References

[1] A. Borodin and I. Munro, *The Computational Complexity of Algebraic and Numeric Problems*, American Elsevier, 1975.
[2] R. P. Brent and H. T. Kung, *$O((n\log n)^{3/2})$ Algorithms for Composition and Reversion of Power Series*, in: *Analytic Computational Complexity*, Academic Press, 1976.
[3] R. P. Brent, and H. T. Kung, in progress.
[4] D. E. Heller, *A survey of parallel algorithms in numerical linear algebra*, Dept. of Computer Science Report, Carnegie-Mellon University, 1976.
[5] B. Kacewicz, *Integral Information for the Solution of Systems of Nonlinear Equations*, in: *Analytic Computational Complexity*, Academic Press, 1976, pp. 217–225.
[6] H. T. Kung and J. F. Traub, *Optimal Order of One-Point and Multipoint Iteration*, JACM 21 (1974), pp. 643–651.
[7] J. F. Traub (editor), *Complexity of Sequential and Parallel Numerical Algorithms*, Academic Press, 1973.
[8] J. F. Traub (editor), *Analytic Computational Complexity*, Academic Press, 1976.
[9] J. F. Traub and H. Woźniakowski, *Strict Lower and Upper Bounds on Iterative Computational Complexity*, in: *Analytic Computational Complexity*, Academic Press, 1976, pp. 15–34.
[10] H. Woźniakowski, *Maximal Order of Multipoint Iterations Using n Function Evaluations*, in: *Analytic Computational Complexity*, Academic Press, 1976, pp. 75–108.

Presented to the Semester
Mathematical Models and Numerical Methods
(February 3–June 14, 1975)

BANACH CENTER PUBLICATIONS
VOLUME 3

МЕТОД КОЛЛОКАЦИИ ПРИ РЕШЕНИИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И СИСТЕМ

В. В. ВОРОНИН, В. А. ЦЕЦОХО
Вычислительный Центр СО АН СССР, Новосибирск, СССР

Сформулируем наш метод на примере одного интегрального уравнения первого рода:

$$A\varphi \equiv \int_{\Gamma} K(x,y)\varphi(y)\,dy = f(x), \quad x\in\Gamma, \tag{1}$$

где Γ — гладкая замкнутая кривая на плоскости, x, y — точки на Γ.

Пусть ядро $K(x,y)$ имеет логарифмическую особенность, то есть представимо в виде $\ln|x-y|+K_1(x,y)$, где K_1 — гладкая функция. При этом оператор A действует непрерывно из пространства $C^{n,\alpha}$ в $C^{n+1,\alpha}$ для любого целого r; $0<\alpha<1$. Тогда к этому уравнению применим не только метод регуляризации, но и следующий прямой метод.

Параметризуем Γ: $x = x(t)$, $t\in[0,1]$ и, сохранив для функций прежние обозначения, перепишем уравнение (1) в виде

$$A\varphi \equiv \int_0^1 K(t,\tau)\varphi(\tau)\,d\tau = f(t), \quad t\in[0,1]. \tag{2}$$

Все функции считаем периодически продолженными.

Пусть $\tau_i = i\times h$ $(i = 1,\dots,n)$; $h = 1/n$; $b_i(\tau) = b(\tau-\tau_i)$ — базисные функции интерполяции, то есть $b_i(\tau_j) = \delta_{ij}$. Функцию $b(\tau)$ считаем чётной. Приближенное решение ищем в виде:

$$\tilde\varphi(\tau) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i b_i(\tau).$$

Неизвестные величины φ_i отыскиваем из условий коллокации:

$$A\tilde\varphi(\tau_j) = f(\tau_j), \quad j = 1,\dots,n. \tag{3}$$

Теорема. *Пусть уравнение* (1) *однозначно разрешимо, и существует такое целое $p\geqslant 2$, что для любой функции $g\in C^p$*

$$\max_{\tau}\left|\left[g(\tau)-\sum_{i=1}^{n} g(\tau_i)b_i(\tau)\right]^{(s)}\right| \leqslant L_s h^{p-s}\|g^{(p)}\|_C \quad \text{при} \quad s\leqslant p-1,$$

где $L_0 \leqslant 1/2$, $L_k \leqslant 1$ $(k=1,\dots,p-1)$.

Тогда при достаточно большом n *система* (3) *разрешима относительно* φ_i, *и имеют место оценки*

$$\|A\tilde{\varphi}-f\|_C \leqslant \text{const}\cdot\|f\|_{C^r}\gamma_{r,p}(h),$$

$$\|\tilde{\varphi}-\varphi\|_{C^{0,\alpha}} \leqslant \text{const}\cdot\|A\tilde{\varphi}-f\|_{C^{1,\alpha}} \leqslant \text{const}\cdot\|f\|_{C^r}\gamma_{r,p}(h)\,h^{-1-\alpha},$$

где $\gamma_{r,p}(h)=h^{r-1}$, $h^{p+1}|\ln h|$ *или* h^{p+1} *соответственно при* $r\leqslant p+1$, $r=p+2$ *и* $r>p+2$.

