BANACH CENTER PUBLICATIONS
VOLUME 1

DÉGÉNÉRESCENCE DES SYSTÈMES DISCRETS ET APPLICATION À UN PROBLÈME DE COMMANDE

P. CHARRIER

Université de Bordeaux I, U.E.R. de Mathématiques et Informatique, Talence, France

Dans ce papier on démontre dans le cas discret certains résultats déjà obtenus dans le cas des systèmes différentiels avec retards (voir [2], [3], [5]). Cependant le problème de la caractérisation du premier instant de dégénérescence n'est pas résolu. On utilise la méthode introduite dans [3] pour obtenir une condition nécessaire et suffisante de dégénérescence en un multiple du retard k, puis on donne des applications de la dégénérescence à un problème de commande pour des systèmes discrets sans retard.

I. Introduction

On appelle *système discret, linéaire, autonome* avec retards une relation de récurrence dans $\mathbf{R}^n$ de la forme:

$$X(m+1) = AX(m)+\sum_{i=1}^{r} B_i X(m-ik) \tag{1}$$

où A et B_i, $i = 1, 2, \dots, r$, sont des matrices carrées $n\times n$. Un tel système admet une solution unique pour $p \geqslant 0$ dès que l'on donne une condition initiale épaisse:

$$X(i) = \varphi(i) \quad (-rk \leqslant i \leqslant 0). \tag{2}$$

DÉFINITION. Le système (1) est dit *dégénéré par rapport au sous-espace V^* en m_0* si et seulement si, pour toute condition initiale φ_i $(-rk \leqslant i \leqslant 0)$ les valeurs X_{m_0} de la solution, en m_0, sont orthogonales à V^*.

Remarques. Le problème de dégénérescence pour un système discret ne devient intéréssant que si la matrice A est inversible, ce qui est le cas si le problème discret est issu, par discrétisation, d'un système différentiel. A partir de maintenant on supposera toujours A inversible.

Comme dans le cas des systèmes différentiels, un système dégénéré en m_0 est dégénéré en tout m supérieur à m_0.

II. Condition nécessaire et suffisante de dégénérescence en un multiple de k

II.1. *Le système éclaté*:

Soit $(X(m))_{m\geqslant 0}$ une solution de (1), (2); soit p un réel >0; posons:

$$Y(j) = \begin{bmatrix} X(j) \\ X(k+j) \\ \vdots \\ X((p-1)k+j) \end{bmatrix}, \quad 0 \leqslant j \leqslant k. \tag{3}$$

Le vecteur $Y(j)$ de $\boldsymbol{R}^{np}$ vérifie alors :

$$Y(j+1) = \boldsymbol{A}\,Y(j)+\boldsymbol{B}\Phi(j), \tag{4}$$

$$Y(0) = \begin{bmatrix} X(0) \\ X(k) \\ \vdots \\ X((p-1)k) \end{bmatrix}; \quad Y(k) = \begin{bmatrix} X(k) \\ X(2k) \\ \vdots \\ X(pk) \end{bmatrix}$$

où $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ et $\Phi(j)$ sont des matrices $(np\times np)$, $(np\times nr)$ et $(nr\times n)$ données par:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} A & & & & & 0 \\ B_1 & A & & & & \\ & & \ddots & & & \\ \vdots & & & \ddots & & \\ B_r & \dots & B_2 & B_1 & A & \\ & \ddots & & & & \ddots \\ 0 & & B_r & B_2 & B_1 & A \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 & \dots & B_r \\ B_2 & \dots & B_r & \\ \vdots & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \\ B_r & & 0 & \end{bmatrix}, \quad \Phi(j) = \begin{bmatrix} \varphi(j-k) \\ \varphi(j-2k) \\ \vdots \\ \varphi(j-rk) \end{bmatrix}.$$

Réciproquement, si $y_0, y_1, \dots, y_p$ sont $(p+1)$ vecteurs de $\boldsymbol{R}^n$ et si on peut trouver $\Phi(j) = \begin{bmatrix} \varphi(j-k) \\ \vdots \\ \varphi(j-rk) \end{bmatrix}$ tel que le problème avec conditions aux deux bouts

$$Y(j+1) = \boldsymbol{A}\,Y(j)+\boldsymbol{B}\Phi(j), \tag{4}$$

$$Y(0) = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{p-1} \end{bmatrix}, \quad Y(k) = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_p \end{bmatrix} \tag{5}$$

ait une solution, alors $X(m)$, $m\geqslant -rk$ défini par (3) est une solution de (1), (2).

