[3] М. К. Гаврин, *О собственных числах операторов, зависящих от параметра*, Вестник Ленингр. ун-та, 9 (1952), стр. 77–95.
[4] —, *О методе ложных возмущений для разыскания собственных значений*, Журн. вычисл. матем. и матем. физики 1 (1961), стр. 757–770.
[5] S. Gerschgorin, *Abgrenzung der Eigenwerte einer Matrix*, Bull. Acad. Sci. USSR, Leningrad, classe math., 7 (1931), стр. 749–754.
[6] W. Givens, *Numerical computation of the characteristic values of a real symmetric matrix*, Oak Ridge Nat. Lab. Report ORNL-1574, 1954.
[7] A. S. Householder, *Principles of numerical analysis*, New York 1953.
[8] T. Kato, *Perturbations theory for linear operators*, Springer-Verlag, Berlin 1966.
[9] F. Kuhnert, *Die Pseudostöriteration zur Bestimmung von Eigenwerten und Eigenvektoren*, Deut. Verlag Wiss., Berlin 1971.
[10] —, *Die Pseudostöriteration bei abgeschlossenen Operatoren*, Rend. Circ. Mat. Palermo 16 (1967), стр. 5–32.
[11] —, *Über die Realisierung von iterativen Verfahren zur Eigenwertbestimmung*, Beitr. zur Numer. Math. 4 (1976), стр. 141–146.
[12] A. Meyer, *Die Konstruktion eines geeigneten Startvektors für die Pseudostöriteration mittels Jacobiverfahrens*, Diplomarbeit, Tech. Hochschule Karl-Marx-Stadt, 1974.
[13] A. Meyer, W. Lang, *Die Konstruktion eines geeigneten Startvektors für die Pseudostöriteration mit Hilfe des Jacobiverfahrens*, Beitr. zur Numer. Math. 5 (1976), стр. 119–128.
[14] H. R. Schwarz, H. Rutishauser, E. Stiefel, *Numerik symmetrischer Matrizen*, B. G. Teubner, Stuttgart 1968.
[15] G. W. Stewart, *Introduction to matrix computation*, Academic Press, New York–London 1973.
[16] H. Wielandt, *Bestimmung höherer Eigenwerte durch gebrochene Iteration*, Ber. d. aerodyn. Versuchsanstalt Göttingen 44/J/37, 1944.
[17] J. H. Wilkinson, *The algebraic eigenvalue problem*, Clarendon Press, Oxford 1965.

Presented to the Semester
Mathematical Models and Numerical Methods
(February 3–June 14, 1975)

BANACH CENTER PUBLICATIONS
VOLUME 3

МЕТОД ЛОЖНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ

РЕЙНАРД ЛЕМАНН

Технический ВУЗ, Карл-Маркс-Штадт, ГДР

1. Введение

Математические модели той или иной физической или технической проблемы нередко сводятся к нелинейной задаче на собственные значения (см. [3]), т.е. к задаче о нахождении такого параметра $\lambda = \Lambda$, для которого операторное уравнение

$$(1) \qquad A(\lambda)x = 0$$

в некотором гильбертовом пространстве H имеет хотя бы одно ненулевое решение $x = \varphi$. Здесь $A(\lambda)$ — линейный оператор в H, который нелинейно зависит от комплексного параметра $\lambda \in G \subseteq \boldsymbol{C}$. Всюду в дальнейшем предполагается, что эта зависимость либо имеет вид полинома относительно λ с операторными коэффициентами,

$$A(\lambda) \equiv \sum_{k=0}^{m} \lambda^{m-k} A_k,$$

либо операторная функция $A(\lambda)$ является дифференцируемой относительно λ достаточное число раз. Семейство операторов $A = \{A(\lambda), \lambda \in G \subseteq \boldsymbol{C}\}$ называется *операторным пучком*.

Число $\lambda = \Lambda$ называется *собственным значением* пучка A, если уравнение (1) при $\lambda = \Lambda$ имеет хотя бы одно ненулевое решение $x = \varphi$, называемое *собственным вектором* пучка A к собственному значению Λ, причём число $\dim\ker A(\Lambda)$ называется (геометрической) *кратностью* данного собственного значения Λ. Все остальные понятия спектральной теории линейных операторов, как спектр, резольвентное множество, резольвента пучка A, определяются, очевидно, аналогичным образом. В частности, оператор $R(\zeta)$ является резольвентой пучка A в точке ζ из резольвентного множества пучка A, если $R(\zeta)$ есть ограниченный обратный к оператору $A(\zeta)$.

Заметим, что в случае $H = \boldsymbol{R}^N$ все собственные значения пучка A определяются как корни характеристического уравнения

$$c(\lambda) \equiv \det A(\lambda) = 0.$$

Кроме пучка A рассматривается сопряженный пучок $A^* = \{A^*(\lambda), \lambda \in G\}$ как семейство сопряженных операторов; в случае полиномиального пучка, например, имеется

$$A^*(\lambda) = \sum_{k=0}^{m} \lambda^{m-k} A_k^*.$$

Задача настоящей заметки состоит в изложении удобных для практических вычислений методов приближенного нахождения собственного значения и собственных векторов.

