it has a bad estimate. The problem of the optimal choice of c is, to our best knowledge, still open.

For a detailed discussion and the proofs of the presented and other theorems see [3] and [4].

References

[1] J. G. Barnes, *An algorithm for solving nonlinear equations based on the secant method*, Computer Journ. 8 (1965).

[2] L. Bittner, *Eine Verallgemeinerung des Sekantenverfahrens zur naherungsweisen Bererchnung der Nullstellen eines nichtlinearen Gleichungssystem s.*, Wiss. Z. Techn. Univ. Dresden 9, 1959/60.

[3] J. Jankowska, *Multivariate secant method*, Ph.D. thesis, University of Warsaw, 1975.

[4] —, *The theory of the multivariate secant method*, pending for publication in SIAM Journ. Numer. Anal.

[5] A. Kiełbasiński, *Basic concepts of rounding error analysis in numerical methods of linear algebra*, Matematyka Stosowana 4 (1975), pp. 5–27.

[6] J. M. Ortega and W. C. Rheinboldt, *Iterative solution of nonlinear equation in several variables*, Academic Press 1970.

[7] H. Woźniakowski, *Generalized information and maximal order of iteration for operator equations*, SIAM Journ. Numer. Anal. 12, No. 1, pp. 121–135.

[8] —, *Numerical stability for solving nonlinear equations*, Computer Science Department report, Carnegie-Mellon University, Pittsburgh, Pa., 1975.

Presented to the Semester
Mathematical Models and Numerical Methods
(February 3–June 14, 1975)

BANACH CENTER PUBLICATIONS
VOLUME 3

МЕТОДЫ ПЕРЕНОСА ДЛЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ПОЯСНЫМИ МАТРИЦАМИ

ЛЮБОР МАЛИНА

Университет им. Коменского, Институт Прикладной Математики и Вычислительной Техники, Братислава, Чехословакия

1. Введение

Пусть заданная краевая задача

$$y''(x) = f(x) \quad \text{для} \quad x \in (a, c), \tag{1.1}$$

$$y(a) = \alpha, \quad y(c) = \beta, \tag{1.2}$$

где $y''(x)$ значит вторую производную от функции y в точке x. Численно можно эту краевую задачу решить, например, заменой производной на конечную разность. Значит, пусть $x_i = a+ih$, где $h>0$, $i = 0(1)N$ и $x_N = c$. Тогда

$$y''(x) \approx \frac{y(x_i+h)-2y(x_i)+y(x_i-h)}{h^2}$$

и уравнение (1.1) заменяем в точке $x = x_i$ уравнением

$$y_{i-1}-2y_i+y_{i+1} = h^2 f_i, \quad i = 1(1)N-1, \tag{1.3}$$

$$y_0 = \alpha, \quad y_N = \beta, \tag{1.4}$$

где $y_i \approx y(x_i)$.

Т.е., вместо задачи (1.1)–(1.2) мы решаем систему линейных алгебраических уравнений (1.3)–(1.4), которую формально запишем

$$Ly = f, \tag{1.5}$$

где L есть тридиагональная матрица, $y = [y_0, \ldots, y_N]^T$ есть вектор незнакомых, размерности $N+1$ и f есть вектор правых частей, размерности $N+1$. Систему (1.5) можно решать, например, процессом элиминации Гаусса. Если мы хорошо отдаем себе отчет в нем, то прямой ход процесса элиминации обозначает, что мы постепенно оформляем тридиагональную матрицу L на бидиагональную верхнюю троеугольную матрицу D. Диагональные элементы этой матрицы обозначим через $D_1^{(i)}$, $i=0(1)N-1$, и элементы первой наддиагонали через $D_2^{(i)}$. После i-того шага процесса получаем уравнение эквивалентное (1.5)

$$\begin{bmatrix} D_1^{(0)} & D_2^{(0)} & & & & \\ & \ddots & \ddots & & \Theta & \\ & & D_1^{(i)} & D_2^{(i)} & & \\ & & a_{i+1} & b_{i+1} & a'_{i+1} & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & \Theta & & a_{N-1} & b_{N-1} & a'_{N-1} \\ & & & & 0 & 1 \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} d_0 \\ \vdots \\ d_i \\ h^2 f_{i+1} \\ \vdots \\ h^2 f_{N-1} \\ \beta \end{bmatrix},$$