Donc le système (1) est dégénéré par rapport au sous-espace V^* (défini par une matrice $\boldsymbol{Q}$ dont les q colonnes forment une base de V^*) en pk si et seulement si toute solution de (4), (5) vérifie :

$$(0, 0, \dots, 0, {}^t\!Q)\,Y(k) = 0.$$

On a ainsi transformé le problème initial en l'étude d'un système avec conditions aux deux bouts où intervient un second membre Φ (ne dépendant que de la condition initiale épaisse $\varphi(j)$) qui joue le rôle d'une commande. L'étude de la contrôlabilité de ce système guidable permet d'obtenir immédiatement la CNS de dégénérescence.

II.2. *Propriétés de contrôlabilité du système éclaté et* CNS *de dégénérescence*

Soit M le sous-espace engendré par les colonnes de $(\boldsymbol{B}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}, \dots, \boldsymbol{A}^{pn-1}\boldsymbol{B})$ et soit $M^\perp$ sont orthogonal de dimension d. Soient $\boldsymbol{P}$ et $\boldsymbol{Q}$ les opérateurs de projection respectivement sur $M^\perp$ et M. On a:

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{B}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}, \dots, \boldsymbol{A}^{np-1}\boldsymbol{B}) = 0.$$

On utilise le résultat classique de contrôlabilité suivant: l'ensemble des points accessibles à partir de l'origine par le système (4) est le sous-espace M. De plus si on décompose $\boldsymbol{R}^{np}$ en somme directe de M et $M^\perp$, dans ce nouveau système de deux blocs de coordonnées (4) s'écrit :

$$\begin{cases} \boldsymbol{Q}\,Y(j+1) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{Q}\,Y(j)+\boldsymbol{C}'\boldsymbol{P}\,Y(j)+\boldsymbol{C}''\Phi(j), \\ \boldsymbol{P}\,Y(j+1) = \boldsymbol{V}\boldsymbol{P}\,Y(j), \end{cases}$$

où $\boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{C}'$ et $\boldsymbol{C}''$ sont respectivement des matrices $d\times d$, $(np-d)\times(np-d)$ et $d\times(np-d)$ et $nr\times(np-d)$. De plus la paire $(\boldsymbol{C}, \boldsymbol{C}'')$ est complètement contrôlable. On a ainsi mis en évidence la partie complètement contrôlable de (4) dans M et la partie complètement incontrôlable dans $M^\perp$. De plus,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{P}\,Y(j+1) &= \boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\,Y(j)+\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}\Phi(j) \\ &= \boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\,Y(j) \quad \text{car} \quad \boldsymbol{P}\boldsymbol{B} = 0 \end{aligned}$$

donc

$$\boldsymbol{P}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{V}\boldsymbol{P}.$$

On définit alors l'application linéaire $\boldsymbol{L}$ de $\boldsymbol{R}^{(p+1)n}$ dans $\boldsymbol{R}^d$

$$\begin{bmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_p \end{bmatrix} \mapsto \boldsymbol{P}\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{bmatrix} - \boldsymbol{V}^k\boldsymbol{P}\begin{bmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_{p-1} \end{bmatrix}.$$

On peut maintenant démontrer le lemme:

LEMME. *Pour qu'il existe une solution* $Y(j)$ *au problème "aux deux bouts"*

$$Y(j+1) = \boldsymbol{A}\,Y(j)+\boldsymbol{B}\Phi(j), \tag{4}$$

$$Y(0) = \begin{bmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_{p-1} \end{bmatrix}, \quad Y(k) = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{bmatrix} \tag{5}$$

il faut et il suffit que le vecteur $\begin{bmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_p \end{bmatrix}$ *de* $\boldsymbol{R}^{(p+1)n}$ *appartienne au noyau de* $\boldsymbol{L}$.

