with equality holding if and only if $\boldsymbol{w} = \mathbf{0}$; that is, if and only if (5.8) holds, in which case (5.12) yields $\partial_t \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$. Now, we have

$$L(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\alpha}) \geqslant J, \qquad \frac{d}{dt} L(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\alpha}) \leqslant 0$$

and hence we obtain a contradiction unless $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{d}{dt} L(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\alpha}) = 0$. We have seen, however, that this can be the case if and only if $\lim\limits_{t\to\infty} \boldsymbol{w} = \mathbf{0}$, in which case we also obtain $\lim\limits_{t\to\infty} \partial_t \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$. The desired result is then established on noting that all solutions of (5.12) satisfy $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{0}$ since $\det(\boldsymbol{B}) \neq 0$.

References

[1] D. F. Davidenko, Ukr. Mat. Z. 5 (1953), p. 196; F. H. Branin, *Memoirs IEEE Conference on Systems, Networks and Computers*, Oaxtepec, Mexico 1971.

[2] I. M. Gelfand and S. V. Fomin, *Calculus of Variations*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs 1963.

Presented to the Semester
Mathematical Models and Numerical Methods
(February 3–June 14, 1975)

BANACH CENTER PUBLICATIONS
VOLUME 3

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕКОРРЕКТНЫХ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ

А. Н. ТИХОНОВ, Ф. П. ВАСИЛЬЕВ

Московский Государственный Университет, Факультет Вычислительной Математики и Кибернетики, Москва, СССР

При численном решении прикладных задач важное значение имеет тот факт, будет ли решение рассматриваемой задачи непрерывно зависеть от исходных данных или, иначе говоря, будет ли искомое решение устойчивым по отношению к возмущениям входных данных в той или иной топологии. Если решение устойчиво по входным данным, то можно быть уверенным в том, что достаточно малые погрешности в задании входных данных приведут к малым погрешностям в определении решения. Иное дело решать неустойчивую или, как говорят, некорректную задачу, решение которой не является непрерывно зависящим от входных данных: в этом случае приближённое решение задачи, отвечающее неточным входным данным, может как угодно сильно отличаться от искомого точного решения. Между тем некорректные задачи возникают в самых различных областях физики, техники, экономики и т.д. [1], и возникает важная проблема: как численно решать такие задачи?

Основы теории и методов решения некорректных задач заложены в работах А. Н. Тихонова, В. К. Иванова, М. М. Лаврентьева [1]–[15]. К настоящему времени создана достаточно полная общая теория некорректных задач, созданы приближённые методы решения таких задач, с помощью которых успешно решены и решаются многие прикладные задачи. По поводу общей теории некорректных задач и её приложений, а также библиографии по этим вопросам отсылаем читателя к [1], [15], [16].

В настоящей статье будут систематически и единообразны исследованы методы решения некорректных задач, непосредственно связанных с задачами математического программирования, оптимального управления и другими экстремальными задачами; из литературы здесь упомянем [1], [8]–[72].

1. Постановка задачи

Многие практически важные задачи приводят к поиску экстремума (минимума или максимума) функционала, выражающего то или иное качество изучаемого процесса через параметры этого процесса. Эти задачи могут быть сформулированы в следующем достаточно общем виде. Пусть U некоторое заданное множество и пусть на этом множестве определён функционал $J(u)$, принимающий конечное значение при каждом $u \in U$. Требуется решить задачу минимизации или максимизации $J(u)$ на U. Так как задача максимизации $J(u)$ на U всегда может быть заменена эквивалентной задачей минимизации $-J(u)$ на U, то достаточно ограничиться рассмотрением задач на минимум.

Следует различать два типа задач минимизации. *К первому типу* относятся те из них, в которых надо найти $J^* = \inf_{u \in U} J(u)$, и при этом несущественно, в каких точках $u^* \in U$ достигается искомая нижняя грань и достигается ли она вообще. Для решения таких задач достаточно с помощью каких-либо методов построить любую минимизирующую последовательность $\{u_k\}$:

$$u_k \in U,\ k = 1, 2, \ldots, \quad \lim_{k\to\infty} J(u_k) = J^*,$$

и в качестве приближения к искомой величине J^* взять значение функционала $J(u_k)$ при достаточно большом номере k.

Наряду с задачами первого типа, которые естественно назвать *задачами минимизации по функционалу*, большой интерес представляют также *задачи второго типа*, в которых наряду с нижней гранью функционала требуется ещё найти хотя бы одну точку u^* из условий:

(1) $$J(u^*) = J^* = \inf_{u \in U} J(u), \quad u^* \in U.$$

Такую задачу естественно назвать *задачей минимизации по аргументу*. Чтобы эта задача имела смысл, надо предполагать, что $J^* > -\infty$ и множество $U^* = \{u\colon u \in U,\ J(u) = J^*\}$ непусто.

Всюду ниже мы будем заниматься задачей минимизации по аргументу и кратко будем именовать её задачей (1).