где a_i, b_i, a'_i мы обозначили элементы первой поддиагонали, диагонали, первой наддиагонали матрицы L, соответственно. Из формы условий (1.2) вытекает $D_1^{(0)}=1$, $D_2^{(0)}=0$, $d_0=\alpha$. В сущности, мы переносим это левое „краевое условие" из „точки $i=0$" постепенно через „точки i" в „точку $N-1$", при помощи матриц $D_i=[D_1^{(i)}, D_2^{(i)}]$ и векторов d_i таким образом, чтобы в каждой „точке i" мы получили уравнение вида

$$D_i[y_i, y_{i+1}]^{\mathrm{T}} = d_i, \quad i=0(1)N-1. \tag{1.6}$$

В конце переноса у нас уравнение

$$D_{N-1}[y_{N-1}, y_N]^{\mathrm{T}} = d_{N-1} \tag{1.7}$$

и „правое краевое условие"

$$[0,1]\,[y_{N-1}, y_N]^{\mathrm{T}} = \beta. \tag{1.8}$$

Из уравнений (1.7)–(1.8) можно получить значения y_{N-1}, y_N. Обратный шаг ведется так, что к i-тому уравнению (1.6) прибавим „уравнение"

$$y_{i+1} = y_{i+1}$$

(значение y_{i+1} мы уже вычислили в предыдующем шаге).

Значит, последовательно решаем системы:

$$\begin{bmatrix} D_1^{(i)} & D_2^{(i)} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_i \\ y_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_i \\ y_{i+1} \end{bmatrix} \quad \text{для} \quad i=N-1(-1)0. \tag{1.9}$$

Собственно говоря, мы переносим „правое краевое условие (1.8)" из „точки $N-1$" в „точку 0" через „точки i" таким образом, чтобы мы в каждой „точке i" пополнили уравнение (1.6) на систему (1.9) с неособой матрицей. (Ясно, что для нашей матрицы L, возникающей из разностной аппроксимации задачи (1.1)–(1.2), есть $D_1^{(i)} \neq 0$ для всех i).

Идеей такого переноса „краевых условий" для тридиагональных матриц, значит, заменой решения уравнения (1.5) решением последовательности систем (1.9), занимался уже Тинг в [5]. На основе аналогии с этой идеей переноса мы основали наши методы для решения систем уравнений с поясной матрицей.

Замечание. Квадратная матрица $L=(l_{ij})_{i,j=1}^{M}$ называется *поясной* с поясом ширины $2k+1$, если

$$|i-j| > k \Rightarrow l_{ij} = 0.$$

Вторым импульсом для отыскивания методов решения систем типа (1.5), основаных на идее переноса, был следующий. Как из вышепоказаного вытекает, существует тонкая связь между краевыми задачами для дифференциальных уравнений порядка $2k$ и разностными порядка $2k$, в специальном случае $k=1$. Аналогичная связь существует и для любого натурального k.

Каждое разностное уравнение порядка $2k$ можно писать как систему $2k$ уравнений первого порядка, то-есть, многочисленным образом. Отыскивая решение этой системы уравнений в точках $\{x_i\}_{i\in I}$, мы получим проблему решения системы линейных уравнений с матрицей системы поясной, о ширине $2k+1$. Выбор этих точек $\{x_i\}_{i\in I}$ отразится во внутренней структуре диагонали матрицы и в параметре j, в определении наших векторов x_i^j, во второй части доклада, субвекторов вектора незнакомых y системы (1.5). Значит, существует тонкая связь между решением краевой задачи для дифференциального уравнения порядка $2k$ и системы линейных алгебраических уравнений с $2k+1$ диагональной матрицей L.

Для решения краевых задач для системы уравнений первого порядка вида

$$x'(t)+A(t)x(t) = f(t), \quad t\in(a,c),$$

$U_a x(a) = u_a$, $U_c x(c) = u_c$, существуют методы, называемые методами факторизации или переноса краевых условий. Их основной идеей является замена решения краевой задачи решением начальной задачи (возможно нелинейной) для определенной матрицы $D(t)$ и вектора $d(t)$. Замена определена таким образом, чтобы в каждой точке $t\in[a,c]$ вектор $x(t)$ оригинальной задачи исполнял уравнение $D(t)\,x(t) = d(t)$. Начальные условия для начальных задач получаются определенным образом из краевых условий оригинальной задачи. Более подробно см. у Тауфера [4] или у Бабушки и др. [1].

Бабушка в [1] доказал, что решая краевую задачу второго порядка с самосопряженным оператором одним из методов переноса (так называемым методом простой факторизации) и решая окончательную систему начальных проблем методом Эйлера, мы получим те же значения аппроксимации точного решения, как разностным методом и решением отвечающей алгебраической системы методом Гаусса.

Естественный вопрос: не существует ли возможность определить при помощи методов факторизации общие прямые методы для решения систем (1.5) с любой поясной матрицей L, по аналогии похожей на связь между методом простой факторизации и процессом элиминации Гаусса? Этим и занимается настоящий доклад.