Condition nécessaire: Soit $Y(j)$ une solution de (4), (5), alors:

$$\boldsymbol{P}\,Y(j+1) = \boldsymbol{V}\boldsymbol{P}\,Y(j)$$

donc

$$\boldsymbol{P}\,Y(k) = \boldsymbol{V}^k\boldsymbol{P}\,Y(0)$$

ce qui entraîne:

$$L=\begin{bmatrix} y_0\\ \vdots \\ y_p\end{bmatrix}=0.$$

Condition suffisante: Il suffit de montrer l'existence d'une solution au problème:

$$(6)\qquad \begin{cases} Z(j+1)=AZ(j)+B\Phi(j),\\ Z(0)=0, \quad Z(k)=\begin{bmatrix} y_1\\ \vdots \\ y_p\end{bmatrix}-A^k\begin{bmatrix} y_0\\ \vdots \\ y_{p-1}\end{bmatrix}\end{cases}$$

en effet dans ce cas la solution (4), (5) sera donnée par:

$$Y(j)=A^jY(0)+Z(j).$$

Or d'après les résultats rappelés au début de II.2 il existe une solution au problème (6) si

$$P\left(\begin{bmatrix} y_1\\ \vdots \\ y_p\end{bmatrix}-A^k\begin{bmatrix} y_0\\ \vdots \\ y_{p-1}\end{bmatrix}\right)=0$$

or cette quantité est égale à

$$P\begin{bmatrix} y_1\\ \vdots \\ y_p\end{bmatrix}-V^kP\begin{bmatrix} y_0\\ \vdots \\ y_{p-1}\end{bmatrix}=L\begin{bmatrix} y_0\\ \vdots \\ y_p\end{bmatrix}$$

ce qui est nul par hypothèse. ■

Avant d'énoncer la condition nécessaire et suffisante définissons l'application linéaire H de $R^{(p+1)n}$ dans R^q:

$$\begin{bmatrix} y_0\\ \vdots \\ y_p\end{bmatrix}\mapsto {}^tQy_p.$$

THÉORÈME. *Le système* (1) *est dégénéré par rapport au sous-espace* V^* *en* pk *si et seulement si*

(i) $P\neq 0$,

(ii) $\ker L\subset\ker H$.

Condition suffisante: A $X(j)_{j\geqslant 0}$ solution de (1) on associe une solution $Y(j)$ de

$$Y(j+1)=AY(j)+B\Phi(j),\qquad Y(0)=\begin{bmatrix} X(0)\\ \vdots \\ X((p-1)k)\end{bmatrix},\qquad Y(k)=\begin{bmatrix} X(k)\\ \vdots \\ X(pk)\end{bmatrix},$$

donc d'après le lemme précédent $\begin{bmatrix} X(0)\\ \vdots \\ X(pk)\end{bmatrix}$ appartient au noyau de L et par hypothèse au noyau de H donc ${}^tQX(pk)=0$ pour toute solution de (1).

Condition nécessaire:

(i) $P\neq 0$ sinon le système (4) est complètement contrôlable et (1) ne peut pas être dégénéré.

(ii) Soit $\begin{bmatrix} y_0\\ \vdots \\ y_p\end{bmatrix}$ un élément du noyau de L. D'après le lemme, il existe une solution au problème (4), (5). A la solution $Y(j)$ de ce problème on fait correspondre une solution $X(j)_{j\geqslant 0}$ du système (1). Par hypothèse ${}^tQX(pk)=0$ c'est-à-dire ${}^tQy=0$, donc $\begin{bmatrix} y_0\\ \vdots \\ y_p\end{bmatrix}$ appartient au noyau de H. ■

II.3. *Le premier instant de dégénérescence*

Dans le cas des systèmes différentiels on montre que le premier instant de dégénérescence est nécessairement un multiple du retard h; on démontre en fait que si le système est dégénéré en $ph-\varepsilon$ ($\varepsilon>0$) alors il l'est en $(p-1)h$. On a pas réussi à obtenir un résultat aussi précis dans le cas discret; néanmoins on peut faire les remarques suivantes:

Dans ce chapitre nous ferons l'hypothèse: $k>2np$, qui peut se justifier si le système (1), (2) est issu d'un système différentiel après discrétisation.

