test functions $\varphi \in D(0, T)$, the following results are true:

$$\int_0^T \frac{d}{dt}(w_{h'k'}(t), v_{h_0})\varphi(t)\,dt \to -\int_0^T (u(t), v_{h_0})\varphi'(t)\,dt,$$

$$\int_0^T ((u_{h'k'}(t), v_{h_0}))\varphi(t)\,dt \to \int_0^T ((u_{h'k'}(t), v_{h_0}))\varphi(t)\,dt,$$

$$\int_0^T (f_{k'}(t), v_{h_0})\varphi(t)\,dt \to \int_0^T (f(t), v_{h_0})\varphi(t)\,dt.$$

It is known (see [4], p. 73), that $w_{h'k',i}u_{h'k',j} \to w_i u_j$ weakly in $L^2(0, T; L^{p/2}(\Omega))$ for $p = 1/2-1/2n$.

An application of this fact and of assumption (10) yields the convergence

$$\int_0^T b(w_{h'k'}(t), u_{h'k'}(t), v_{h_0})\varphi(t)\,dt \to \int_0^T b(u(t), u(t), v_{h_0})\varphi(t)\,dt.$$

This implies that u occurring in (35), (36), (38) satisfies condition (5). It can be checked by the method used in [4] and [6] that u satisfies also condition (6). Thus we can conclude that conditions (31)–(33) are satisfied for the weak solution u of the Navier–Stokes equation.

THEOREM 2. *Let us assume that $2 \leqslant n \leqslant 4$ and that we have $\theta > \frac{1}{4}$ and a sequence of parameters $\{(h, k)\}$ satisfying the conditions* (29) *and such that $h \to 0$, $k \to 0$.*

If u is a solution of the problem (2)–(6) *and $\{u_{hk}^m\}_{m=0}^N$ is a family of solutions of the problem* (16), (18), (19) *for all natural even numbers N and all $h \in G$, then there exists a subsequence $\{(h', k')\}$ of $\{(h, k)\}$ such that for functions u_{hk} defined by* (20) *the convergence results* (31)–(33) *are true.*

The theorem is proved in the same way as Theorem 1 (we must only replace (20) by (22) and use Lemma 2 instead of Lemma 1).

References

[1] J. P. Aubin, *Approximation of elliptic boundary-value problems*, Wiley-Interscience, New York 1972.

[2] T. Dupont, G. Fairweather, and J. P. Johnson, *Three-level Galerkin methods for parabolic equations*, SIAM Journ. Numer. Anal. 11 (1974), pp. 392–410.

[3] A. Krzywicki, *On a new finite-difference scheme for the nonstationary Navier–Stokes equation*, Coll. Math. 19 (1968), pp. 143–155.

[4] J. L. Lions, *Quelques méthodes de résolution des problémes aux limites non linéaires*, Dunod, Paris 1969.

[5] R. Temam, *Une méthode d'approximation de la solution des équations de Navier–Stokes*, Bull. Soc. Math. France 96 (1968), pp. 115–152.

[6] —, *On the theory and numerical analysis of the Navier–Stokes equation*, Univ. Paris XI, 1973.

Presented to the Semester
Mathematical Models and Numerical Methods
(February 3–June 14, 1975)

BANACH CENTER PUBLICATIONS
VOLUME 3

РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

АЛОЙЗ НЕМЕТЫ

Университет им. Коменского, Институт Прикладной Математики и Вычислительной Техники, Братислава, Чехословакия

1. Введение

В настоящей работе метод конечных элементов применяется в решении смешанной задачи для параболических дифференциальных уравнений с частными производными 2-го порядка — в уравнении теплопроводности. Как и при решении проблем линейной вязкоупругости [4, 5, 6, 7], так и в данном случае можно применить преобразование Лапласа и потом решать присоединенную краевую задачу методом конечных элементов.

Обратное преобразование Лапласа является очень сложным и его можно определить только численным путем. Характер обратного преобразования виден из разложения присоединенного решения на частные дроби, но практически для численного решения применение этого метода невозможно. В данном случае подходящим численным методом для определения обратного преобразования Лапласа является метод разложения искомого решения в ряд Дирихле.