Точное решение задачи (1) удаётся найти лишь в редких случаях. Поэтому здесь, как и в задачах минимизации по функционалу, прежде всего приходится строить минимизирующие последовательности, которые могли бы помочь в попытке получить приближённое решение задачи (1). Понятно, что построение минимизирующих последовательностей в общем случае является важной и трудной проблемой. Однако подробное обсуждение этой проблемы вывело бы нас за рамки настоящей статьи и поэтому мы, отсылая читателя к имеющейся по этому поводу литературе (см., например, [42], [46], [62]), будем предполагать, что для всех встречающихся ниже функционалов можно указать хотя бы один метод построения минимизирующей последовательности.

Итак, пусть уже построена какая-либо минимизирующая последовательность $\{u_k\}$: $u_k \in U$, $k = 1, 2, \ldots$, $\lim_{k\to\infty} J(u_k) = J^*$. Пусть для простоты множество U^* состоит из единственной точки u^*. В отличие от задач минимизации по функционалу при решении задачи (1) сразу же возникает вопрос: можно ли из близости значений $J(u_k)$ и J^* сделать вывод о близости точки u_k к искомой точке минимума u^* и затем, как это иногда делают на практике, в качестве приближения к u^* взять точку u_k с достаточно большим номером k? Или, короче говоря, будет ли последовательность $\{u_k\}$ сходиться к точке u^*?

Чтобы ответить на эти вопросы, прежде всего надо уточнить, в каком смысле следует понимать сходимость $\{u_k\}$ к u^*. В конечномерных задачах, когда $u = (u^1, \ldots, u^m)$, это может означать стремление к нулю евклидова расстояния $\left(\sum_{i=1}^m (u_k^i - u^{*i})^2\right)^{1/2}$ между точками $u_k = (u_k^1, \ldots, u_k^m)$ и $u^* = (u^{*1}, \ldots, u^{*m})$ при $k \to \infty$. В задачах оптимального управления (см. примеры в § 3) можно говорить о среднеквадратичной или равномерной сходимости $\{u_k\}$ к u^*. В вопросах приближения функций, решения интегральных или дифференциальных уравнений часто требуется среднеквадратичная или равномерная сходимость не только $\{u_k\}$ к u^*, но и некоторых производных $\{u_k\}$ к соответствующим производным u^*. При исследовании вопросов существования решения задачи минимизации по аргументу приходится выяснять, будет ли минимизирующая последовательность $\{u_k\}$ сходиться к некоторой точке u^* в слабой топологии того или иного гильбертова или банахова пространства. Для единообразного исследования вышеперечисленных и других возможных способов сходимости $\{u_k\}$ к u^*, естественно предположить, что на множестве U введена некоторая топология τ, и сходимость $\{u_k\}$ к u^* понимать в смысле этой топологии(¹). Заметим, что выбор подходящей топологии на множестве U не совсем произволен и определяется конкретными особенностями исследуемой экстремальной задачи. Например, если в одних задачах оптимального управления достаточно среднеквадратичной сходимости $\{u_k\}$ к u^*, то в других задачах этого может оказаться недостаточно и для целей технической реализации приближенного оптимального управления может потребоваться, например, равномерно сходящаяся последовательность $\{u_k\}$.

Итак, пусть на множестве U задана подходящая топология τ. Тогда поставленный выше вопрос можно переформулировать в следующем более строгом виде: если $u_k \in U$, $k = 1, 2, \ldots$, $\lim_{k\to\infty} J(u_k) = J^*$ и множество U^* состоит из единственной точки u^*, то будет ли последовательность $\{u_k\}$ τ-сходиться к u^*? Если же U^* состоит более чем из одной точки, то аналогично можно поставить вопрос о τ-сходимости $\{u_k\}$ ко множеству U^*. Напомним, что

(¹) Для понимания содержания статьи достаточно знакомства с первоначальными сведениями о топологических пространствах (например, см. § 5 гл. II книги [73]). Читатель, которому используемый далее топологический язык покажется слишком трудным, может под словами „τ-сходимость" понимать сходимость в конечномерном пространстве, имея в виду задачу математического программирования; другие примеры экстремальных задач и используемых в них топологий см. ниже в § 3.

последовательность $\{u_k\}$ τ-сходится ко множеству U^* [к точке u^*], если для любого открытого множества O, определяемого топологией τ и содержащего U^* [точку u^*], найдётся номер k_0 такой, что $u_k \in O$ для всех $k \geqslant k_0$.

Нетрудно видеть, что в общем случае ответ на поставленные выше вопросы отрицательный. Покажем это на двух простых примерах.

Пример 1. Пусть $J(u) = \dfrac{u^2}{1+u^4}$, $U = E_1 = \{-\infty < u < +\infty\}$ — одномерное евклидово пространство с естественной топологией, задаваемой метрикой $\varrho(u,v) = |u-v|$. Очевидно, здесь $J^* = 0$ и U^* состоит из единственной точки $u^* = 0$. Последовательность $u_k = k$, $k = 1,2,\ldots$ является минимизирующей, однако $\varrho(u_k, u^*) = k \to +\infty$.