Эти результаты изложены в работах [1], [2].

Рассмотрим задачи, в которых применялся такой метод.

1) Задача Дирихле для уравнения Лапласа:

$$\Delta u(x)=0, \qquad x\in D,$$
$$u(x)=f(x), \qquad x\in\Gamma,$$

где Γ — гладкая замкнутая кривая на плоскости, D — ограниченная ею внутренняя область. Ищем $u(x)$ в виде потенциала простого слоя:

$$u(x)=\int_{\Gamma}\varphi(y)\ln(\mu|x-y|)\,dy.$$

Для всех значений μ, кроме одного, соответствующее интегральное уравнение однозначно разрешимо, и можно пользоваться методом коллокации.

2) Численные эксперименты показали эффективность метода коллокации при решении интегрального уравнения Абеля:

$$\int_0^x \frac{u(y)}{\sqrt{x-y}}\,dy=f(x).$$

3) Двумерная задача дифракции акустической волны на упругом теле. Пусть замкнутая гладкая кривая Γ делит плоскость на области внешнюю (D_e) и внутреннюю (D_i). D_e заполнена жидкостью с плотностью ϱ и скоростью распространения волн c; D_i — упругой средой с плотностью I и константами Ляме λ, μ. Поле смещений в установившейся волне имеет вид $\mathrm{Re}\{\vec{u}(x)e^{-i\omega t}\}$. В D_e функцию $\vec{u}(x)$ ищем в виде $\vec{u}(x)=\vec{u}_0(x)+\vec{u}_e(x)$; в D_i — $\vec{u}(x)=\vec{u}_i(x)$; $\vec{u}_0(x)$ — известная функция, которая соответствует исходной волне. Если перейти к звуковым потенциалам, имеем: $\vec{u}_e=\mathrm{grad}\,\Phi$, $\vec{u}_0=\mathrm{grad}\,\Phi_0$. Функция $\Phi(x)$ должна удовлетворять уравнению $\Delta\Phi+\omega^2/c^2\Phi=0$ и условию излучения: $\left(\dfrac{\partial\Phi}{\partial r}-i\dfrac{\omega}{c}\Phi\right)\sqrt{r}\to 0$ при $r\to\infty$. Давление в звуковой волне равно $\varrho\omega^2\Phi$.

В области D_i функция $\vec{u}_i(x)=(u_1(x),u_2(x))$ удовлетворяет уравнению

$$\Delta^*\vec{u}_i+\omega^2\vec{u}_i=0, \quad \text{где} \quad \Delta^*=\mu\Delta+(\lambda+\mu)\,\mathrm{grad\,div}.$$

При этом напряжение на площадке с нормалью $\vec{n}=(n_1,n_2)$ равно

$$T^{(n)}\vec{u}_i=2\mu\frac{\partial\vec{u}_i}{\partial n}+\lambda\vec{n}\cdot\mathrm{div}\,\vec{u}_i+\mu(n_2,-n_1)\cdot\left[\frac{\partial u_2}{\partial x_1}-\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right].$$

Зададим на Γ условия согласования: а) совпадают нормальные компоненты смещения; б) давление снаружи равно нормальной компоненте напряжения изнутри; в) тангенциальная компонента напряжения равна нулю.

Функции $\vec{u}_i(x)$ и $\Phi(x)$ ищем в виде потенциалов:

$$\vec{u}_i(x)=\int_{\Gamma}[\lambda_1(y)\vec{\Gamma}^{(1)}(x,y)+\lambda_2(y)\vec{\Gamma}^{(2)}(x,y)]\,dy,$$

$$\Phi(x)=\int_{\Gamma}\lambda_3(y)H_0^{(1)}(\omega|x-y|/c)\,dy,$$

где $\vec{\Gamma}^{(i)}(x,y)$ $(i=1,2)$ — фундаментальные решения для оператора Δ^* (см. [4]) в пространстве, заполненном упругой средой; $H_0^{(1)}$ — функция Ханкеля. Условия согласования дают для определения неизвестных $\lambda_1(y)$, $\lambda_2(y)$, $\lambda_3(y)$ систему сингулярных интегральных уравнений

$$\frac{\partial\Phi_0}{\partial n}(x)+2i\lambda_3(x)+\int_{\Gamma}\lambda_3(y)\frac{\partial}{\partial n_x}H_0^{(1)}(\omega|x-y|/c)\,dy=$$
$$=\int_{\Gamma}[\lambda_1(y)\vec{\Gamma}^{(1)}(x,y)\cdot\vec{n}(x)+\lambda_2(y)\vec{\Gamma}^{(2)}(x,y)\cdot\vec{n}(x)]\,dy,$$

$$\varrho\omega^2\Phi_0(x)+\varrho\omega^2\int_{\Gamma}\lambda_3(y)H_0^{(1)}(\omega|x-y|/c)\,dy=$$
$$=-2i(n_1(x)\lambda_1(x)+n_2(x)\lambda_2(x))+$$
$$+\int_{\Gamma}[\lambda_1(y)T^{(n)}\vec{\Gamma}^{(1)}(x,y)\cdot\vec{n}(x)+\lambda_2(y)T^{(n)}\vec{\Gamma}^{(2)}(x,y)\cdot\vec{n}(x)]\,dy,$$

$$0=2i(n_2(x)\lambda_1(x)-n_1(x)\lambda_2(x))+$$
$$+\int_{\Gamma}[\lambda_1(y)T^{(n)}\vec{\Gamma}^{(1)}(x,y)\cdot\vec{t}(x)+\lambda_2(y)T^{(n)}\vec{\Gamma}^{(2)}(x,y)\cdot\vec{t}(x)]\,dy.$$