В следующей части определена общая проблема и метод, названный методом, основанным на идее переноса краевых условий, или просто методом переноса. В третьей части мы покажем, что процесс элиминации Гаусса и метод прогонки (см. Самарский [3]) — это специальные случаи общего метода. Вообще, почти все прямые методы для уравнений типа (1.5) знакомые автору, являются специальными случаями нашего общего метода. (Более подробно у Малины [2].)

2. Определение метода

Пусть дана система линейных уравнений

$$Ly = f, \tag{2.1}$$

где $L = (l_{ij})_{i,j=1}^{N}$ квадратная поясная матрица с шириной пояса $2p+1$, размерности N, $y = [y_1, \ldots, y_N]^{\mathrm{T}}$ вектор незнакомых размерности N и $f = [f^1, \ldots \ldots, f_N]^{\mathrm{T}}$ есть вектор правых частей, размерности N. Разделим вектор y на систему субвекторов размерности $2p$:

пусть j натуральное число из интервала $[0, 2p-1]$, любое но прочно заранее избранное. Определим

$$x_i^j = [y_{(2p-j)(i-1)+1}, \ldots, y_{(2p-j)i+j}]^{\mathrm{T}}, \quad J = \left[\frac{N-2p}{2p-j}\right], \tag{2.2}$$

где $[m]$ означает целую часть числа m и $i = 1(1)J+1$. Из-за исключения технических трудностей мы предпологаем что $N-2p = J(2p-j)$. Это предположение не существенно, потому что при помощи леммы 2.1 этой части, можно перевести, очень просто, случай $N-2p \neq J(2p-j)$ на случай $N-2p = J(2p-j)$ (детали см. [2]). Значение параметра j означает, что j последних компонент вектора x_i^j повторяется, как первых j компонент вектора x_{i+1}^j. Когда будет из контекста ясно значение параметра j, мы будем вместо x_i^j писать x_i.

Определим матрицы A_i, C_i размерности $2p$ для $i = 1(1)J$ соотношениями

$$A_i = \begin{bmatrix} l_{(2p-j)(i-1)+p+1,(2p-j)(i-1)+1} & \cdots & l_{(2p-j)(i-1)+p+1,(2p-j)i} & 0 & & \cdots & 0 \\ & \ddots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ & & l_{(2p-j)i+p,(2p-j)i} & 0 & & \cdots & 0 \\ & \Theta & & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$C_i = \begin{bmatrix} l_{(2p-j)(i-1)+p+1,(2p-j)i+1} & \cdots & l_{(2p-j)(i-1)+p+1,(2p-j)(i-1)+2p+1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ & & & & & 0 \\ l_{(2p-j)i+p,(2p-j)i+1} & \cdots & & & & l_{(2p-j)i+p,(2p-j)i+2p} \\ -1 & 0 & & & & 0 \\ \Theta & \ddots & \ddots & & & \\ & -1 & 0 & & & 0 \end{bmatrix}$$

и векторы f_i размерности $2p$

$$f_i = [f^{(2p-j)(i-1)+p+1}, \ \ldots, \ f^{(2p-j)i+p}, \ 0, \ \ldots, \ 0]^{\mathrm{T}}.$$

Определим еще матрицы A_0 и A_{J+1} типа $(p, 2p)$ и векторы f_0, f_{J+1} размерности p

$$A_0 = \begin{bmatrix} l_{11} & \cdots & l_{1,p+1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \Theta \\ l_{p1} & & \cdots & & & l_{p,p} \end{bmatrix},$$

$$A_{J+1} = \begin{bmatrix} l_{N-p+1,N-2p+1} & & \cdots & & l_{N-p+1,N} \\ & \ddots & & & \\ & \Theta & l_{N,N-p+1} & \cdots & l_{NN} \end{bmatrix},$$

$$f_0 = [f^1, \ldots, f^p]^{\mathrm{T}}, \quad f_{J+1} = [f^{N-p+1}, \ldots, f^N]^{\mathrm{T}}.$$

Тогда систему (2.1) можно писать в форме

$$A_i x_i + C_i x_{i+1} = f_i, \quad i = 1(1)J, \tag{2.3}$$

$$\begin{aligned} A_0 x_1 &= f_0, \\ A_{J+1} x_{J+1} &= f_{J+1} \end{aligned} \tag{2.4}$$

и можно доказать теорему, что каждое решение y системы (2.1), разделенное в систему субвекторов (2.2) соответствующим образом, есть тоже решением (2.3)–(2.4).