Пример 2. Пусть требуется минимизировать функционал $J(u) = \int\limits_0^1 x^2(t)\,dt$, где $x(t)$ является решением дифференциального уравнения $\dot{x} = u(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, с начальным условием $x(0) = 0$, а управление $u = u(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, принадлежит множеству U ограниченных измеримых функций, удовлетворяющих неравенству $|u(t)| \leqslant 1$ почти всюду на $0 \leqslant t \leqslant 1$. Топология на множестве U пусть задана нормой $\|u\| = \left(\int\limits_0^1 u^2(t)\,dt\right)^{1/2}$ лебегова пространства $L_2[0,1]$ или нормой $\|u\| = \operatorname{vrai}\sup\limits_{0 \leqslant t \leqslant 1} |u(t)|$ пространства $L_\infty[0,1]$. Очевидно, в этой задаче $J^* = 0$, причём нижняя грань J^* достигается на управлениях $u^*(t)$, почти всюду на $0 \leqslant t \leqslant 1$ равных нулю и только на них. Последовательность $u_k(t) = \sin(2\pi kt)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, $k = 1,2,\ldots$ является минимизирующей для этой задачи, однако она не сходится к $u^*(t)$ ни в норме $L_2[0,1]$, ни тем более в норме $L_\infty[0,1]$. Заметим однако, что последовательность $\{u_k(t)\}$ сходится к $u^*(t) = 0$ слабо в $L_2[0,1]$. Более того, любая минимизирующая последовательность в рассматриваемой задаче будет слабо в $L_2[0,1]$ сходиться к оптимальному управлению — это следует из теоремы 5 § 7.

Определение 1. Задача (1) с непустым U^* называется *корректно поставленной в топологии* τ, если любая минимизирующая последовательность $\{u_k\}$ для этой задачи сходится ко множеству U^* в топологии τ или, короче, τ-сходится к U^*.

Если существует хотя бы одна минимизирующая последовательность $\{u_k\}$, не являющаяся τ-сходящейся к U^*, то задача (1) называется *некорректной* задачей в топологии τ.

В смысле этого определения задача из примера 1 является некорректной в евклидовой метрике, а задача из примера 2 некорректна в метрике пространств $L_2[0,1]$ и $L_\infty[0,1]$, но корректна в слабой топологии $L_2[0,1]$.

Для корректно поставленной задачи минимизации в качестве приближения ко множеству U^* можно взять один из членов произвольной минимизирующей последовательности с достаточно большим номером. Для некорректных задач минимизации аналогичные действия могут привести к ошибочным

результатам, так как в этом случае нет никаких гарантий того, что полученная тем или иным способом минимизирующая последовательность $\{u_k\}$ непременно будет обладать свойством τ-сходимости ко множеству U^*.

Таким образом, при решении некорректных задач минимизации, в которых требуется найти не только приближение для минимального значения функционала, но и указать точку из заданной окрестности множества U^* точек минимума, возникает важная проблема построения минимизирующих последовательностей, которые будут сходиться к U^* в нужной топологии. Методы построения таких последовательностей или, как говорят, методы регуляризации задачи (1), будут изложены ниже.

Остановимся ещё на одном аспекте задач минимизации. В тех случаях, когда множество U^* состоит более чем из одной точки, можно поставить задачу об отыскании „наилучшей" точки этого множества, которая удовлетворяла бы некоторым дополнительным ограничениям. А именно, пусть на множестве U задан функционал $\Omega(u)$.

Определение 2. Точку $u^* \in U^*$ назовём *Ω-нормальным решением* задачи (1), если $\Omega(u^*) = \inf\limits_{u \in U^*} \Omega(u)$.

В задачах оптимального планирования функционал $\Omega(u)$ может выражать собой стоимость затрат на организационные и технологические перестройки при переходе от существующего состояния производства к его новому состоянию, соответствующему плану u. Тогда среди всех оптимальных планов $u \in U^*$ естественно выбрать тот план u^*, на котором $\Omega(u)$ принимает наименьшее значение. Таким образом, задача определения наилучшего плана здесь приводит к поиску Ω-нормального решения задачи (1).

Задача определения Ω-нормального решения может оказаться весьма трудной даже в том случае, когда исходная задача (1) корректно поставлена в смысле определения 1. Дело в том, что из-за погрешностей в задании исходных данных и вычислительных погрешностей вместо точного значения функционала $J(u)$ приходится иметь дело с некоторыми его приближениями $J_k(u)$, $k = 1,2,\ldots$ Пусть $\lim\limits_{k\to\infty} \big(J_k(u) - J(u)\big) = 0$ при каждом $u \in U$. Пусть множества $U_k^* = \{u\colon u \in U,\ J_k(u) = J_k^* = \inf\limits_{v \in U} J(v)\}$, $k = 1,2,\ldots$, непусты и при каждом k удалось найти точку $u_k^* \in U_k^*$ такую, что $\Omega(u_k^*) = \inf\limits_{u \in U_k^*} \Omega(u)$. Возникают вопросы: будет ли $\lim\limits_{k\to\infty} \Omega(u_k^*) = \Omega(u^*)$ и сходится ли $\{u_k^*\}$ к Ω-нормальному решению u^* задачи (1) в нужной топологии τ? Ответ на эти вопросы в общем случае отрицательный. Оказывается, при сколь угодно малых погрешностях в задании $J(u)$ множества U_k^* могут отличаться от U^* столь значительно, что попытка использовать точку u_k^* в качестве приближения к Ω-нормальному решению может привести к большим погрешностям. Поясним это на простейшем примере.

