Adam Osękowski
Uniwersytet Warszawski
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Instytut Matematyki

Nierówności maksymalne dla semimartyngałów i całek stochastycznych

Nierówności maksymalne stanowią ważne narzędzie do badania i porównywania wielkości procesów stochastycznych. Załóżmy, że $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ jest zupełną przestrzenią probabilistyczną, wyposażoną w filtrację $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$ taką, że $\mathcal{F}_0$ zawiera wszystkie zbiory o prawdopodobieństwie 0. Niech $X = (X_t)$ będzie rzeczywistym adaptowanym semimartyngałem o prawostronnie ciągłych trajektoriach posiadających granice lewostronne, a $Y = (Y_t)$ będzie całką z H względem X:

$$Y_t = H_0 X_0 + \int_{0+}^{t} H_s \mathrm{d}X_s, \qquad t \geqslant 0,$$

gdzie H jest pewnym prognozowalnym procesem o wartościach w przedziale $[-1, 1]$. Niech $X^* = \sup_{t\geqslant 0} |X_t|$ oznacza dwustronną funkcję maksymalną procesu X.

Pojawia się wiele naturalnych pytań dotyczących porównywania momentów czy też ogonów X oraz Y w terminach ich funkcji maksymalnych. W szczególności, mogą nas również interesować najlepsze stałe w rozważanych oszacowaniach. Punktem wyjścia jest praca Burkholdera [1], w której wprowadzono ogólną metodę służącą do badania problemów tego typu i udowodniono, przy oznaczeniach jak wyżej, iż

$$\sup_{t\geqslant 0} ||Y_t||_1 \leqslant \gamma ||X^*||_1,$$

gdzie $\gamma = 2,536\ldots$ jest rozwiązaniem równania

$$\gamma - 3 = -\exp\Big(\frac{1-\gamma}{2}\Big).$$

Dodatkowo wykazano, iż stałej γ nie można zastąpić mniejszą.

Technika Burkholdera polega na wyznaczeniu rozwiązania pewnego problemu brzegowego związanego z badanym oszacowaniem. Metoda ta jest uniwersalna (w tym sensie, iż jeżeli wiadomo skądinąd, iż dana nierówność zachodzi, to można ją wykazać używając tej techniki), ponadto dopuszcza szereg wzmocnień i uogólnień: na przykład, można nią badać oszacowania dla jednostronnej funkcji maksymalnej $\sup_{t\geqslant 0} X_t$; rozważać semimartyngały o wartościach w przestrzeniach Hilberta; wyznaczać optymalne stałe w nierównościach dla procesów o ciągłych trajektoriach; dowodzić oszacowania dla procesów X, Y przy założeniu silnej dominacji. Celem odczytu jest zaprezentowanie tej metody oraz ciekawych wyników, do których prowadzi.

Bibliografia

[1] D. L. Burkholder, *Sharp norm comparison of martingale maximal functions and stochastic integrals*, w: Proceedings of the Norbert Wiener Centenary Congress, Proc. Sympos. Appl. Math. 52, Amer. Math. Soc., Providence, 1997, 343–358.