-t\lambda x}\, dt.$$

Następnie korzystamy ze wzoru $p_{(0,\infty)}(t,x,y) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \psi_\lambda(x)\psi_\lambda(y) e^{-\lambda t} d\lambda$, również udowodnionego w [1].

Bibliografia

[1] T. Kulczycki, M. Kwaśnicki, J. Małecki, A. Stos, *Spectral properties of the Cauchy process on half-line and interval*, Proc. Lond. Math. Soc. (3), przyjęta do druku (2010).

[2] D. A. Darling, *The maximum of sums of stable random variables*, Trans. Amer. Math. Soc. 83 (1956), 164–169.