Пример 3. Пусть требуется найти Ω-нормальное решение задачи минимизации функции $J(u)=x+y$ на множестве $U=\{u=(x,y)\colon x\geqslant 0,\ y\geqslant\geqslant 0,\ 2\leqslant x+y\leqslant 3\}$ при $\Omega(u)=x^2+y^2$.

Очевидно, $J^*=2$, $U^*=\{u=(x,y)\colon x+y=2,\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0\}$; Ω-нормальным решением этой задачи является точка $u^*=(1;1)$; $\Omega(u^*)=2$. Предположим, что функция $J(u)$ задана неточно, и мы имеем дело с её приближениями $J_k(u)=a_kx+b_ky$, где $a_k\to 1$, $b_k\to 1$ при $k\to\infty$. Так как, вообще говоря, $a_k\neq b_k$, то минимум $J_k(u)$ на U будет достигаться либо в точке $u_k^*=(2;0)$ (при $a_k<b_k$), либо в точке $u_k^*=(0;2)$ (при $a_k>b_k$), то есть U_k^* состоит из одной точки u_k^*. При этом $\Omega(u_k^*)=4\neq\Omega(u^*)$ и $\{u_k^*\}$ не сходится к u^* при $k\to\infty$. Как видим, предпринятая попытка получить хорошее приближение к Ω-нормальному решению за счёт увеличения числа верных десятичных знаков a_k, b_k обречена на неудачу.

В следующем параграфе будет показано, что излагаемые там методы регуляризации задачи (1) при некоторых предположениях позволяют получить приближения к Ω-нормальному решению таких задач.

2. Описание методов. Сходимость

Пусть задача (1) является некорректной в топологии τ. Перейдем к описанию методов регуляризации задачи (1). Эти методы позволяют строить минимизирующие последовательности, принадлежащие некоторому τ-компактному множеству, что будет гарантировать их сходимость ко множеству U^* в топологии τ или даже, возможно, в более сильной топологии. Важную роль в методах регуляризации играет стабилизатор задачи (1).

Определение 3. Функционал $\Omega(u)$, определенный на непустом множестве $U_\Omega\subseteq U$, называется *стабилизатором задачи* (1) *в топологии* τ, если: 1) $\Omega(u)\geqslant 0$ при всех $u\in U_\Omega$; 2) множество $\Omega_C=\{u\colon u\in U_\Omega,\ \Omega(u)\leqslant C\}$ является τ-счётно-компактным при любом $C=\mathrm{const}\geqslant 0$, то есть любая последовательность $\{u_k\}\in\Omega_C$ имеет хотя бы одну подпоследовательность $\{u_{k_n}\}$, τ-сходящуюся к некоторой точке $v^*\in\Omega_C$ (2); 3) множество $U_\Omega^*=U_\Omega\cap U^*$ непусто.

Примеры стабилизаторов для различных классов некорректных экстремальных задач будут приведены в § 3.

В практических задачах вместо функционалов $J(u)$, $\Omega(u)$ приходится иметь дело с их приближениями $J_k(u)$, $\Omega_k(u)$, $k=1,2,\ldots$ Будем считать, что погрешности в задании этих функционалов согласованы со стабилизатором $\Omega(u)$ задачи (1) в следующем смысле:

$$|J_k(u)-J(u)|\leqslant\delta_k(1+\Omega(u)),\qquad u\in U_\Omega,\tag{2}$$

$$|\Omega_k(u)-\Omega(u)|\leqslant\chi_k(1+\Omega(u)),\qquad u\in U_\Omega,\tag{3}$$

(2) Вместо введенного термина „τ-счетная компактность" в литературе часто употребляют также термин „секвенциальная компактность".

где $\{\delta_k\}$, $\{\chi_k\}$ известные последовательности, $\lim\limits_{k\to\infty}\delta_k=0$, $\delta_k\geqslant 0$, $0\leqslant\chi_k<1$, $k=1,2,\ldots$

Условие (3) при больших значениях $\Omega(u)$ характеризует собой относительную погрешность в задании функционала $\Omega_k(u)$:

$$\left|\frac{\Omega_k(u)}{\Omega(u)}-1\right|\leqslant\chi_k\left(1+\frac{1}{\Omega(u)}\right)\approx\chi_k,\qquad k=1,2,\ldots$$

Наличие в правой части неравенств (2), (3) слагаемого 1 оправдано тем, что возможны малые значения $\Omega(u)$ или даже $\Omega(u)=0$, и замена $1+\Omega(u)$ на $\Omega(u)$ в (2), (3) тогда привела бы к чрезмерно жестким требованиям на точность задания $J(u)$, $\Omega(u)$.

Итак, пусть $\Omega(u)$ какой-либо стабилизатор задачи (1) в топологии τ. Тогда для регуляризации задачи (1) могут быть использованы следующие три метода. Чтобы легче было понять суть этих методов, сначала дадим их описание в несколько идеализированном виде, предполагая, что все используемые в них функционалы известны точно и достигают своих нижних граней на рассматриваемых множествах.