2. Простой метод приближенного нахождения собственного значения

Известны следующие результаты для полиномиальных пучков, коэффициенты которых являются ограниченными операторами:

(а) Если Λ — простое собственное значение пучка A, то $\bar{\Lambda}$ (комплексно-сопряженное число) является простым собственным значением сопряженного пучка A^*, т.е. $A^*(\bar{\Lambda})\psi = 0$, где $\psi \neq 0$.

(б) Число Λ является простым собственным значением пучка A тогда и только тогда, когда Λ есть простой корень уравнения

$$b(\lambda) \equiv \big(A(\lambda)\varphi, \psi\big) = 0,$$

т.е. $b'(\Lambda) = \big(A'(\Lambda)\varphi, \psi\big) \equiv \varrho \neq 0$, где штрих обозначает производную по λ.

Свойство (б) легко приводит к следующему методу нахождения собственного значения Λ.

Если бы были известны собственные векторы φ и ψ пучков A и A^* соответственно, то можно построить итерационный процесс вида

$$\lambda_0, \quad \lambda_{n+1} = \lambda_n - \frac{(A(\lambda_n)\varphi, \psi)}{(A'(\lambda_n)\varphi, \psi)} \quad (n = 0, 1, \ldots).$$

Но поскольку векторы φ и ψ, как правило, неизвестны, надо их как-то приблизить. Тогда получается следующий метод, для которого Куммер [3] дал обоснование в случае замкнутых операторных коэффициентов:

$$\lambda_0, \quad \lambda_{n+1} = \lambda_n - \frac{(A(\lambda_n)x_n, y_n)}{(A'(\lambda_n)x_n, y_n)} \quad (n = 0, 1, \ldots),$$

где x_n, y_n определяются с помощью уравнений

$$(2) \qquad A(\lambda_n)x_n = w, \quad A^*(\bar{\lambda}_n)y_n = z$$

с фиксированными векторами $w, z \in H$. В работе [3] доказано, что этот метод сходится при достаточно близком к искомому значению Λ начальном приближении λ_0 и определенных требованиях относительно пучка A с асимптотически квадратичной скоростью сходимости.

При доказательстве сходимости этого метода широко использована так называемая линеаризация в большом. При такой линеаризации каждому пучку A сопоставится в соответствие некоторый линейный оператор $\mathscr{A}$ в определенном гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$, так что обычная линейная задача на собственные значения оператора $\mathscr{A}$ в $\mathscr{H}$ совпадает с нелинейной задачей для пучка A в H. В самом деле, совпадают не только сами собственные значения, но также их спектральные свойства как кратность и изолированность. Это обстоятельство широко применяется в теоретическом исследовании полиномиальных пучков и при построении вычислительных приемов нахождения собственных значений.

Заметим, что только недавно удалось доказать сходимость модифицированного метода, где уравнения (2) заменяются уравнениями

$$(2') \qquad A(\lambda_n)x_n = x_{n-1}, \quad A^*(\bar{\lambda}_n)y_n = y_{n-1},$$

причем нормированные векторы x_n, y_n сходятся к собственным векторам пучков A и A^* соответственно.

3. Метод ложных возмущений

Другим подходом к построению численного метода нахождения собственного значения Λ и собственных векторов φ и ψ голоморфного в λ пучка A является методика теории возмущений (ср. [1], [2]).

Пусть известны достаточно хорошие нормированные приближения φ_0, ψ_0 для нормированных собственных векторов φ и ψ и число λ_0 как приближение простого собственного значения Λ пучка A. Идея состоит в том, что построится некоторый соседний пучок A_0, для которого векторы φ_0, ψ_0 являются точными собственными векторами точного собственного значения λ_0. Тогда можно вывести замкнутые формулы для искомых собственных векторов φ и ψ, которые разлагаются в степенной ряд. Отбросив здесь старшие члены, получаем новые приближения φ_1, ψ_1 для φ и ψ, поправки которых относительно φ_0, ψ_0 сравнительно легко вычисляются.

Таким образом, получается следующая картина первого шага итеративного метода. Исходя из нормированных приближений φ_0, ψ_0 построим функцию

$$b_0(\lambda) \equiv \big(A(\lambda)\varphi_0, \psi_0\big),$$

для которой определяется простой корень λ_0,

$$b_0(\lambda_0) = 0, \quad \varrho_0 \equiv b_0'(\lambda_0) = \big(A'(\lambda_0)\varphi_0, \psi_0\big) \neq 0.$$

Тогда нормы невязок

$$\sigma_0 = A(\lambda_0)\varphi_0, \quad \tau_0 = A^*(\bar{\lambda}_0)\psi_0$$

суть меры достигнутой точности $\{\lambda_0; \varphi_0, \psi_0\}$. Возмущенный пучок $A_0(\lambda)$ получается из $A(\lambda)$ возмущением C_0, где C_0 выбрано так, чтобы выполнялись условия $C_0\varphi_0 = \sigma_0$, $C_0^*\psi_0 = \tau_0$, например,

$$C_0 x = (x, \varphi_0)\sigma_0 + \varrho_0^{-1}(x, \tau_0) A'(\lambda_0)\varphi_0, \quad x \in H.$$