2. Формулировка проблемы

Пусть Ω — ограниченная область, $\Omega \subset E_2$, где E_2 представляет двумерное эвклидово пространство. Пусть S граница области Ω. Уравнение теплопроводности примет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i=1}^{2}\sum_{k=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i} a_{ik}(X)\frac{\partial u}{\partial x_k} = f(X), \tag{2.1}$$

где $X = (x_1, x_2)$, $a_{ik}(X)$, $i, k = 1, 2$ удовлетворяют для $X \in \Omega$ неравенству

$$\sum_{i,k=1}^{2} a_{ik}(X)\,\xi_i\,\xi_k \geqslant \alpha \sum_{i=1}^{2} \xi_i^2, \qquad \alpha = \text{const} > 0, \tag{2.2}$$

ξ_1, ξ_2 — любые ненулевые действительные числа.

Рассмотрим следующие смешанные условия

$$u|_{t=0} = \varphi(X), \quad X \in \Omega, \tag{2.3}$$

$$u|_S = 0. \tag{2.4}$$

Пусть $a_{ik}(X) \in L^\infty(\Omega)$, $i, k = 1, 2$; $\varphi(X)$, $f(X) \in L_2(\Omega)$. В случае достаточно гладкой границы S доказаны существование и однозначность решения этой задачи.

Применяя преобразование Лапласа в виде

$$\tilde{u}(X, p) = \int_0^\infty u(X, t) e^{-pt}\, dt$$

к уравнению (2.1), в силу начального условия (2.3), получим

$$p\tilde{u} - \sum_{i,k=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i} a_{ik}(X) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_k} = \frac{1}{p} f(X) + \varphi(X). \tag{2.5}$$

Волнистая линия в дальнейшем будет обозначать преобразование Лапласа.

Если обозначить через L оператор в левой части уравнения (2.5) и через

$$g(X, p) = \frac{1}{p} f(X) + \varphi(X),$$

то уравнение (2.5) можно написать в виде

$$L\tilde{u} = g. \tag{2.6}$$

Решим присоединенную краевую задачу (2.6), (2.4).

Теорема 2.1. *Для каждого $p \geqslant 0$ оператор L уравнения* (2.6) *является положительно определенным.*

Доказательство. Обозначим $(\ ,\ )$, $\|\ \|$ — скалярное произведение и норму в пространстве $L_2(\Omega)$. После применения формулы Грина, в силу однородного краевого условия (2.4) получим

$$(L\tilde{u}, \tilde{u}) = \int_\Omega \tilde{u}\left[p\tilde{u} - \sum_{i,k=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i} a_{ik} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_k}\right] d\Omega = p\|\tilde{u}\|^2 + \sum_{i,k=1}^{2} \int_\Omega a_{ik} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_i} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_k} d\Omega. \tag{2.7}$$

Применяя неравенство (2.2) и неравенство Фридрихса, из (2.7) получим

$$(L\tilde{u}, \tilde{u}) \geqslant p\|\tilde{u}\|^2 + \alpha \int_\Omega \left[\left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_2}\right)^2\right] d\Omega \geqslant p\|\tilde{u}\|^2 + \alpha\varkappa\|\tilde{u}\|^2,$$

где $\varkappa$ — положительная постоянная. Если обозначить $\gamma^2 = p + \alpha\varkappa$, то

$$(L\tilde{u}, \tilde{u}) \geqslant \gamma^2 \|\tilde{u}\|^2.$$

Этим теорема доказана.

Ввиду положительной определенности, решение задачи (2.6), (2.4) минимизирует функционал

$$\Pi(\tilde{u}) = (L\tilde{u}, \tilde{u}) - 2(\tilde{u}, g) = \tag{2.8}$$

$$= \sum_{i,k=1}^{2} \int_\Omega a_{ik} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_i} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_k} d\Omega + p \int_\Omega \tilde{u}^2 d\Omega - 2 \int_\Omega \tilde{u} \left(\frac{1}{p} f(X) + \varphi(X)\right) d\Omega.$$

Имея в виду свойство преобразования Лапласа

$$\lim_{p \to 0} p\,\tilde{u}(p) = \lim_{t \to \infty} u(t), \quad X \in \Omega, \tag{2.9}$$

целесообразно квадратичный функционал (2.8) для численного расчета выразить в виде

$$\Pi(\tilde{u}) = \frac{1}{p^2} \left\{ \sum_{i,k=1}^{2} \int_\Omega a_{ik} \frac{\partial(p\tilde{u})\, \partial(p\tilde{u})}{\partial x_i\, \partial x_k} d\Omega + \right. \tag{2.10}$$

$$\left. + p \int_\Omega (p\tilde{u})^2 d\Omega - 2 \int_\Omega p\tilde{u}\,[f(X) + p\varphi(X)]\, d\Omega \right\}.$$

Из предыдущего вытекает, что для каждого неотрицательного p существует именно один элемент $\tilde{u}_0 \in \mathring{W}_2^{(1)}(\Omega)$, который минимизирует функционал (2.8).

