dr hab. Krystyna Twardowska
mgr Łukasz Nowak
Politechnika Warszawska, Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych

Metoda falkowa Galerkina w nieliniowej filtracji z zastosowaniem w matematyce finansowej

Zajmiemy się metodą Galerkina rozwiązywania równań nieliniowej stochastycznej filtracji. Układ równań dla nieobserwowalnego i obserwowalnego procesu z zaburzeniami będącymi procesami Wienera, sprowadzamy do stochastycznego liniowego parabolicznego równania różniczkowego cząstkowego typu Zakai. Zastosujemy teorię falek do konstrukcji biortogonalnej bazy ze zwartym nośnikiem, aby otrzymać aproksymacje rozwiązania problemu. Przy takim wyborze bazy, metody numeryczne rozwiązywania równania Zakai są bardziej efektywne niż dla klasycznej metody Galerkina. Poprawia się wskaźnik uwarunkowania zadania. Podajemy twierdzenie o zbieżności metody ([2]). Dokładniej, niech (Ω, F, F_t, P) będzie przestrzenią prawdopodobieństwa z filtracją F_t. Rozważmy ograniczone funkcje

$$b : R^n \to R^n,\ g : R^n \to R^{n\times n},\ h : R^n \to R^m,$$

nieosobliwą macierz stałych $\sigma = (\sigma)_{i,j=1,\dots,m}$ oraz układ równań Itô

$$dX(t) = b(X(t))\,dt + g(X(t))\,dW(t),\ X(0) = X_0,\ t \ge 0, \tag{1}$$

$$dY(t) = h(X(t))\,dt + \sigma\,dV(t),\ Y(0) = 0,\ t \ge 0, \tag{2}$$

gdzie stan $X(t) \in R^n$ jest nieobserwowalnym procesem, który mamy estymować, a $Y(t) \in R^m$ jest procesem obserwacji, (W, V) są F_t-adaptowalnymi niezależnymi procesami Wienera o wartościach w $R^n \times R^m$, X_0 jest F_0 mierzalnym wektorem, niezależnym od procesów W i V. Wówczas badane w pracy równanie Zakai ma postać

$$du(t) = \widetilde{L}(Y(t))u(t)\,dt + \widetilde{B}(Y(t))u(t)\,d\overline{Y}(t),\ u(0) = u_0 \in L^2(R^n), \tag{3}$$

gdzie

$$\widetilde{L}\phi = \sum_{i=1}^{n} b^i \frac{\partial}{\partial x_i}\phi + \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_i}\phi\right),$$

$$\widetilde{B}\phi = \sigma^{-1}h\phi.$$

Konstrukcję bazy falkowej w metodzie Galerkina, w innych zagadnieniach niż filtracja, można znaleźć na przykład w książce Bramblego, Cohena i Dahmena [1] i w pracy von Petersdorffa i Schwaba ([3]). Na zakończenie pokazane zostaną zastosowania metody do problemów filtracji w matematyce finansowej.

Literatura

[1] J. H. Bramble, A. Cohen and W. Dahmen, *Multiscale Problems and Methods in Numerical Simulations*, Lectures given at the C.I.M.E. Summer School, held in Martina Franca, Italy, September 9–15, 2001, ed. C. Canuto, Lecture Notes in Math. 1825, Springer, Berlin 2003.

[2] Ł. Nowak, K. Twardowska, *Convergence of the wavelet-Galerkin method in nonlinear filtering problems*, to appear.

[3] T. von Petersdorff, C. Schwab, *Wavelet discretizations of parabolic integrodifferential equations*, SIAM J. Numer. Anal. 41 (1996), 159–180.