Здесь $\vec{t}(x)=(t_1(x),t_2(x))$ — вектор, касательный к Γ; $t_2=n_1$; $t_1=-n_2$. Можно показать, что если $-\omega^2/c^2$ не является собственным числом для оператора Лапласа в области D_i, то система однозначно разрешима относительно $\lambda_j(y)$ $(j=1,2,3)$. Зная $\lambda_j(y)$, находим $\vec{u}_i(x)$ и $\Phi(x)$. И для этой задачи метод коллокации даёт хорошие результаты.

4) Ранее аналогичный метод был предложен в работе [3] для дифракции электромагнитных волн; и при численном решении соответствующей системы интегральных уравнений также использовался метод коллокации.

Преимущества метода потенциала при решении задач дифракции состоят в том, что волновое поле одинаково просто вычисляется всюду вне Γ, и оно автоматически удовлетворяет соответствующим дифференциальным уравнениям; погрешность зависит лишь от того, насколько точно выполняются условия согласования на границе раздела сред. К недостаткам можно отнести то, что, во-первых, нужно уметь вычислять фундаментальное решение или функцию Грина, входящие в ядра интегральных операторов, во-вторых, — наличие на Γ угловых точек несколько усложняет решение задачи.

Литература

[1] В. В. Воронин, В. А. Цецохо, *Численное решение интегрального уравнения первого рода с логарифмической особенностью*. В сб. „Математические проблемы геофизики", вып. 4, Новосибирск 1973, стр. 212–228.

[2] —, —, *Интерполяционный метод решения интегрального уравнения первого рода с логарифмической особенностью*, Докл. АН СССР 216.6 (1974), стр. 1209–1211.

[3] В. В. Дробница, В. А. Цецохо, *Метод расчёта плоского электромагнитного поля в среде со слоем переменной толщины*. В сб. „Математические проблемы геофизики", вып. 2, Новосибирск 1971, стр. 251–284.

[4] В. Д. Купрадзе, *Граничные задачи теории колебаний и интегральные уравнения*, Москва–Ленинград 1950.

Presented to the Semester
Mathematical Models and Numerical Methods
(February 3–June 14, 1975)

BANACH CENTER PUBLICATIONS
VOLUME 3

GLOBALLY CONVERGENT DIFFERENTIAL PROCEDURES FOR SOLVING NONLINEAR SYSTEMS OF EQUATIONS

DOMINIC G. B. EDELEN

Center for the Application of Mathematics, Lehigh University, Bethlehem, Pennsylvania 18015, USA

1. Introduction

One of the more intriguing ideas put forth with respect to the problem of solving nonlinear equations is that of constructing systems of differential equations with a parameter t such that solutions of the differential equations will converge to solutions of the nonlinear equations for large t. Although such a procedure is a useful one in view of the relative ease with which systems of differential equations can be solved by high speed computers, there are three basic difficulties associated with it. The first is that of establishing the initial data for which solutions of the differential equations converge for large t; the ideal situation being that of global convergence (i.e. for all finite initial data). The second is that of determining whether the limit points of the solutions of the differential equations consist only of solutions of the original nonlinear system, or whether there are additional spurious limit points. And the third is that of determining the rate of convergence. Since the analysis given in this note takes a somewhat different approach to these problems than has been reported in the literature, it does not seem appropriate to cite specific references to the extensive and excellent body of work on this subject. The readers familiar with these problems will have little difficulty in perceiving parallels and implications with respect to the various methods in current use.

We first give a general procedure for constructing families of globally convergent systems of differential equations with a single point of convergence $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$. This is achieved by means of Liaponov's method of determining asymptotic stability. Application of this procedure to the problem of solving the system $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ is shown to yield a globally convergent method if $\Delta(\boldsymbol{x}) = \det(\partial y_i/\partial x_j) \neq 0$ for all $\boldsymbol{x}$. If $\Delta(\boldsymbol{x}) = 0$ on some nonempty set of points, then the same procedure as used in the case $\Delta(\boldsymbol{x}) \neq 0$ implies that the norm of $d\boldsymbol{x}(t)/dt$ can grow without bound. We construct two different classes of procedures that give global convergence for problems with $\Delta(\boldsymbol{x}) = 0$. These procedures converge to all solutions of $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$, but have additional spurious points of convergence that are contained in the set $\Delta(\boldsymbol{x}) = 0$. The