3. Решение присоединенной проблемы методом конечных элементов

Метод конечных элементов представляет собой успешное применение метода Ритца–Галеркина. Для приближенного решения уравнений с частными производными главная идея хорошо известна — это минимизация функционала $\Pi(\tilde{u})$ на бесконечномерном пространстве V. Метод Ритца минимизирует функционал на конечномерном подпространстве $V_N, V_N \subset V$ и метод конечных элементов основан на подходящем выборе V_N. Для уравнения теплопроводности V является подпространством пространства Соболева $W_2^{(1)}(\Omega)$ порожденное функциями из $W_2^{(1)}(\Omega)$, которые удовлетворяют главные краевые условия присоединенной проблемы. Пространство V_N является множеством непрерывно дифференцируемых функций, которые отвечают главные краевые условия присоединенной проблемы и которые являются полиномами S-того порядка на отдельных элементах деления области Ω.

Если $\{h_j(X)\}$, $j = 1, 2, \ldots, N$, является базисом пространства V_N, то каждую функцию $\tilde{u}(X) \in V_N$ можно выразить в виде

$$\tilde{u}(X, p) = \sum_{j=1}^{N} \delta_j(p)\, h_j(X), \tag{3.1}$$

где действительные числа $\delta_j(p)$, $j=1,2,\ldots,N$, зависящие от параметра p преобразования Лапласа, являются координатами функции $\tilde{u}$ в базисе $\{h_j(X)\}$, $j=1,2,\ldots,N$.

Целью метода конечных элементов является построение матрицы K и вектора F, где

$$K = (K_{ij}(p))_{i,j=1,2,\ldots,N}, \tag{3.2}$$

$$F = (F_i(p))_{i=1,2,\ldots,N}, \tag{3.3}$$

с помощью которых соответствующий функционал (2.8) можно записать в виде

$$\Pi(\tilde{u}) = \tfrac{1}{2}\Delta^{\mathrm{T}}K\Delta - \Delta^{\mathrm{T}}F, \tag{3.4}$$

где Δ представляет вектор координат функции $\tilde{u}(p,X)$ в базисе $\{h_j(X)\}$,

$$\Delta = (\delta_j(p))^{\mathrm{T}}_{j=1,2,\ldots,N}. \tag{3.5}$$

Индекс T обозначает транспонирование.

Ввиду положительной определенности нашей проблемы, функционал (3.4) принимает минимум именно для одного вектора координат Δ, который отвечает необходимые условия минимума

$$\frac{\partial\Pi}{\partial\delta_i} = 0, \quad i=1,2,\ldots,N. \tag{3.6}$$

Имея в виду (3.4) и (3.6) получаем, что минимизирующий вектор координат является решением системы линейных алгебраических уравнений

$$K\Delta = F. \tag{3.7}$$

Ввиду положительной определенности, система (3.7) имеет единственное решение, которое зависит от параметра p преобразования Лапласа.

Этим мы показали, что методом конечных элементов можно найти решение $\tilde{u}$ присоединенной проблемы для каждого действительного неотрицательного параметра p в каждом узле деления.

4. Обратное преобразование Лапласа

Исходя из функционала (2.10) и из системы (3.7) проведем обратное преобразование Лапласа в отдельных узлах деления. В дальнейшем X_0 будет любой, но фиксированный узел деления.

Из формы функционала (2.10) вытекает, что элементы матрицы K и вектора F (3.2), (3.3) имеют, с учетом параметра p, вид

$$\left.\begin{aligned} K_{ij}(p) &= \alpha_{ij}+p\beta_{ij}, \\ F_i(p) &= \bar{\alpha}_i+p\bar{\beta}_i, \end{aligned}\right. \quad i,j=1,2,\ldots,N,$$