Во-первых, предположим, что все матрицы A_i, C_i для $i = 1(1)J$ неособые. Из их определения вытекает, что они особые в случае, когда у матрицы L есть в какой нибудь строке „ширина пояса" меньше $2p+1$. Если система (2.1) вытекает из разностной аппроксимации определенной краевой задачи для уравнения порядка $2p$, случай особых матриц A_i, C_i означает, что это уравнение в соответствующей точке изменяет порядок на меньший. Из-за этой связи следует и разумно, решать этот случай отдельно тоже в дискретной проблеме (2.1) и эта потребность лежит в основе проблемы, а не в том, какой метод мы подберем для решения системы (2.1).

При нашем предположении о неособенности матриц можно определить матрицы:

$$H_i = A_i^{-1} C_i, \quad i = 1(1)J,$$

и векторы:

$$h_i = A_i^{-1} f_i, \quad i = 1(1)J.$$

Пусть у нас для какого-то индекса $i = i_0$ есть уравнение

$$D_{i_0} x_{i_0} = d_{i_0} \tag{2.5}$$

где D_{i_0} какая-то матрица типа $(q, 2p)$ и d_{i_0} вектор размерности q. Пусть Z_{i_0} любая неособая матрица порядка q. Уравнения (2.3)–(2.4) можно писать в форме

$$x_i + H_i x_{i+1} = h_i, \quad i = 1(1)J. \tag{2.6}$$

Умножим уравнение (2.6) для $i = i_0$ на матрицу $Z_{i_0} D_{i_0}$

$$Z_{i_0} D_{i_0} x_{i_0} + Z_{i_0} D_{i_0} H_{i_0} x_{i_0+1} = Z_{i_0} D_{i_0} h_{i_0},$$

используя (2.5)

$$Z_{i_0} D_{i_0} H_{i_0} x_{i_0+1} = Z_{i_0}(-d_{i_0} + D_{i_0} h_{i_0}), \tag{2.7}$$

определяя $D_{i_0+1} = Z_{i_0} D_{i_0} H_{i_0}$, $d_{i_0+1} = Z_{i_0}(-d_{i_0} + D_{i_0} h_{i_0})$, можно (2.7) писать в форме

$$D_{i_0+1} Z_{i_0+1} = d_{i_0+1}. \tag{2.8}$$

Уравнения (2.5) и (2.7)–(2.8) дадут нам указание для определения переноса условия (2.5) через „точку i_0" в „точку i_0+1". И так, можно доказать:

Теорема 2.1. *Пусть* $\{x_i\}_1^{J+1}$ *исполняет* $A_i x_i + C_i x_{i+1} = f_i$, $i = 1(1)J$ *и для какого-нибудь* $i_0 \in \{1, \ldots, J\}$ *есть* $R_0 x_{i_0} = r_0$, *где* R_0 *есть матрица типа* $(q, 2p)$ *и* r_0 *вектор размерности* q. *Определим матрицы* D_i *и векторы* d_i *соотношениями*:

$$D_{i+1} = Z_i D_i H_i, \quad d_{i+1} = Z_i(-d_i + D_i h_i), \tag{2.9}$$

где Z_i *любые неособые матрицы порядка* q_i. *Пусть*

$$D_{i_0} = R_0, \quad d_{i_0} = r_0.$$

Тогда

$$D_i x_i = d_i \quad \textit{для всех } i = 1(1)J+1. \tag{2.10}$$

При помощи теоремы 2.1 можно определить перенос условия $A_0 x_1 = f_0$, полагая в ней $R_0 = A_0$, $r_0 = f_0$, $i_0 = 1$, „из точки 1" через „точки i" в „точку $J+1$".

Обратный шаг, т.е., перенос условия $A_{J+1} x_{J+1} = f_{J+1}$ можно осуществить следующим процессом.

Для каждого i пополним матрицу D_i матрицей R_i так, чтобы была квадратной неособой матрицей и вектора r_i изберем так, что

$$R_i x_i = r_i, \quad i = 1(1)J+1. \tag{2.11}$$

Рекуренции для r_i получим следующим образом.

Умножим уравнение (2.6) на матрицу R_i

$$R_i x_i + R_i H_i x_{i+1} = R_i h_i. \tag{2.12}$$

Предположим, что R_{i+1} и r_{i+1} подобраны уже так, что $\begin{bmatrix} D_{i+1} \\ R_{i+1} \end{bmatrix}$ неособая и

$$R_{i+1} x_{i+1} = r_{i+1}. \tag{2.13}$$

Тогда из (2.13) и (2.10) для x_{i+1} вытекает

$$x_{i+1} = \begin{bmatrix} D_{i+1} \\ R_{i+1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} d_{i+1} \\ r_{i+1} \end{bmatrix}.$$

Подставим это в уравнение (2.12)

$$R_i x_i = R_i h_i - R_i H_i \begin{bmatrix} D_{i+1} \\ R_{i+1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} d_{i+1} \\ r_{i+1} \end{bmatrix}$$

