Zbigniew S. Szewczak
Wydział Matematyki i Informatyki UMK, Toruń

Słabe prawo wielkich liczb dla maksimów

Niech $\{X_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, $\mathbb{N}=\{1,2,\dots\}$, będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie (n.z.l.j.r.) określonym na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega,\mathcal{F},P)$. Połóżmy $M_n=\max_{1\leqslant k\leqslant n}|X_k|$, $n\in\mathbb{N}$ oraz niech $\|\cdot\|_p$ oznacza normę w L^p, gdzie $p>0$ jest liczbą rzeczywistą. Powiemy, że $\{X_k\}$ spełnia warunek $(*)$, jeśli

$$\sup\{x; P(|X_1|\leqslant x)<1\}=\infty. \tag{$*$}$$

Funkcja monotoniczna L jest funkcją wolno zmieniającą (f.w.z.) jeśli $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{L(2x)}{L(x)}=1$.

Twierdzenie. *Niech $\{X_k\}$ będzie ciągiem n.z.l.j.r. spełniającym warunek $(*)$ oraz $\|X_1\|_q<\infty$, $0<q<\infty$. Wówczas, następujących sześć warunków jest równoważnych*

$$\lim_{n\to\infty} nP(|X_1|>\epsilon\|M_n\|_q)=0,\qquad \forall\,\epsilon>0;$$
$$\frac{M_n}{\|M_n\|_q}\underset{P}{\to}0;$$
$$\frac{M_n}{\|M_n\|_q}\underset{L^p}{\to}0,\qquad \forall\,p\in(0,q);$$
$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^qP(|X_1|>x)}{E|X_1|^qI_{[|X_1|>x]}}=0;$$
$$E|X_1|^qI_{[|X_1|>x]}\text{ jest f.w.z.};$$
$$E(M_n^q)=nL(n)\text{ oraz }L(n)\text{ jest f.w.z.}$$

Co więcej, $L(n)\sim E|X_1|^qI_{[|X_1|>\|M_n\|_q]}$.

Niech $\{X_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem ściśle stacjonarnym, $\sigma_n^2=\mathrm{Var}(S_n)$ oraz

$$\varphi_n=\sup_{J\in\mathbb{N}}\Big[|P(B|A)-P(B)|\,;\,A\in\mathcal{F}_0^{J-1},B\in\mathcal{F}_{J-1+n}^{\infty},P(A)>0\Big],$$

gdzie $\mathcal{F}_J^L$, $0\leqslant J\leqslant L\leqslant\infty$, oznacza σ-algebrę generowaną przez zmienne losowe $(X_k, J\leqslant k\leqslant L)$.

Wniosek. *Załóżmy, że $\{X_k\}$ jest scentrowanym ciągiem ściśle stacjonarnym, $EX_1^2I_{[|X_1|>x]}$ jest f.w.z., $\varphi_1<1$ oraz $\varphi_n\to0$. Wówczas, $\{\sigma_n^{-1}S_n\}$ posiada jedynie scentrowane granice gaussowskie.*

Bibliografia

[1] I. Berkes, W. Philipp, *Limit theorems for mixing sequences without rate assumptions*, Ann. Probab. 26 (1998), 805–831.

[2] P. Hitczenko, S. Kwapień, W. V. Li, G. Schechtman, T. Schlumprecht, J. Zinn, *Hypercontractivity and comparison of moments of iterated maxima and minima of independent random variables*, Electron. J. Probab. 3 (1998), no. 2, 1–26.

[3] M. G. Hahn, J. Kuelbs, J. D. Samur, *Asymptotic normality of trimmed sums of ϕ-mixing random variables*, Ann. Probab. 15 (1987), 1395–1418.

[4] I. A. Ibragimov, Yu. A. Linnik, *Independent and Stationary Sequences of Random Variables*, Wolters-Noordhoff Publishing, Groningen, 1971.

[5] A. Jakubowski, *A note on the invariance principle for stationary φ-mixing sequences: tightness via stopping times*, Revue Roumaine Math. Pures Appl. 33 (1988), 407–412.

[6] M. Peligrad, *Asymptotic results for φ-mixing sequences*, Contemp. Math. 149 (1993), 163–169.

[7] Z. S. Szewczak, *A weak law of large numbers for maxima*, wysłane do publikacji (2009).