Jacek Wesołowski
Politechnika Warszawska, Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych

Kwadratowe harnessy i wielomiany Askey–Wilsona

Niech $X = (X_t)_{t \geqslant 0}$ będzie rzeczywistym, całkowalnym z kwadratem procesem stochastycznym, dla którego

$$\mathbb{E}\, X_t = 0 \quad \text{oraz} \quad \mathbb{E}\, X_s X_t = s, \quad 0 \leqslant s \leqslant t.$$

Niech $\mathcal{F}_{s,u} = \sigma(X_t,\, t \notin (s,u))$, $0 \leqslant s < u$. Proces X nazywamy kwadratowym harnessem, jeśli dla dowolnych $0 \leqslant s < t < u$

$$\mathbb{E}(X_t | \mathcal{F}_{s,u}) = aX_s + bX_u \tag{1}$$

oraz

$$\mathbb{E}(X_t^2 | \mathcal{F}_{s,u}) = AX_s^2 + BX_sX_u + CX_u^2 + DX_s + EX_u + F \tag{2}$$

gdzie $a, b, A, \ldots, F$ są nielosowe (zależą od s, t, u).

Przykłady: procesy Lévy'ego–Meixnera (klasa ta obejmuje np. proces Wienera, proces Poissona, czy proces gamma), wolny ruch Browna, procesy q-gaussowskie, wolny proces Poissona, procesy q-Meixnera ([3]), czy procesy bi-Poissona ([2]).

Okazuje się, że funkcje $A, \ldots, F$ są wyznaczone jednoznacznie przez pięć stałych rzeczywistych. Stałe te w zasadzie jednoznacznie wyznaczają proces X. W szczególności okazało się, że wszystkie znane procesy tego typu są procesami markowskimi ([1]).

W opisie i konstrukcji kwadratowych harnessów intensywnie wykorzystywane są wielomiany ortogonalne związane z rozkładami brzegowymi i prawdopodobieństwami przejścia. Wydaje się, że związek między kwadratowymi harnessami a wielomianami ortogonalnymi ma głęboki charakter. Wiodącą rolę odgrywa tu rodzina wielomianów Askey–Wilsona, uważana przez specjalistów za *najszerszą rozsądną* rodzinę wielomianów ortogonalnych. W pewnym sensie własności algebraiczne, ukryte w założeniach (1) i (2), znajdują swoje odbicie w podstawowych własnościach wspomnianej rodziny wielomianów.

W referacie, opartym na pracy [4], przedstawione zostaną właśnie związki wielomianów Askey–Wilsona z kwadratowymi harnessami.

Bibliografia

[1] W. Bryc, W. Matysiak, J. Wesołowski, *Quadratic harnesses, q-commutations and orthogonal martingale polynomials*, Trans. Amer. Math. Soc. 359 (2007), 5449–5483.

[2] W. Bryc, W. Matysiak, J. Wesołowski, *The Bi-Poisson process: a quadratic harness*, Ann. Probab. 36 (2008), 623–646.

[3] W. Bryc, J. Wesołowski, *Conditional moments of q-Meixner processes*, Probab. Theory Related Fields 131 (2005), 415–441.

[4] W. Bryc, J. Wesołowski, (2010) *Askey–Wilson polynomials, quadratic harnesses and martingales*, Ann. Probab., przyjęta do druku.