Первый метод регуляризации: последовательность $\{u_k\}$ определяется условиями

$$T_k(u_k)=\inf_{u\in U_\Omega}T_k(u),\qquad u_k\in U_\Omega,\qquad k=1,2,\ldots,\tag{4'}$$

где $T_k(u)=J(u)+\alpha_k\Omega(u)$, $\{\alpha_k\}$ — какая-либо заданная положительная последовательность, сходящаяся к нулю.

Второй метод регуляризации (*метод невязок*): последовательность $\{u_k\}$ находится из условий

$$\Omega(u_k)=\inf_{u\in V_k}\Omega(u),\qquad u_k\in V_k,\qquad k=1,2,\ldots,\tag{5'}$$

где $V_k=\{u\colon u\in U_\Omega,\ J(u)\leqslant J^*+\nu_k\}$, $\{\nu_k\}$ — заданная положительная последовательность, сходящаяся к нулю. Для пояснения названия метода невязок рассмотрим задачу минимизации функционала $J(u)=\varrho(Au,f)$, возникающую при исследовании уравнений $Au=f$, где A — оператор, действующий из некоторого пространства U в метрическое пространство V, $\varrho(v,f)$ — расстояние между точками v и $f\in V$. Величину $J(u)=\varrho(Au,f)$ принято называть невязкой уравнения $Au=f$. Если это уравнение имеет решение, то $\inf\limits_{u\in U}J(u)=J^*=0$, и множество $V_k=\{u\colon u\in U_\Omega,\ J(u)\leqslant\nu_k\}$ состоит из точек, для которых невязка уравнения мала. В общем случае невязкой можно назвать величину $J(u)-J^*$. Таким образом, метод невязок заключается в минимизации стабилизатора $\Omega(u)$ на множестве точек $u\in U_\Omega$, для которых невязка мала.

Третий метод регуляризации (*метод квазирешений*): последовательность $\{u_k\}$ определяется условиями

$$J(u_k)=\inf_{u\in U_k}J(u),\qquad u_k\in U_k,\qquad k=1,2,\ldots,\tag{6'}$$

где $U_k = \{u\colon u \in U_\Omega,\ \Omega(u) \leqslant \Omega^* + \gamma_k\}$, $\{\gamma_k\}$ — некоторая последовательность, $\omega^* - \Omega^* < \gamma_k$, $\varliminf_{k\to\infty} \gamma_k \geqslant 0$, $\sup_{k\geqslant 1} \gamma_k < +\infty$, $\omega^* = \inf_{u\in U_\Omega} \Omega(u) \leqslant \Omega^* = \inf_{u \in U_\Omega^*} \Omega(u)$. Условие $\omega^* - \Omega^* < \gamma_k$ гарантирует непустоту множества U_k, $k = 1, 2, \ldots$ Название метода квазирешений также связано с упомянутыми выше уравнениями $Au = f$, решения которых можно искать минимизируя функционал $J(u) = \varrho(Au, f)$. Квазирешением уравнения $Au = f$ называют точку $u^* \in U$, для которой $J(u^*) = J^* = \inf_{u \in U} J(u)$. Если $J(u^*) = J^* = 0$, то квазирешение превращается в обычное решение уравнения $Au = f$. Однако квазирешение может существовать и тогда, когда уравнение $Au = f$ не имеет решения. Описанный выше метод (6′) был предложен впервые В. К. Ивановым для отыскания квазирешений уравнения $Au = f$, что и нашло отражение в названии метода.

Если последовательность $\{u_k\}$, удовлетворяющая условиям (4′), (5′) или (6′), существует, то при некоторых предположениях относительно свойств функционалов $J(u)$, $\Omega(u)$ (см. ниже теорему 1 при $\varepsilon_k = \mu_k = \beta_k = \delta_k = \chi_k = 0$, $k = 1, 2, \ldots$) можно доказать, что $\{u_k\}$ минимизирует $J(u)$ на U и τ-сходится ко множеству U^*. Множества U_Ω, V_k, U_k, рассматриваемые в описанных методах, непусты, так что существование последовательности $\{u_k\}$ полностью зависит от того, достигаются ли нижние грани в (4′), (5′), (6′) или не достигаются. Мы не будем здесь обсуждать вопросы, связанные с условиями достижения упомянутых нижних граней, и перейдём к изложению таких модификаций методов регуляризации, в которых такие вопросы не возникают и которые могут быть использованы и при неточном задании функционалов в соответствии с неравенствами (2), (3).

Первый метод регуляризации: последовательность $\{u_k\}$ определяется условиями

(4) $$T_k^* = \inf_{u \in U_\Omega} T_k(u) \leqslant T_k(u_k) \leqslant T_k^* + \varepsilon_k, \quad u_k \in U_\Omega, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

где $T_k(u) = J_k(u) + \alpha_k \Omega_k(u)$; $\{\alpha_k\}$, $\{\varepsilon_k\}$ — заданные положительные последовательности, стремящиеся к нулю.