Remarque 1. Si le système (1) est dégénéré en $(p-1)k$ alors les matrices $A(np\times np)$ et $B(np\times nr)$ définies en (II.1) vérifient:

$$(0,0,\ldots,0,{}^tQ)(B,AB,\ldots,A^{np-1}B)=0.$$

En effet, on considère le système (4) avec les conditions „aux deux bouts" (5) particulières: $Y(0)=Y(k)=0$. Ce problème admet au moins la solution suivante:

$$\begin{aligned} Y(0)&=0,\\ Y(1)&=AY(0)+B\Phi(0)=B\Phi(0),\\ Y(2)&=AY(1)\qquad\quad\;=AB\Phi(0),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ Y(np)&=A^{np-1}B\Phi(0),\\ Y(np+1)&=A^{np}\Phi(0)+B\Phi(np),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ Y(2np)&=A^{2np}B\Phi(0)+A^{np-1}B\Phi(np)+\ldots+B\Phi(2np-1),\end{aligned}$$

où l'on prend $\Phi(j)=\alpha_j\Phi(0)$, $j=np,\ldots,2np-1$, et où les α_j sont choisis tels que $Y(2np)=0$ (grâce à Cayley–Hamilton). Cette solution $Y(i)$ vérifie donc:

$$(0,0,\ldots,0,{}^tQ)\,Y(j)=0,\qquad 0\leqslant j\leqslant k,$$

donc

$$(0,0,\ldots,0,{}^tQ)\big(B\Phi(0),AB\Phi(0),\ldots,A^{np-1}B\Phi(0)\big)=0\qquad\forall\Phi(0)\in R^n$$

donc

$$(0, 0, \ldots, 0, {}^tQ)(B, AB, \ldots, A^{np-1}B) = 0.$$

Remarque 2. Si le système (1) est dégénéré en $pk-2np$ alors il est dégénéré en $(p-1)k$.

Démonstration. Si $Y(m)$ est une solution du système (4) alors:

$$Y(k-j) = A^{-j}Y(k)-A^{-j}B\Phi(k-1)- \ldots -A^{-1}B\Phi(k-j)$$

en utilisant une méthode analogue à celle de la remarque 1, on peut montrer que:

$$(0, 0, \ldots, 0, {}^tQ)(A^{-1}B, A^{-2}B, \ldots, A^{-np}B) = 0$$

donc puisque (1) est dégénéré pour tout m supérieur à $pk-2np$:

$$(0, 0, \ldots, 0, {}^tQ)\,Y(k-j) = (0, 0, \ldots, 0, {}^tQ)A^{-j}Y(k) = 0, \quad 0 \leqslant j \leqslant 2np,$$

et donc à cause de Cayley–Hamilton

$$(0, 0, \ldots, 0, {}^tQ)\,Y(m) = 0, \quad 0 \leqslant m \leqslant k,$$

ce qui signifie que le système est dégénéré en $(p-1)k$.

Corollaire 1. *Si le système* (1) *est dégénéré en* $pk-2\mu p$ *(où* μ *est le degré du polynôme minimal de* A^{-1}*) alors il est dégénéré en* $(p-1)k$.

Soit p_μ le polynôme minimal de A^{-1}; alors on vérifie facilement que $[p_\mu(A^{-1})]^p = 0$ car $p_\mu(A^{-1})$ est une matrice triangulaire inférieure par blocs dont les blocs diagonaux sont égaux à $p_\mu(A^{-1})$ et sont donc nuls.

Pour démontrer le corollaire on procède comme à la remarque 2 mais on utilise le fait que A^{-1} est racine de p_μ^p au lieu de son polynôme caractéristique.