и чтобы выполнялось (2.11) хватит, чтобы

$$r_i = R_i h_i - R_i H_i \begin{bmatrix} D_{i+1} \\ R_{i+1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} d_{i+1} \\ r_{i+1} \end{bmatrix} \quad \text{для} \quad i = J(-1)1. \tag{2.14}$$

Для образования начального условия для (2.14) используем „правое краевое условие" $A_{J+1} x_{J+1} = f_{J+1}$. При предположении существования единственного решения системы (2.1) для всех правых частей можно доказать, что матрица $\begin{bmatrix} D_{J+1} \\ A_{J+1} \end{bmatrix}$ неособая. Используя (2.10) для $i = J+1$ и (2.4), получим:

$$x_{J+1} = \begin{bmatrix} D_{J+1} \\ A_{J+1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} d_{J+1} \\ f_{J+1} \end{bmatrix}.$$

Требование $R_{J+1} x_{J+1} = r_{J+1}$ даст нам искомое начальное условие

$$r_{J+1} = R_{J+1} \begin{bmatrix} D_{J+1} \\ A_{J+1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} d_{J+1} \\ f_{J+1} \end{bmatrix}. \tag{2.15}$$

Замечание. Существует возможность выбрать матрицы R_i таким образом, чтобы две решения $r_i, \bar{r}_i$ уравнения (2.14) для различных начальных данных отличались на постоянную. Тогда можно решать (2.14) совместно с (2.9) с любым значением $\bar{r}_1$ и после определения $\bar{r}_{J+1}$, отыскать „поправку" $\Delta = \bar{r}_i - r_i$. Именно хватит:

$$R_i H_i \begin{bmatrix} D_{i+1} \\ R_{i+1} \end{bmatrix}^{-1} = [T_i, E],$$

где T_i любая квадратная матрица размерности равняющейся числу строк D_{i+1} и E единичная матрица. Этим выбором можно существенно понизить требования к памяти ЭВМ.

Вторая возможность это определить $\hat{D}_i$ и $\hat{d}_i$ соотношениями (2.9), только перенос начинаем из „точки $J+1$" и поступаем в „точку 1". Значит, определим:

$$\hat{D}_{J+1} = A_{J+1}, \quad \hat{d}_{J+1} = f_{J+1}.$$

При предложении о единственности решения системы (2.1) для любых правых частей можно доказать, что матрицы $\begin{bmatrix} D_i \\ \hat{D}_i \end{bmatrix}$ неособые для всех i и можно определить $R_i = \hat{D}_i$, $r_i = \hat{d}_i$.

Теперь займемся общим случаем. Значит, некоторые из матриц A_i, C_i могут быть особыми. Разделим множество $M = \{1, \ldots, J+1\}$ следующим образом:

$$M = M_0 \cup M_1 \cup M^1 \cup M_1^1,$$

где $M_0 = \{i \in M \mid A_i,\ C_i$ неособые$\}$, $M_1 = \{i \in M \mid A_i$ неособая, C_i особая$\}$, $M^1 = \{i \in M \mid A_i$ особая, C_i неособая$\}$, $M_1^1 = \{i \in M \mid A_i,\ C_i$ особые$\}$.

Следующая лемма из [4] будет очень полезна для решения нашей проблемы.

Лемма 2.1. *Пусть C_1 есть типа (a_1, k), ранг $C_1 = h_1$, C_2 есть типа (a_2, k), ранг $C_2 = h_2$ и ранг $\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = h_3$. Тогда существуют матрицы R_1, R_2 так, что*

(1) $R_1 C_1 = R_2 C_2$,

(2) ранг $(R_1 C_1)$ = ранг $(R_2 C_2)$ $= h_1 + h_2 - h_3$ и равняется числу их строк.

Прямый шаг: Пусть $i \in M^1 \cup M_1^1$ и

$$\text{ранг } A_i = 2p - a_i.$$

Уравнение:

$$A_i x_i + C_i x_{i+1} = f_i$$

можно эквивалентно переписать в форме (умножением на неособую матрицу порядка $2p$ слева):

$$\begin{bmatrix} A_{i1} \\ \Theta \end{bmatrix} x_i + \begin{bmatrix} C_{i1} \\ C_{i2} \end{bmatrix} x_{i+1} = \begin{bmatrix} f_{i1} \\ f_{i2} \end{bmatrix}, \tag{2.16}$$

где матрицы C_{i1}, A_{i1} типа $(2p - a_i, 2p)$, ранг A_{i1} = числу строк. C_2 есть типа $(a_i, 2p)$ и ранг C_{i2} = числу строк (предполагаем, что система (2.1) имеет единственное решение для всех правых частей). В ,,точке i'' у нас D_i, d_i ($D_1 = A_0$, $d_1 = f_0$) такие, что

$$D_i x_i = d_i. \tag{2.17}$$

Мы хотим перенести самое большое число условий через ,,точку i'' в ,,точку $i+1$''. Поэтому мы i-тое уравнение системы (2.3) строили в виде (2.16).