Второй метод регуляризации (*метод невязок*): $\{u_k\}$ находится из условий

(5) $$\Omega_k^{**} = \inf_{u \in V_k} \Omega_k(u) \leqslant \Omega_k(u_k) \leqslant \Omega_k^{**} + \mu_k, \quad u_k \in V_k, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

где $V_k = \{u\colon u \in U_\Omega,\ J_k(u) \leqslant J^* + \nu_k\}$, $J^* = \inf_{u\in U} J(u)$; $\{\mu_k\}$, $\{\nu_k\}$ — заданные положительные последовательности, причём $\lim_{k\to\infty} \nu_k = 0$, $\sup_{k\geqslant 1} \mu_k < +\infty$.

Третий метод регуляризации (*метод квазирешений*): $\{u_k\}$ определяется условиями

(6) $$J_k^* = \inf_{u \in U_k} J_k(u) \leqslant J_k(u_k) \leqslant J_k^* + \beta_k, \quad u_k \in U_k, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

где $U_k = \{u\colon u \in U_\Omega,\ \Omega_k(u) \leqslant \Omega_k^* + \gamma_k\}$, $\Omega_k^* = \inf_{u \in U_\Omega^*} \Omega_k(u)$; $\beta_k > 0$, $\lim_{k\to\infty} \beta_k = 0$, $\omega_k^* - \Omega_k^* < \gamma_k$, $\varliminf_{k\to\infty} \gamma_k \geqslant 0$, $\sup_{k\geqslant 1} \gamma_k < +\infty$, $\omega_k^* = \inf_{u \in U_\Omega} \Omega_k(u)$.

Теорема 1. *Пусть выполнены следующие условия*:

1) *функционал $J(u)$ определён, ограничен снизу и τ-счётно полунепрерывен снизу на U* (³); *множество $U^* = \{u\colon u \in U,\ J(u) = J^* = \inf_{u\in U} J(u)\}$ непусто*;

2) *$\Omega(u)$ — стабилизатор задачи* (1) *в топологии τ*;

3) *приближённые значения $J_k(u)$, $\Omega_k(u)$ функционалов $J(u)$, $\Omega(u)$ соответственно удовлетворяют условиям* (2), (3);

4) *последовательности $\{\delta_k\}$, $\{\chi_k\}$ из условий* (2), (3) *таковы, что*
$$\delta_k \geqslant 0, \quad \chi_k \geqslant 0, \quad k = 1, 2, \ldots, \quad \lim_{k\to\infty} \delta_k = 0, \quad \sup_{k\geqslant 1} \chi_k < 1;$$
в методе (4) *последовательности $\{\alpha_k\}$, $\{\varepsilon_k\}$ положительны,*
$$\lim_{k\to\infty} \alpha_k = \lim_{k\to\infty} \varepsilon_k = 0, \quad \inf_{k \geqslant 1}\left\{1 - \frac{\delta_k}{\alpha_k} - \chi_k\right\} > 0;$$
в методе (5) — *$\{\mu_k\}$, $\{\nu_k\}$ положительны,*
$$\lim_{k\to\infty} \nu_k = \lim_{k\to\infty} \frac{\delta_k}{\nu_k} = 0, \quad \sup_{k\geqslant 1} \mu_k < +\infty;$$
в методе (6) — *$\{\beta_k\}$, $\{\gamma_k\}$ положительны,*
$$\lim_{k\to\infty} \beta_k = \lim_{k\to\infty} \frac{\chi_k}{\gamma_k} = 0, \quad \sup_{k\geqslant 1} \gamma_k < +\infty.$$

Тогда последовательность $\{u_k\}$, построенная с помощью методов (4), (5) *или* (6), *минимизирует $J(u)$ на U и τ-сходится ко множеству $U_\Omega^* = U^* \cap U_\Omega$.*

Пусть наряду с условиями 1)–4) *выполняется условие*

5) *на множестве U_Ω имеется топология τ_1, которая не слабее топологии τ, причём функционал $\Omega(u)$ τ_1-счётно полунепрерывен снизу на U_Ω и множество $\Omega_C = \{u\colon u \in U_\Omega,\ \Omega(u) \leqslant C\}$ при всех $C \geqslant 0$ τ_1-счётно-компактно; кроме того*
$$\lim_{k\to\infty} \mu_k = \lim_{k\to\infty} \gamma_k = \lim_{k\to\infty} \chi_k = \lim_{k\to\infty} \frac{\varepsilon_k + \delta_k}{\alpha_k} = 0.$$
Тогда
$$\lim_{k\to\infty} \Omega(u_k) = \Omega^* = \inf_{u \in U_\Omega^*} \Omega(u)$$
и для любой τ_1-предельной точки u^* последовательности $\{u_k\}$ справедливо равенство $\Omega(u^*) = \Omega^*$; причём если из $\Omega(u^*) = \Omega^*$ точка $u^* \in U_\Omega^*$ определяется единственным образом, то вся последовательность $\{u_k\}$ τ_1-сходится к u^*.

(³) Функцию $J(u)$ назовем *τ-счётно полунепрерывной снизу на U*, если в любой точке $u \in U$ для любой последовательности $\{u_k\} \in U$, τ-сходящейся к u, имеет место $\varliminf_{k\to\infty} J(u_k) \geqslant J(u)$.