En fait si $\bar{\mu}$ est le degré du polynôme minimal de A^{-1} on peut énoncer:

Corollaire 2. *Si le système* (1) *est dégénéré en* $pk-2\bar{\mu}$ *alors il est dégénéré en* $(p-1)k$.

III. Application de la dégénérescence à un problème de commande

III.1.

L'idée d'utiliser les propriétés de dégénérescence des systèmes avec retards dans les problèmes de commande revient à V. M. Popov ([4]). Dans ce paragraphe on se contente de retrouver dans le cas discret un résultat obtenu pour les systèmes différentiels dans ([2]).

Soit le système discret guidable dans R^n:

$$\begin{cases} X(j+1) = AX(j)+U(j), \\ X(0) \quad \text{donné}. \end{cases} \tag{7}$$

Problème. Trouver une commande $U(j)$ de la forme $U(j) = BX(j-k)$ (k donné > 0) où B dépend éventuellement de $X(0)$ qui ramène définitivement le système (1) de la condition initiale $X(0)$ à l'origine.

Pour résoudre ce problème nous établissons une formule de variation des constantes pour un système discret.

III.2. *Formule de variation des constantes dans le cas discret*

Soit le système

$$Y(j+1) = AY(j)+BY(j-k). \tag{8}$$

On définit la matrice résolvante K solution du système matriciel discret avec retard:

$$\begin{aligned} K(j+1) &= K(j)A+K(j-k)B, \\ K(0) &= I, \\ K(i) &= 0, \quad i < 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Alors la solution de (8) s'écrit:

$$Y(j+1) = K(j+1)Y(0)+\sum_{l=0}^{k-1}K(j-l)B\varphi(l-k). \tag{10}$$

En effet:

$$Y(i+1) = AY(i)+BY(i-k),$$

$$K(j-i)Y(i+1) = K(j-i)AY(i)+K(j-i)BY(i-k),$$

$$\sum_{i=0}^{j}K(j-i)Y(i+1) = \sum_{i=0}^{j}K(j-i)AY(i)+\sum_{i=0}^{j}K(j-i)BY(i-k),$$

„intégrant le premier membre par partie" il vient:

$$-K(j+1)Y(0)+K(0)Y(j+1)+\sum_{i=0}^{j}K(j-i+1)Y(i)$$

$$= \sum_{i=0}^{j}K(j-i)AY(i)+\sum_{i=k}^{j}K(j-i)BY(i-k)+\sum_{i=0}^{k-1}K(j-i)B\varphi(i-k)$$

$$= \sum_{i=0}^{j}K(j-i)AY(i)+\sum_{i=0}^{j}K(j-i-k)BY(i)+\sum_{i=0}^{k-1}K(j-i)B\varphi(i-k)$$

car $K(j-i-k) = 0$ pour $i > j-k$,

d'où

$$Y(j+1)-K(j+1)Y(0)+\sum_{i=0}^{j}K(j-i+1)Y(i)$$

$$= \sum_{i=0}^{j}K(j-i)AY(i)+\sum_{i=0}^{j}K(j-i-k)BY(i)+\sum_{i=0}^{k-1}K(j-i)B\varphi(i-k)$$

or $\forall i$ $K(j+1-i) = K(j-i)A+K(j-i-k)B$, donc:

$$Y(j+1) = K(j+1)Y(0)+\sum_{i=0}^{k-1}K(j-i)B\varphi(i-k). \quad \blacksquare$$

III.3. *Construction d'une commande avec retard pour le retour à l'origine*

THÉORÈME. *On suppose que le système*

(11) $$Y(j+1) = {}^tA\,Y(j) + {}^tB\,Y(j-k)$$

est dégénéré en $2k$ *par rapport au vecteur* $X(0)$ *de* $\mathbf{R}^n$, *alors si l'on pose dans* (7)

(12) $$\begin{aligned} U(j) &= 0, \quad 0 \leqslant j \leqslant k-1, \\ U(j) &= BX(j-k) \quad k \leqslant j \leqslant 2k, \end{aligned}$$

alors la solution de (7) *vérifie* $X(j) = 0$, $j \geqslant 2k$.