Из леммы 2.1 вытекает существование матриц $R_1^{(i)}$, $R_2^{(i)}$ так, что

$$R_1^{(i)} D_i = R_2^{(i)} A_{i1}. \tag{2.18}$$

Тогда из (2.16)–(2.18) вытекает:

$$\begin{bmatrix} R_2^{(i)} C_{i1} \\ C_{i2} \end{bmatrix} x_{i+1} = \begin{bmatrix} R_2^{(i)} f_{i1} - R_1^{(i)} d_i \\ f_{i2} \end{bmatrix}$$

и определяем:

$$D_{i+1} = \begin{bmatrix} R_2^i C_{i1} \\ C_{i2} \end{bmatrix}, \tag{2.19}$$

$$d_{i+1} = \begin{bmatrix} R_2^i f_{i1} - R_1^i d_i \\ f_{i2} \end{bmatrix}. \tag{2.20}$$

Обратим внимание на обратный шаг. Пусть $i \in M_1 \cup M_1^1$ и

$$\text{ранг } C_i = 2p - m_i,$$

тогда i-тое уравнение системы (2.3) можно писать в форме аналогично (2.16) (умножением на неособую матрицу $\hat{K}$ слева):

$$\begin{bmatrix} A_i^{(1)} \\ A_i^{(2)} \end{bmatrix} x_i + \begin{bmatrix} C_i^{(1)} \\ \Theta \end{bmatrix} x_{i+1} = \begin{bmatrix} f_i^{(1)} \\ f_i^{(2)} \end{bmatrix}, \tag{2.21}$$

где матрицы $A_i^{(1)}$, $C_i^{(1)}$ типа $(2p - m_i, 2p)$, ранг $C_i^{(1)} = 2p - m_i$, ранг $A_i^{(2)} = m_i$ и равняется числу строк.

Для обратного шага пусть у нас уже имеется уравнение:

$$\hat{D}_{i+1} x_{i+1} = \hat{d}_{i+1}. \tag{2.22}$$

Используя лемму 2.1, существуют матрицы $R_i^{(1)}$, $R_i^{(2)}$ так, что

$$R_i^{(1)} \hat{D}_{i+1} = R_i^{(2)} C_i^{(1)}. \tag{2.23}$$

Тогда из (2.21)–(2.23) вытекает:

$$\hat{D}_i x_i = \hat{d}_i,$$

где

$$\hat{D}_i = \begin{bmatrix} R_i^{(2)} A_i^{(1)} \\ A_i^{(2)} \end{bmatrix}, \tag{2.24}$$

$$\hat{d}_i = \begin{bmatrix} R_i^{(2)} f_i^{(1)} - R_i^{(1)} \hat{d}_{i+1} \\ f_i^{(2)} \end{bmatrix}. \tag{2.25}$$

Теперь мы уже можем определить общий метод переноса для решения уравнения (2.1).

Алгорифм $\mathscr{A}$:

(a) прямый шаг: определим $D_1 = A_0$, $d_1 = f_0$.

Для $i \in M_0 \cup M_1$ определим матрицу D_{i+1} и вектор d_{i+1} соотношениями (2.9).

Для $i \in M^1 \cup M_1^1$ определим матрицу D_{i+1} и вектор d_{i+1} соотношениями (2.19) и (2.20).

Во всяком случае:

$$D_i x_i = d_i \quad \text{для всех } i = 1(1)J+1.$$

(б) обратный шаг: Для $i \in M_0 \cup M^1$ определим матрицу $\hat{D}_i$ из $\hat{D}_{i+1}$ и вектор $\hat{d}_i$ из $\hat{d}_{i+1}$ как в замечании, соотношениями (2.9), начиная с $\hat{D}_{J+1} = A_{J+1}$, $\hat{d}_{J+1} = f_{J+1}$, для индексов i падающих с $i = J+1$ в $i = 1$.

Для $i \in M_1 \cup M_1^1$ определим $\hat{D}_i$ соотношением (2.24) и вектор $\hat{d}_i$ соотношением (2.25).

Опять, во всяком случае:

$$\hat{D}_i x_i = \hat{d}_i \quad \text{для всех } i = J+1(-1)1.$$

Алгорифмом $\mathscr{A}$ мы заменили решение системы (2.1), решением последовательности систем:

$$\Phi_i x_i = \varphi_i \quad \text{для} \quad i = 1(1)J+1, \quad \text{где } \Phi_i = \begin{bmatrix} D_i \\ \hat{D}_i \end{bmatrix}, \ \varphi_i = \begin{bmatrix} d_i \\ \hat{d}_i \end{bmatrix}. \tag{2.26}$$

Можно доказать теорему о эквивалентности.