где α_{ij}, β_{ij}, $\bar{\alpha}_i$, $\bar{\beta}_i$ — действительные числа, которые не зависят от параметра p. Если обозначить матрицы $A=(\alpha_{ij})$, $B=(\beta_{ij})$, то

$$K = A+pB,$$

где как матрица K, так и матрицы A, B положительно определенные. Если обозначить детерминант $|K| = P_N(p)$ как полином N-той степени от p, то из положительной определенности вытекает, что уравнение

$$P_N(p) = 0$$

имеет для каждого $X_0\in\Omega$ только отрицательные действительные корни. Кроме того, из выражения (3.7) вытекает, что решение $p\tilde{u}$ в конкретном узле X_0 имеет вид

$$\tilde{u}(X_0) = \frac{\tilde{P}_N}{pP_N}. \tag{4.1}$$

Эту рациональную функцию можем, ввиду предыдущего, при простых корнях λ_m, разложить на частные дроби в виде

$$\tilde{u}(X_0) = \frac{1}{p}\varkappa_0 + \sum_{m=1}^{N}\frac{\varkappa_m}{p+\lambda_m}, \tag{4.2}$$

где $\varkappa_m$, λ_m, $m=0,1,2,\ldots,N$ — действительные числа, $\lambda_m>0$.

Выполняя обратное преобразование Лапласа для конечной суммы (4.2), получим

$$u(X_0) = \varkappa_0 + \sum_{m=1}^{N}\varkappa_m e^{-\lambda_m t}. \tag{4.3}$$

Для конкретного примера провести разложение на частные дроби (4.2) сложно и практически численно неосуществимо, но соотношение (4.3) нам показывает характер решения.

Численно подходящей аппроксимацией решения является конечная сумма (4.3), причем в дальнейшем мы покажем подходящий метод для определения коэффициентов этой суммы.

Функцию $u(X_0,t)$ можем выразить в виде

$$u(X_0,t) = u_0(X_0)+\Delta u(X_0,t), \tag{4.4}$$

где $u_0(X_0) = u(X_0,\infty)$.

В дальнейшем обозначим (для конкретного узла деления X_0)

$$u(X_0,t) = u(t),$$

$$u(X_0) = u_0.$$

Выражение $\Delta u(t)$ аппроксимируем рядом Дирихле из (4.3)

$$\Delta u_D(t) = \sum_{i=1}^{n} S_i e^{-t/\lambda_i},$$

где λ_i — предписанные постоянные, а коэффициенты S_i определяются из условия минимума квадрата ошибки между Δu и Δu_D;

$$E^2 = \int_0^\infty [\Delta u(t)-\Delta u_D(t)]^2\,dt.$$

Из необходимого условия минимума получим n отношений

$$(4.5)\qquad -\frac{1}{2}\frac{\partial E^2}{\partial S_i} = 0 = \int_0^\infty [\Delta u(t) - \Delta u_D(t)]\, e^{-t/\lambda_i}\, dt, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

в силу преобразования Лапласа из (4.5) получим

$$[p\,\Delta\tilde{u}_D(p)]_{p=1/\lambda_i} = [p\,\Delta\tilde{u}(p)]_{p=1/\lambda_i}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

и можем записать в явном виде

$$(4.6)\qquad \sum_{j=1}^{n} \frac{S_j}{1+\lambda_i/\lambda_j} = [p\,\Delta\tilde{u}(p)]_{p=1/\lambda_i}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Из выражения (4.4) вытекает

$$(4.7)\qquad p\,\Delta\tilde{u}(p) = p\tilde{u}(p) - u_0,$$

где u_0 дано формулой (2.9)

$$u_0 = \lim_{p\to 0}\{p\tilde{u}(p)\}.$$

Коэффициенты S_i определены системой линейных алгебраических уравнений (4.6), правую часть которой (4.7) можно определить методом конечных элементов для $p = 1/\lambda_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Покажем, что матрица системы (4.6) регулярна.

Лемма. *Обозначим детерминант* $D_n = \left|\dfrac{1}{\lambda_i+\lambda_k}\right|_{i,k=1,\ldots,n}$. *Для натурального n имеет место рекуррентная формула*

$$(4.8)\qquad D_{n+1} = D_n \cdot \frac{1}{2\lambda_{n+1}} \prod_{i=1}^{n} \frac{(\lambda_i-\lambda_{n+1})^2}{(\lambda_i+\lambda_{n+1})^2}.$$

Доказательство. Доказательство проведем полной математической индукцией.