Démonstration. La matrice résolvante associée au système (11) est la transposée de la matrice résolvante K de (8); (11) est dégénéré donc

$$ {}^tX(0)\,{}^tK(j) = 0, \quad j \geqslant 2k, $$

c.-à.-d.

$$K(j)X(0) = 0, \quad j \geqslant 2k.$$

Or la solution de (7) (12) est donnée par

$$X(j+1) = K(j+1)X(0),$$

donc

$$X(j) = 0, \quad j \geqslant 2k. \ \blacksquare$$

On est donc ramené à la construction d'une matrice B telle que (11) soit dégénéré par rapport à X_0. La construction proposée par Popov se transpose sans difficulté au cas discret. On obtient alors une commande de la forme:

$$U(j) = 0, \quad 0 \leqslant j \leqslant k-1,$$
$$U(j) = (r, AX(j-k))_{R^n}A^kX_0 - (r, X(j-k))_{R^n}A^{k+1}X_0$$

où r est un vecteur de $\mathbf{R}^n$ vérifiant:

$$\begin{aligned} {}^tX_0 r &= 1, \\ {}^tX_0\,{}^tA^k r &= 0, \\ {}^tX_0\,{}^tA^{k+1} r &= 0. \end{aligned}$$

Bibliographie

[1] B. Asner and A. Halanay, *Algebraic theory of pointwise degenerate delay-differential systems*, J. Diff. Equations 14.2 (1973), pp. 293–306.

[2] P. Charrier, *Equations différentielles avec retard: applications de la dégénérescence à la théorie de la commande*, Thèse de spécialité, Université de Bordeaux I, 1972.

[3] —, and Y. Haugazeau, *On the degeneracy of linear time-invariant delay-differential systems*, J. Math. Anal. Appl. 52.1 (1975), pp. 42–55.

[4] V. M. Popov, *Delay-feedback time optimal linear time invariant control systems*, Proc. Confer. on Differ. Equations, Washington, 1971, Editor: L. Weiss.

[5] —, *Pointwise degeneracy of linear time invariant delay-differential equations*, J. Diff. Equations 11.3 (1972), pp. 541–561.

BANACH CENTER PUBLICATIONS
VOLUME 1

ESTIMATION OF FUNCTIONS OF A DEPENDENT VARIABLE

G. CHAVENT

Université Paris IX, Dauphine, France

1. Introduction

In many situations, systems are governed by ordinary (or partial) differential equations, which are nonlinear when some coefficients are modelled as functions of a dependent variable (as pressure, or temperature). In some cases, it is difficult to determine directly those dependences experimentally. But it is often possible to let the system evolve, and to record dynamic measurements from the system.

The aim of this paper is to show how to use those measurements in order to determine the unknown function of a dependent variable.

We do not suppose a priori any closed form of the formula for the unknown function, but only suppose it belongs to a given function space. In the numerical applications, the unknown functions are discretized and we determine them for a finite number of values of the dependent variable, which enables us to take into account many physical constraints on the unknown function (as upper and lower bounds, concavity or convexity etc.).

2. Theory

Let $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ be a domain of boundary $\partial\Omega$ and let $(0, T) \subset \mathbf{R}$ be the time interval on which the system of interest evolves, and $Q = \Omega \times (0, T)$.

Let y: $Q \to \mathbf{R}$ be the *state* of the distributed system which is governed by an equation of the form

(1) $$\psi(a(y), y) = f,$$

where a: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ is the unknown nonlinearity (so $a(y)$ is a function of Q into $\mathbf{R}$), f is the known second member and ψ is a known mapping which relates the state y to the second member f and the unknown function a (ψ can be a heat equation with an initial and boundary condition for instance, as shown in Section 3.)

With a *given function a* we can associate a number $\mathcal{T}(a)$ (for instance by solving equation (1) formally and defining $\mathcal{T}(a)$ as the squared norm of the difference between the computed and the measured output).