В частности, если $U_\Omega \equiv U$ *и топологии* τ_1 *и* τ *равносильны, то*

$$\lim_{k\to\infty} \Omega(u_k) = \Omega^* = \inf_{u\in U^*} \Omega(u)$$

и любая τ*-предельная точка последовательности* $\{u_k\}$ *является* Ω*-нормальным решением задачи* (1), *а в случае единственности* Ω*-нормального решения* $\{u_k\}$ τ*-сходится к нему.*

Доказательство. Прежде всего покажем, что последовательность $\{u_k\}$, построенная одним из трёх методов (4), (5), (6), удовлетворяет неравенствам:

(7) $$\Omega(u_k) \leqslant \Omega^* + \eta_k, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

(8) $$J^* \leqslant J(u_k) \leqslant J^* + \xi_k, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

где $\xi_k \geqslant 0$, $\lim\limits_{k\to\infty} \xi_k = 0$, последовательность $\{\eta_k\}$ при выполнении условий 1)–4) теоремы ограничена, а при условиях 1)–5) $\{\eta_k\}$ стремится к нулю.

Начнём с первого метода регуляризации. Из неравенств (2), (3) имеем:

(9) $$|J(u) + \alpha_k \Omega(u) - T_k(u)| \leqslant (\delta_k + \alpha_k \chi_k)\,(1 + \Omega(u)), \quad u \in U_\Omega, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Тогда

$$T_k(u) \geqslant J(u) + (\alpha_k - \delta_k - \alpha_k \chi_k)\,\Omega(u) - (\delta_k + \alpha_k \chi_k) \geqslant$$
$$\geqslant J^* - \sup_{k\geqslant 1} (\delta_k + \alpha_k \chi_k), \quad u \in U_\Omega, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Это неравенство доказывает конечность $T_k^* = \inf\limits_{u\in U_\Omega} T_k(u)$ и существование последовательности $\{u_k\}$, определяемой условиями (4).

Возьмём произвольную точку $u^* \in U_\Omega^* = U^* \cap U_\Omega$ и напишем следующую очевидную цепочку неравенств, вытекающую из условий теоремы и оценки (9):

(10) $$J^* = J(u^*) \leqslant J(u_k) \leqslant J(u_k) + \alpha_k \Omega(u_k) \leqslant T_k(u_k) + (\delta_k + \alpha_k \chi_k)\,(1 + \Omega(u_k)) \leqslant$$
$$\leqslant T_k^* + \varepsilon_k + (\delta_k + \alpha_k \chi_k)(\Omega(u_k) + 1) \leqslant T_k(u^*) + \varepsilon_k + (\delta_k + \alpha_k \chi_k)(1 + \Omega(u_k)) \leqslant$$
$$\leqslant J(u^*) + \alpha_k \Omega(u^*) + (\delta_k + \alpha_k \chi_k)\,(2 + \Omega(u_k) + \Omega(u^*)) + \varepsilon_k \leqslant$$
$$\leqslant J(u_k) + (\delta_k + \alpha_k \chi_k)\,\Omega(u_k) + (\alpha_k + \delta_k + \alpha_k \chi_k)\,\Omega(u^*) +$$
$$+ \varepsilon_k + 2\,(\delta_k + \alpha_k \chi_k), \quad u^* \in U_\Omega^*, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Отсюда имеем:

$$\alpha_k \Omega(u_k) \leqslant (\delta_k + \alpha_k \chi_k)\,\Omega(u_k) + (\alpha_k + \delta_k + \alpha_k \chi_k)\,\Omega(u^*) + 2\,(\varepsilon_k + \delta_k + \alpha_k \chi_k),$$

или с учётом условия $\inf\limits_{k\geqslant 1} \left(1 - \dfrac{\delta_k}{\alpha_k} - \chi_k\right) > 0$:

$$\Omega(u_k) \leqslant \frac{\alpha_k + \delta_k + \alpha_k \chi_k}{\alpha_k - \delta_k - \alpha_k \chi_k}\,\Omega(u^*) + \frac{2\,(\varepsilon_k + \delta_k + \alpha_k \chi_k)}{\alpha_k - \delta_k - \alpha_k \chi_k}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Последнее неравенство верно для любого $u^* \in U_\Omega^*$. Поэтому

$$\Omega(u_k) \leqslant \Omega^* + \eta_k, \quad \text{где} \quad \eta_k = \frac{2\,(\delta_k + \alpha_k \chi_k)\,\Omega^* + 2\,(\varepsilon_k + \delta_k + \alpha_k \chi_k)}{\alpha_k - \delta_k - \alpha_k \chi_k}.$$

Очевидно, при условиях 1)–4) теоремы, последовательность $\{\eta_k\}$ ограничена, а при условиях 1)–5) $\{\eta_k\}$ стремится к нулю. Неравенство (7) доказано. Наконец, из (10), (7) следует (8):

$$J^* \leqslant J(u_k) \leqslant J^* + (\alpha_k + \delta_k + \alpha_k \chi_k)\,(2 + 3\,\Omega^* + \eta_k) + \varepsilon_k \equiv J^* + \xi_k,$$

где $\lim\limits_{k\to\infty} \xi_k = 0$.