(а) для $n = 1$

$$D_2 = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{\lambda_1+\lambda_1} & \dfrac{1}{\lambda_1+\lambda_2} \\ \dfrac{1}{\lambda_1+\lambda_2} & \dfrac{1}{\lambda_2+\lambda_2} \end{vmatrix} = \frac{1}{(\lambda_1+\lambda_1)(\lambda_2+\lambda_2)} - \frac{1}{(\lambda_1+\lambda_2)^2} =$$

$$= \frac{(\lambda_1-\lambda_2)^2}{(\lambda_1+\lambda_1)(\lambda_2+\lambda_2)(\lambda_1+\lambda_2)^2} = D_1\,\frac{1}{2\lambda_2}\prod_{i=1}^{1}\frac{(\lambda_i-\lambda_2)^2}{(\lambda_i+\lambda_2)^2}.$$

(б) Предположим, что соотношение (4.8) справедливо для n; покажем, что оно справедливо и для $n+1$. Имеем

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{\lambda_1+\lambda_1} & \cdots & \dfrac{1}{\lambda_1+\lambda_k} & \cdots & \dfrac{1}{\lambda_1+\lambda_{n+1}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{1}{\lambda_i+\lambda_1} & \cdots & \dfrac{1}{\lambda_i+\lambda_k} & \cdots & \dfrac{1}{\lambda_i+\lambda_{n+1}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{1}{\lambda_{n+1}+\lambda_1} & \cdots & \dfrac{1}{\lambda_{n+1}+\lambda_k} & \cdots & \dfrac{1}{\lambda_{n+1}+\lambda_{n+1}} \end{vmatrix}.$$

От k-того столбца вычтем $2\lambda_{n+1}/(\lambda_{n+1}+\lambda_k)$-кратное k-го столбца:

$$(4.9)\qquad D_{n+1} =$$

$$= \begin{vmatrix} \dfrac{(\lambda_1-\lambda_{n+1})(\lambda_1-\lambda_{n+1})}{(\lambda_{n+1}+\lambda_1)(\lambda_1+\lambda_1)(\lambda_1+\lambda_{n+1})} & \cdots & \dfrac{(\lambda_1-\lambda_{n+1})(\lambda_k-\lambda_{n+1})}{(\lambda_{n+1}+\lambda_k)(\lambda_1+\lambda_k)(\lambda_1+\lambda_{n+1})} & \cdots & \dfrac{1}{\lambda_1+\lambda_{n+1}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{(\lambda_i-\lambda_{n+1})(\lambda_1-\lambda_{n+1})}{(\lambda_{n+1}+\lambda_1)(\lambda_i+\lambda_1)(\lambda_i+\lambda_{n+1})} & \cdots & \dfrac{(\lambda_i-\lambda_{n+1})(\lambda_k-\lambda_{n+1})}{(\lambda_{n+1}+\lambda_k)(\lambda_i+\lambda_k)(\lambda_i+\lambda_{n+1})} & \cdots & \dfrac{1}{\lambda_i+\lambda_{n+1}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & \dfrac{1}{2\lambda_{n+1}} \end{vmatrix}$$

так как

$$\frac{1}{\lambda_i+\lambda_k} - \frac{2\lambda_{n+1}}{(\lambda_{n+1}+\lambda_k)}\cdot\frac{1}{(\lambda_i+\lambda_{n+1})} =$$

$$= \frac{\lambda_{n+1}\lambda_i + \lambda_k\lambda_i + \lambda_{n+1}^2 + \lambda_k\lambda_{n+1} - 2\lambda_i\lambda_{n+1} - 2\lambda_k\lambda_{n+1}}{(\lambda_{n+1}+\lambda_k)(\lambda_i+\lambda_k)(\lambda_i+\lambda_{n+1})} =$$

$$= \frac{(\lambda_i-\lambda_{n+1})(\lambda_k-\lambda_{n+1})}{(\lambda_{n+1}+\lambda_k)(\lambda_i+\lambda_k)(\lambda_i+\lambda_{n+1})}.$$

Если разложим детерминант (4.9) по $(n+1)$-ой строке, то применяя предположение индукции получим утверждение леммы:

$$D_{n+1} = \frac{1}{2\lambda_{n+1}}\, D_n \prod_{j=1}^{n} \frac{(\lambda_j-\lambda_{n+1})^2}{(\lambda_j+\lambda_{n+1})^2}.$$

Теорема 4.1. *Если для $i \neq j$, $\lambda_i \neq \lambda_j$ и для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$ $\lambda_i > 0$, то матрица системы линейных алгебраических уравнений (4.6) является регулярной.*

