Tomasz Tkaliński
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego

Problem efektywnej wyceny

W 1999 roku w pracy [2] sformułowano problem zabezpieczenia kwantylowego: w danym modelu rynku, dla pewnej ustalonej wypłaty $H \geqslant 0$ znajdź strategię inwestycyjną minimalizującą ryzyko (np. prawdopodobieństwo straty) ponoszone przy zabezpieczaniu H, przy ograniczeniu $\tilde{V}_0$ na wartość początkową zabezpieczenia.

W ostatniej dekadzie wielu autorów (m.in. [1], [3], [4], [5], [6]) uogólniło sformułowanie powyższego problemu, zastępując prawdopodobieństwo straty bardziej wyrafinowanymi miarami ryzyka.

Najmocniejszy wynik pochodzi z pracy [7]. Na przestrzeni $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ z filtracją $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ w wolnym od arbitrażu modelu rynku z procesem cen akcji S będącym nieujemnym, adaptowanym semimartyngałem, rozwiązuje się zagadnienie

$$\inf_{\xi\in\mathcal{A}_{\tilde{V}_0}} \rho(-(\xi_T S_T - H)^-), \tag{1}$$

gdzie $\mathcal{A}_{\tilde{V}_0}$ oznacza zbiór samofinansujących strategii o nieujemnym bogactwie, których wartość początkowa nie przekracza $\tilde{V}_0 > 0$, a $\rho : L^1 \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ jest wypukłą, półciągłą z dołu miarą ryzyka, skończoną i ciągłą w pewnym punkcie.

Kluczowym krokiem w podejściu do problemu (1) jest rozwiązanie pomocniczego zagadnienia

$$\inf_{\phi\in\mathcal{R}_0} \rho((\phi - 1)H), \tag{2}$$

gdzie $\mathcal{R}_0 = \{\phi : \Omega \to [0,1],\ \phi$ — $\mathcal{F}_T$-mierzalne, $\sup_{\mathbb{P}^*\in\mathcal{P}_\sigma} E_{\mathbb{P}^*}\phi H \leqslant \tilde{V}_0\}$, przy czym $\mathcal{P}_\sigma$ oznacza zbiór miar probabilistycznych równoważnych $\mathbb{P}$, przy których proces cen akcji S jest σ-martyngałem.

Najpierw pokażemy przykład, problemu typu (1) skonstruowany w modelu Blacka Scholesa, którego nie można rozwiązać za pomocą wyników pochodzących z pracy [7].

Następnie sformułujemy ogólne zagadnienie efektywnej wyceny

$$\inf_{\phi\in\mathcal{R}_{A,\mathcal{Q},\alpha}} F(A\phi), \tag{3}$$

$\mathcal{R}_{A,\mathcal{Q},\alpha} = \{\phi : \Omega \to [0,1],\ \phi$ — $\mathcal{F}_T$-mierzalne, $\sup_{\mathbb{Q}\in\mathcal{Q}} E_{\mathbb{Q}} A(1-\phi) \leqslant \alpha(\mathbb{Q})\}$, gdzie $A \in \mathcal{L}(L^\infty, L^1)$, $\mathcal{Q}$ jest pewną rodziną miar probabilistycznych absolutnie ciągłych względem $\mathbb{P}$, α pewną ograniczoną funkcją na $\mathcal{Q}$, a $F : L^1 \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ wypukłą, półciągłą z dołu funkcją niemalejącą względem porządku $\geqslant$ wyznaczonego przez stożek L^1_+.

Pokażemy, że problem (2) jest szczególnym przypadkiem (3). Naszkicujemy nową metodę rozwiązywania problemu (3), w której otrzymujemy rozwiązanie, jako granicę p.n. ciągu rozwiązań pomocniczych. Zaprezentujemy zastosowanie nowej metody do problemu, którego nie można rozwiązać za pomocą dotychczas znanych wyników.

Bibliografia

[1] M. Baran, *Quantile hedging on markets with proportional transaction costs*, Appl. Math. (Warsaw) 30 (2003), 193–208.

[2] H. Föllmer, P. Leukert, *Quantile hedging*, Finance Stoch. 3 (1999), 251–273.

[3] H. Föllmer, P. Leukert, *Efficient hedging: cost versus shortfall risk*, Finance Stoch. 4 (2000), 117–146.

[4] I. Karatzas, J. Cvitanić, *Generalized Neyman-Pearson lemma via convex duality*, Bernoulli 7 (2001), 79–97.

[5] M. Kirch, *Efficient hedging in incomplete markets undel model uncertainty*, (2001)

[6] Y. Nakano, *Efficient hedging with coherent risk measure*, J. Math. Anal. Appl. 293 (2004), 345–354.

[7] B. Rudloff, *Convex hedging in incomplete markets*, Appl. Math. Finance 14 (2007), 437–452.