ТЕОРЕМА 2.2 *Положим, что решение системы* (2.1) *является единственным для всех* f. *Тогда* $\{x_i\}_{i=1}^{J+1}$ *является единственным решением* $A_i x_i + C_i x_{i+1} = f_i$, $i = 1(1)J$ *тогда и только тогда, когда* $\{x_i\}_{i=1}^{J+1}$ *есть решение* (2.26) *для* $i = 1(1)J+1$.

3. Примеры знакомых методов, входящих в рамки нашего метода

Элиминация Гаусса для системы с тридиагональной матрицой L. Выберем значение параметра $j = 1$. Тогда

$$x_i^1 = [y_i, y_{i+1}]^{\mathrm{T}}, \quad i = 1(1)J+1,$$
$$f_i = [f^{i+1}, 0]^{\mathrm{T}}.$$

Пусть L такая, что все A_i, C_i неособые матрицы. Для матриц H_i и векторов h_i при этом предположении имеем:

$$H_i = \begin{bmatrix} \dfrac{l_{i+1,i+1}}{l_{i+1,i}} & \dfrac{l_{i+1,i+2}}{l_{i+1,i}} \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad h_i = \begin{bmatrix} \dfrac{f^{i+1}}{l_{i+1,i}} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Для $D_i = [D_i^{(1)}, D_i^{(2)}]$ и d_i уравнения (2.9) имеют вид:

$$[D_{i+1}^{(1)}, D_{i+1}^{(2)}] = Z_i\left[D_i^{(1)}\frac{l_{i+1,i+1}}{l_{i+1,i}} - D_i^{(2)}, \frac{l_{i+1,i+2}}{l_{i+1,i}}D_i^{(1)}\right],$$

$$D_1 = A_0, \quad d_{i+1} = Z_i\left(-d_i + D_i^{(1)}\frac{f^{i+1}}{l_{i+1,i}}\right), \quad d_1 = f_0.$$

Матрицы Z_i (в этом случае числа) определим таким образом, чтобы

$$D_{i+1}^{(2)} = l_{i+1,i+2}, \quad i = 0(1)J.$$

Значит

$$Z_i = \frac{l_{i+1,i}}{D_i^{(1)}}$$

и уравнения для $D_{i+1}^{(1)}$, d_{i+1} принимают вид

$$D_{i+1}^{(1)} = l_{i+1,i+1} - \frac{l_{i,i+1}}{D_i^{(1)}}l_{i+1,i}, \quad D_1^{(1)} = l_{11}, \quad i = 1(1)J, \tag{3.1}$$

$$d_{i+1} = f^{i+1} - d_i\frac{l_{i+1,i}}{D_i^{(1)}}, \quad d_1 = f^1. \tag{3.2}$$

Уравнения (3.1)–(3.2) суть уравнения прямого хода элиминации Гаусса.

Обратный шаг реализуем пополнением матриц D_i на неособые, матрицами $R_i = [0, 1]$ так, что $R_i x_i = r_i$. Для начального условия r_{J+1} (2.15), у нас

$$r_{J+1} = \frac{d_{J+1}}{D_{J+1}^{(1)}}$$

и нетрудно видеть, что (2.14) принимает вид:

$$r_i = \frac{d_i}{D_i^{(1)}} - \frac{l_{i+1,i}}{D_i^{(1)}}r_{i+1}. \tag{3.3}$$

Для отыскания решения (2.1) хватит $y_i = r_i$ и (3.3) является уравнением обратного хода элиминации Гаусса.

Метод прогонки. Пусть задана система линейных уравнений с блочно-тридиагональной матрицей L:

$$C_i Y_{i-1} - B_i Y_i + A_i Y_{i+1} = -F_i, \quad i = 1(1)N-1$$

и краевые условия:

$$-B_0 Y_0 + A_0 Y_1 = -F_0,$$
$$C_N Y_{N-1} - B_N Y_N = -F_N,$$

где C_i, B_i, A_i квадратные матрицы и пусть существует B_i^{-1} для всех i. Определим

$$x_i = [Y_{i-1}, Y_i]^{\mathrm{T}},$$

значит $j = 1$. Эту систему можно писать в виде (2.6), где

$$H_i = \begin{bmatrix} -C_i^{-1}B_i & C_i^{-1}A_i \\ -E & 0 \end{bmatrix}, \quad h_i = [-C_i^{-1}F_i, 0]^{\mathrm{T}}$$

и E единичная матрица.