Тогда, как легко видеть, $(A_0(\lambda) = A(\lambda) - C_0)$

$$A_0(\lambda_0)\varphi_0 = 0, \quad A_0^*(\bar{\lambda}_0)\psi_0 = 0,$$

и можно доказать [4], предполагая малость норм невязок, что λ_0 является простым собственным значением пучка A_0. Если λ_0 — изолированная точка спектра, то оператор $A_0(\lambda_0)$ представляет собой взаимно однозначное соответствие между ортогональным дополнением φ_0 в H и ортогональным дополнением ψ_0 в H, что позволяет определить обратный к нему оператор P_0.

Тогда (см. [4]) получается для вектора φ следующее выражение,

$$\varphi = [1 - P_0(A_0(\lambda_0) - A_0(\Lambda) - C_0)]^{-1}\varphi_0. \tag{3}$$

Если $\{\lambda_0; \varphi_0, \psi_0\}$ достаточно близко к $\{\Lambda; \varphi, \psi\}$ (в смысле малости норм невязок), то выражение в круглых скобках мало и целое выражение (3) можно разлагать в ряд Неймана. Отбросив все члены, начиная с первых „полтора", получим

$$\varphi = \varphi_0 - P_0\sigma_0 + \ldots,$$

т.е. вектор

$$\theta_0 = \varphi_0 - u_0, \quad u_0 = P_0\sigma_0,$$

является после нормировки новым приближением φ_1 к φ. Для поправки u_0 имеется представление $u_0 = P_0\sigma_0$, что эквивалентно системе уравнений

$$u_0:\quad A(\lambda_0)u - \varrho_0^{-1}(u, \tau_0)A'(\lambda_0)\varphi_0 = \sigma_0, \qquad (u, \varphi_0) = 0. \tag{4}$$

Совершенно аналогично получается вектор $\omega_0 = \psi_0 - v_0$, который после нормировки дает новое приближение ψ_1 к ψ, причем v_0 удовлетворяет систему

$$v_0:\quad A^*(\bar{\lambda}_0)v - \bar{\varrho}_0^{-1}(v, \sigma_0)A^{*\prime}(\bar{\lambda}_0)\psi_0 = \tau_0, \qquad (v, \psi_0) = 0. \tag{4*}$$

Итак, описан первый шаг итеративного метода приближенного нахождения собственных векторов φ и ψ и собственного значения Λ пучка A.

Сделаем несколько замечаний.

1. Пока удалось показать сходимость этого метода в несколько модифицированной форме, причем порядок сходимости — 2. Однако, основываясь на результатах Кунерта [2], можно ожидать, что описанный метод или некоторая модификация его сходится со скоростью 3.

2. Определяющие уравнения (4), (4*) обладают хорошим вычислительным поведением, в то время уравнения (2) или (2′) — почти сингулярные, что вызывает известные трудности при численном решении их.

3. Имеют место оценки:

$$\left.\begin{array}{l}\|\varphi - \varphi_n\| \\ \|\psi - \psi_n\|\end{array}\right\} = O(\varepsilon_n), \qquad |\Lambda - \lambda_n| = O(\varepsilon_n^2),$$

где $\varepsilon_n = \max\{\|\sigma_n\|, \|\tau_n\|\}$, что делает нормы невязок удобным управляющим параметром метода.

4. Численное решение уравнения

$$b_n(\lambda) \equiv (A(\lambda)\varphi_n, \psi_n) = 0 \quad (n = 0, 1, \ldots)$$

рекомендуется произвести методом Ньютона, начиная с предыдущим приближением λ_{n-1}. Это требует предварительного знания начального приближения λ_{-1} к Λ.

Примечание

Работа выполнялась во время стажировки при Международном Математическом Центре им. С. Банаха Польской Академии Наук в первом полугодии 1975 г.

Автор приносит глубокую благодарность доктору Вакуличу и всем сотрудникам Центра, обеспечивающим плодотворную научную работу, а также научному руководителю семестра, академику А. Н. Тихонову.

Литература

[1] Т. Като, *Теория возмущений линейных операторов* (перевод с англ.), Москва 1972.
[2] F. Kuhnert, *Die Pseudostöriteration zur Bestimmung von Eigenwerten und Eigenvektoren*, Mathem. Forschungsberichte, Bd. XXVI, Berlin 1971.
[3] H. Kummer, *Zur praktischen Behandlung nichtlinearer Eigenwertaufgaben abgeschlossener linearer Operatoren*, Mitt. Mathem. Sem. Gießen 62 (1964).
[4] R. Lehmann, *Einige Abschätzungen von Eigenwerten und Eigenvektoren eines gestörten Operatorbüschels*, Beitr. zur Numer. Math. 2 (1973), стр. 103–113.

Presented to the Semester
Mathematical Models and Numerical Methods
(February 3–June 14, 1975)