Paweł Stano
Delft Center for Systems and Control, Delft University of Technology

Alpha Particle Filter dla nieliniowych stochastycznych układów dynamicznych z saturacją

Wstęp

Wraz ze wzrostem mocy obliczeniowej współczesnych komputerów nieustannie rośnie zainteresowanie nieparametrycznymi metodami filtrowania *Stochastycznych Układów Dynamicznych* (SUD). Nieparametryczny filtr ma na celu rozwiązanie nieskończeniewymiarowego problemu estymacji gęstości rozkładu prawdopodobieństwa. Jednym z najskuteczniejszych nieparametrycznych filtrów jest *Particle Filter* (PF), który jest obecny w środowisku naukowym od lat dziewięćdziesiątych dwudziestego wieku [1]. PF aproksymuje gęstość stanów danego układu za pomocą skończonego zbioru punktów i wag. Punkty te próbkuje się według zasady *Importance Sampling*, natomiast wagi otrzymuje się stosując twierdzenie Bayesa. Ponieważ PF bazuje na aproksymacji typu Monte Carlo, może on potrzebować dużej ilości próbek do osiągnięcia dokładnej estymacji. To podnosi koszty obliczeniowe algorytmu, co zmniejsza jego stosowalność do problemów typu on-line. Wybór odpowiedniej *Importance Density* (ID) może znacznie zredukować koszty obliczeniowe filtra, dlatego jest to jeden z kluczowych otwartych problemów związanych z PF.

Różne metody konstrukcji ID zaproponowano w ciągu ostatnich lat [2], ale, według wiedzy autora, jak dotąd nie ma żadnych rozwiązań problemu próbkowania odnoszących się do saturowanych procesów. Ta praca ma na celu wypełnienie tej luki poprzez zaproponowanie αPF.

PF: Podstawowy Algorytm

Rozważmy nieliniowy SUD zadany przez:

$$x_{k+1} = f_k(x_k, w_k), \tag{1}$$

$$y_k = h_k(x_k, v_k), \tag{2}$$

gdzie w_k i v_k są niezależnymi zmiennymi losowymi o dowolnym rozkładzie, f_k jest funkcją nieliniową, która opisuje ewolucję stanów systemu, a h_k jest funkcją nieliniową, która wiąże obserwacje ze stanami układu. Tak zdefiniowany układ jest Ukrytym Procesem Markowa. W celu estymacji gęstości stanów systemu stosujemy PF, który jest rekurencyjnym algorytmem zdefiniowanym następująco: Dla każdego czasu k filtr porównuje obserwację y_k z poprzednią estymatą stanu $\left\{\left(x_{k-1}^i, w_{k-1}^i\right)\right\}_{i=1}^N$, po czym zwraca nową estymatę gęstości $p\left(x_k|y_k\right)$. Estymacja przebiega w dwóch etapach. W pierwszym kroku N próbek jest losowanych z ID

$$x_k^i \sim q\left(\cdot|x_{k-1}^i, y_{1:k}\right) \quad 1 \leqslant i \leqslant N,$$

następnie wagi są uaktualniane zgodnie z twierdzeniem Bayesa:

$$w_k^i \propto w_{k-1}^i \frac{p\left(y_k|x_k^i\right) p\left(x_k^i|x_{k-1}^i\right)}{q\left(x_k^i|x_{k-1}^i, y_{1:k}\right)}, \tag{3}$$

i na końcu normalizowane. Zbiór $\{(x_k^i, w_k^i)\}_{i=1}^N$ jest zadaną estymatą gęstości $p(x_k|y_k)$, którą można zrekonstruować poprzez wzór:

$$p(x_k|y_k) \approx \sum_{i=1}^{N} w_k^i \delta\left(x_k - x_k^i\right).$$

α Particle Filter

αPF został zaprojektowany dla procesów saturowanych, tj. takich procesów, dla których funkcja f_k przyjmuje formę

$$f_k(x_k, w_k) = \min\left(\tilde{f}_k(x_k, w_k), C(x_k)\right),$$

gdzie $\tilde{f}_k$ jest nieujemną i ciągłą funkcją zależną od stanów x_k i zmiennej losowej w_k, a C jest dodatnią i deterministyczną funkcją zależną tylko od stanów x_k. Proponowany αPF korzysta ze specjalnie skonstruowanej ID, która odzwierciedla saturowaną strukturę procesu. Proponowana gęstość $\tilde{q}$ posiada następujące właściwości:

(a) $\tilde{q}$ jest absolutnie ciągła względem $p(\cdot|x_{k-1})$,

(b) $\tilde{q}$ jest proporcjonalna do $\tilde{f}$ na zbiorze $\tilde{A}$, który jest zdefiniowany jako maksymalny zbiór $A \subset dom(\tilde{q})$ taki, ze $\tilde{q}_A$ jest miarą absolutnie ciągłą.

Nieliniowości w modelu obserwacyjnym h_k związane z występowaniem saturacji są uwzględnione przy konstrukcji $\tilde{q}$ dzięki użyciu funkcji α, która zależy od ostatniej obserwacji y_k oraz od poprzedniego stanu x_{k-1}. Funkcja α odzwierciedla poziom zaufania, jaki filtr pokłada w obserwacji pochodzącej od procesu niesaturowanego. Wprowadzenie tej funkcji pozwala na odseparowanie losowych szumów obserwacyjnych od błędów spowodowanych saturacją.

Zarys prezentacji

Dla potrzeb prezentacji będę rozważał jednowymiarową przestrzeń stanów $X \ni x_k$ i jednowymiarową przestrzeń obserwacji $Y \ni y_k$. Prezentacja będzie się składać z następujących punktów:

1. Przedstawienie problemu saturacji,
2. Konstrukcja αPF,
3. Wyprowadzenie statystycznych właściwości wag $\tilde{w}_k^i$ obliczanych według wzoru (3). Porównanie tych właściwości z właściwościami wag otrzymanych przez zastosowanie standardowych PF (SIR PF [1,2]),
4. Parę uwag na temat numerycznych właściwości nowego filtru.

Bibliografia

[1] Gordon et al., *Novel approach to nonlinear/non-Gaussian Bayesian state estimation*, Proc. IEE-F 140 (1993), 107–113.

[2] Arulampalam et al., *A tutorial on particle filters for online nonlinear/non-Gaussian Bayesian tracking*, IEEE Trans. Signal Process. 50 (2002), 174–188.