Опять, прямой шаг определен соотношениями (2.9) и выберем

$$Z_i = -(B_i + C_i D_i^{(2)})^{-1}C_i, \quad i = 1(1)N-1,$$

где $D_i = [D_i^{(1)}, D_i^{(2)}]$, $D_i^{(1)}$, $D_i^{(2)}$ квадратные матрицы.

Тогда для $D_i^{(1)}$ у нас уравнение:

$$D_i^{(1)} = E$$

и для $D_i^{(2)}$:

$$-D_{i+1}^{(2)} = (B_i + C_i D_i^{(2)})^{-1}A_i. \tag{3.4}$$

Для d_i:

$$d_{i+1} = (B_i + C_i D_i^{(2)})^{-1}(F_i + C_i d_i), \quad i = 1(1)N-1, \tag{3.5}$$

с начальными условиями:

$$D_1^{(2)} = -B_0^{-1}A_0, \quad d_1 = B_0^{-1}F_0. \tag{3.6}$$

Для обратного шага пополним матрицы D_i на неособые блочными матрицами $R_i = [0, E]$. Вектор x_N исполняет уравнение

$$\begin{bmatrix} E & D_N^{(2)} \\ C_N & -B_N \end{bmatrix} x_N = \begin{bmatrix} d_N \\ -F_N \end{bmatrix},$$

значит

$$y_N = (B_N + C_N D_N^{(2)})^{-1}(F_N + C_N d_N).$$

Соотношение (2.14) в нашем случае, как не трудно видеть, есть

$$Y_{i-1} = -D_i^{(2)} y_i + d_i, \quad i = N(-1)1. \tag{3.7}$$

Сравнение с соотношениями матричной прогонки в [3], уравнения (3.4)–(3.7) есть не что инное, как эта прогонка, при определении $x_i = -D_i^{(2)}$.

Литература

[1] И. Бабушка, Э. Витасек и М. Прагер, *Численные процессы решения дифференциальных уравнений*, „Мир", Москва 1969.

[2] L. Malina, *General theory of direct methods for solving systems with band matrices*, to appear in Aplikace mathematiky.

[3] А. А. Самарский, *Введение в теорию разностных схем*, „Наука", Москва 1971.

[4] J. Taufer, *Lösung der Randwertprobleme für Systeme von Linearen Differentialgleichungen*, Rozpravy ČSAV, 83, No. 5, 1973.

[5] T. C. T. Ting, *A method of solving a system of linear equations whose coefficients form a tri-diagonal matrix*, Quart. Appl. Maths. 22 (1964), стр. 105–116.

[6] J. R. Westlake, *A handbook of numerical matrix inversion and solution of linear equations*, J. Wiley & Sons, Inc., New York 1968.

Presented to the Semester
Mathematical Models and Numerical Methods
(February 3–June 14, 1975)

BANACH CENTER PUBLICATIONS
VOLUME 3

THE RECURRENT CALCULATION OF THE INVERSE OF A SPECIAL CLASS OF MATRICES

FRANTIŠEK MIKLOŠKO

Slovak Academy of Sciences, Institut of Technical Cybernetics, Bratislava, ČSSR

1. Introduction

In this paper the notion of an F-matrix is introduced and two new algorithms to calculate its inverse are suggested.

The first calculates the inverse of an F-matrix with the aid of the inverse of a triangular matrix arising by an adequate adjustment of the original matrix. The second settles the same problem with the aid of recurrent relations.

Both algorithms are appraised from the viewpoint of the number of their arithmetical operations, being thereby compared with the Gauss method of inverse of that type of matrices.

In conclusion it is shown that the algorithms suggested may be usefully utilized to calculate the inverse of an F-matrix if this is of large dimension and sparse.

The notion of an F-matrix is introduced by the following

DEFINITION 1. A real square regular matrix of nth order $A = (a_{ij})$ is called an *F-matrix* if

(a) $a_{ij} = 0$ for $j-i > w$,

(b) $a_{ij} \neq 0$ for $j-i = w$,

$i = 1, 2, \ldots, n, j = i+w, i+w+1, \ldots, n$, where $1 \leqslant w \leqslant n-1$ is a given natural number.

Remark. The presuppositions of Definition 1 being satisfied, an upper Hessenberg matrix is an F-matrix with $w = 1$. A diagonal $(2w+1)$-matrix is also an F-matrix.

2. The algorithm M1

Let A be an F-matrix. Border it successively from above with n-dimensional vectors e_j^T, where $e_j^T = (0, 0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ and from right with $(n+w)$-dimensional basic vectors $f_s, f_s^T = (0, 0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ in which there is 1 at the jth or sth point, respectively. We get thereby a lower triangular matrix of $(n+w)$th order, denoted T.