dr Marian Liskowski
Politechnika Poznańska
Wydział Elektryczny, Instytut Matematyki
E-mail: `marian.liskowski@put.poznan.pl`

Aproksymacja funkcjami gładkimi w przestrzeniach Sobolewa „z mieszanymi funkcjami”

Niech A oraz B będą dowolnymi otwartymi i ograniczonymi przedziałami w $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ i niech $\Omega = A \times B$. Niech funkcje $\varphi : A \times \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ i $\varphi : B \times \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ spełniają następujące warunki:

1. φ oraz ψ są mierzalne względem pierwszej zmiennej przy ustalonej wartości drugiej zmiennej;
2. $\varphi(t, u)$ oraz $\psi(t, u)$ są parzyste, wypukłe i ciągłe w zerze ze względu na drugą zmienną, $\varphi(t, 0) = \psi(t, 0) = 0$, $\varphi(t, u) > 0$ i $\psi(t, u) > 0$, jeśli $u \neq 0$ dla prawie każdego t;
3. $\int_A \varphi(t, u)\, dt < \infty$, $\int_B \psi(t, u)\, dt < \infty$ dla każdego u.

Definiujemy przestrzeń $L_{\varphi,\psi}(\Omega)$ jako

$$L_{\varphi,\psi}(\Omega) = \{f \in L(\Omega) : I_{\varphi,\psi}(\lambda f) < \infty \text{ dla pewnej liczby } \lambda > 0\},$$

gdzie $I_{\varphi,\psi}(f) = \int_A \varphi\big(x, \int_B \psi(y, f(x, y))\, dy\big)\, dx$.

Funkcjonał $I_{\varphi,\psi}$ jest wypukłym modularem na $L(\Omega)$.

Niech k będzie dowolną, nieujemną liczbą całkowitą i niech φ oraz ψ spełniają 1.–3. Oznaczamy symbolem $W^k_{\varphi,\psi}(\Omega)$ przestrzeń wszystkich funkcji $f \in L_{\varphi,\psi}(\Omega)$ posiadających dystrybucyjne pochodne $D^\alpha f$ do rzędu k należące do $L_{\varphi,\psi}(\Omega)$. Przestrzeń $W^k_{\varphi,\psi}(\Omega)$ nazywamy przestrzenią Sobolewa „z mieszanymi funkcjami”. Definiujemy funkcjonał

$$I^{(k)}_{\varphi,\psi}(f) = \sum_{|\alpha| \le k} \int_A \varphi\Big(x, \int_B \psi(y, D^\alpha f(x, y))\, dy\Big)\, dx$$

dla $f \in W^k_{\varphi,\psi}(\Omega)$. Funkcjonał $I^{(k)}_{\varphi,\psi}$ jest wypukłym modularem. Zbieżność $f_n \to f$ w sensie modularu oznacza, że $I^{(k)}_{\varphi,\psi}(\lambda(f_n - f)) \to 0$, $n \to \infty$ dla pewnego $\lambda > 0$.

Przedstawione zostaną rezultaty dotyczące aproksymowania za pomocą funkcji klasy C_0^∞ elementów przestrzeni $W^k_{\varphi,\psi}(\Omega)$ z wykorzystaniem modularu $I^{(k)}_{\varphi,\psi}$.