Доказательство. Обозначим матрицу системы (4.6) через M,

$$M = \left(\frac{1}{1+\dfrac{\lambda_i}{\lambda_j}}\right)_{i,j=1,2,\ldots,n}$$

и вычислим детерминант этой матрицы

$$|M| = \left|\frac{\lambda_j}{\lambda_i+\lambda_j}\right|_{i,j=1,2,\ldots,n} = \left\{\prod_{k=1}^{n}\lambda_k\right\}\left|\frac{1}{\lambda_i+\lambda_j}\right|_{i,j=1,2,\ldots,n}.$$

Применяя предыдущую лемму, получим

$$|M| = \left\{\prod_{k=1}^{n}\lambda_k\right\}\left\{\prod_{i=1}^{n}\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{\lambda_i+\lambda_k}\right\}\left\{\prod_{i=1}^{n}\prod_{k=i+1}^{n}(\lambda_i-\lambda_k)^2\right\} \neq 0$$

что и требовалось доказать.

Коэффициенты λ_i ряда Дирихле (4.2) нужно заранее определить из интервала $(0,\infty)$. Можно также определить коэффициенты λ_i путем минимизации квадрата ошибки E^2 с учетом λ_i для $i = 1, 2, \ldots, n$, но эта проблема приводит к нелинейной системе алгебраических уравнений, которую практически невозможно решить.

5. Заключение

Метод конечных элементов большей частью применяется для решения краевых задач для дифференциальных уравнений эллиптического типа. В примененном в данной работе методе решения смешанных задач для уравнений параболического типа можно использовать разработанные уже программы и известные алгоритмы для решения краевых задач дла эллиптических уравнений 2-го порядка.

При применении треугольных и прямоугольных элементов доказана сходимость решения присоединенной проблемы [3, 9, 10].

Для обратного преобразования Лапласа показан подходящий метод разложения решения в ряд Дирихле, который приносит очень хорошие результаты в области задач линейной вязкоупругости [4, 5, 6, 7]. Для более точного определения обратного преобразования, главным образом для малых значений времени t, нужно аппроксимировать решение рядом (4.3) и найти алгоритм для определения коэффициентов этого ряда.

При применении пространственных элементов можно аналогично решить также трехмерное уравнение теплопроводности.

В данной работе правая часть уравнения (2.1) не зависит от времени t. При достаточной гладкости функции $f(X, t)$ можно тем же способом решить также эту наидалее общую проблему, но при обратном преобразовании Лапласа невозможно выразить решение в виде (4.1), потому что вектор правых частей F не будет линейной функцией параметра p.

Presented to the Semester
Mathematical Models and Numerical Methods
(February 3–June 14, 1975)

BANACH CENTER PUBLICATIONS
VOLUME 3

PROJECTION METHODS IN THE APPROXIMATE SOLUTION OF THE EIGENVALUE PROBLEM IN A HILBERT SPACE

K. MOSZYŃSKI

Institute of Mathematics, Polish Academy of Sciences, Warsaw, Poland

1. Introduction

Let H be real or complex Hilbert space with the scalar product $(\cdot,\cdot)$ and the corresponding norm $\|\cdot\|$.

Let Θ be a subset of the real interval $(0, 1]$ with an accumulation point at zero.

In what follows V_h will denote a linear subspace of H of finite dimension d_h, where $d_h \to \infty$ when $h \to 0$.

We are interested in the approximation of the spectrum of some class of linear operators defined, in general, on some subspace of H, by means of consecutive projections onto appropriately chosen subspaces $V_h \subset H$, when $h \to 0$.

Our investigations are based on the classical so-called Perturbation Theorem [1].

Let us formulate this theorem in the case of a compact operator T,

$$T\colon H \to H.$$

It is very well known that the spectrum of a compact operator is a finite or infinite sequence of eigenvalues with possibly only one accumulation point zero. Denote by $\sigma(T) = \{\lambda_\nu\}_{\nu=1,2,\ldots}$ the spectrum of T. Let ε and δ be sufficiently small positive numbers. Denote by K_δ the disc of radius δ centred at zero, and by K_ε^ν the discs of radius ε, centred at λ_ν. Given δ, there is only a finite number of λ's outside K_δ.

Assume that:

—the eigenvalues $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{N_\delta}$ lie outside K_δ;

—$K_\delta \cap K_\varepsilon^l = \emptyset$ and $K_\varepsilon^k \cap K_\varepsilon^l = \emptyset$ for $k \neq l$, $k, l = 1, 2, \ldots, N_\delta$.

Then we have

THE PERTURBATION THEOREM. *Let a family of linear continuous operators $\{T_h\}_{h\in\Theta}$ be given*

$$T_h\colon H \to H,$$