Теперь докажем неравенства (7), (8) для второго метода регуляризации. Так как $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{\delta_k}{\nu_k} = 0$, то $\nu_k - \delta_k(2 + \Omega^*) > 0$ при всех $k \geqslant k_0$. По определению $\Omega^* = \inf\limits_{u\in U_\Omega^*} \Omega(u)$ при каждом k найдётся точка $u_k^* \in U_\Omega^*$ такая, что $\Omega(u_k^*) \leqslant$ $\leqslant \Omega^* + 1/k$. Тогда

$$J_k(u_k^*) \leqslant J(u_k^*) + \delta_k(1 + \Omega(u_k^*)) \leqslant J^* + \delta_k(1 + \Omega^* + 1/k) \leqslant$$
$$\leqslant J^* + \delta_k(2 + \Omega^*) \leqslant J^* + \nu_k,$$

то есть $u_k^* \in V_k$ при всех $k \geqslant k_0$. Это значит, что множества V_k при всех $k \geqslant k_0$ непусты и последовательность $\{u_k\}$, определяемая условиями (5), существует. Из неравенств (3), (5) тогда имеем:

$$\Omega(u_k) \leqslant (\Omega_k(u_k) + \chi_k)\,(1 - \chi_k)^{-1} \leqslant (\Omega_k^{**} + \mu_k + \chi_k)\,(1 - \chi_k)^{-1} \leqslant$$
$$\leqslant (\Omega_k(u_k^*) + \mu_k + \chi_k)\,(1 - \chi_k)^{-1} \leqslant$$
$$\leqslant (\Omega(u_k^*)\,(1 + \chi_k) + 2\chi_k + \mu_k)\,(1 - \chi_k)^{-1} \leqslant$$
$$\leqslant ((\Omega^* + 1/k)\,(1 + \chi_k) + 2\chi_k + \mu_k)\,(1 - \chi_k)^{-1} \equiv \Omega^* + \eta_k,$$

где

$$\eta_k = \frac{2\chi_k \Omega^* + \dfrac{1}{k}\,(1 + \chi_k) + 2\chi_k + \mu_k}{1 - \chi_k}, \quad k \geqslant k_0.$$

Ясно, что при выполнении условий 1)–4) теоремы последовательность $\{\eta_k\}$ ограничена, а при условиях 1)–5) она стремится к нулю. Неравенство (7) доказано. Из $u_k \in V_k$ и неравенств (2), (7) следует (8):

$$J^* \leqslant J(u_k) \leqslant J_k(u_k) + \delta_k(1 + \Omega(u_k)) \leqslant J^* + \nu_k + \delta_k(1 + \Omega^* + \eta_k) \equiv J^* + \xi_k,$$

$\lim\limits_{k\to\infty} \xi_k = 0$.

Наконец, выведем оценки (7), (8) для метода квазирешений (6). Прежде всего заметим, что неравенство $\omega_k^* - \Omega_k^* \leqslant 0 < \gamma_k$ гарантирует непустоту множества U_k при каждом $k = 1, 2, \ldots$ Далее, согласно (3)

$$\Omega(u)\,(1 - \chi_k) - \chi_k \leqslant \Omega_k(u) \leqslant \Omega(u)\,(1 + \chi_k) + \chi_k$$

для любой точки $u \in U_\Omega^*$, поэтому

(11) $$\Omega^*(1 - \chi_k) - \chi_k \leqslant \Omega_k^* \leqslant \Omega^*(1 + \chi_k) + \chi_k, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Тогда для любого $u \in U_k$ имеем:

$$(12)\qquad J_k(u) \geqslant J(u) - \delta_k(1+\Omega(u)) \geqslant J^* - \delta_k\big(1+(\Omega_k(u)+\chi_k)(1-\chi_k)^{-1}\big) \geqslant$$
$$\geqslant J^* - \delta_k(1+\Omega_k^*+\gamma_k+\chi_k)(1-\chi_k)^{-1} \geqslant$$
$$\geqslant J^* - \delta_k(1+\Omega^*(1+\chi_k)+2\chi_k+\gamma_k)(1-\sup_{k\geqslant 1}\chi_k)^{-1} > -\infty.$$

Это неравенство доказывает конечность $J_k^* = \inf_{u\in U_k} J_k(u)$ и существование последовательности $\{u_k\}$, определяемой условиями (6).

Из условия $u_k \in U_k$ и неравенств (3), (11) следует:

$$(13)\qquad \Omega(u_k) \leqslant (\Omega_k(u_k)+\chi_k)(1-\chi_k)^{-1} \leqslant (\Omega_k^*+\gamma_k+\chi_k)(1-\chi_k)^{-1} \leqslant$$
$$\leqslant (\Omega^*(1+\chi_k)+2\chi_k+\gamma_k)(1-\chi_k)^{-1} \equiv \Omega^*+\eta_k,$$

где

$$\eta_k = (2\chi_k(\Omega^*+1)+\gamma_k)(1-\chi_k)^{-1}.$$

Неравенство (7) доказано. Далее, пусть

$$u_k^* \in U_\Omega^* \quad \text{и} \quad \Omega(u_k^*) \leqslant \Omega^*+\gamma_k^2, \quad k = 1,2,\ldots$$

Тогда с учётом условия $\lim_{k\to\infty}\frac{\chi_k}{\gamma_k} = 0$ и неравенств (3), (11) будем иметь:

$$\Omega_k(u_k^*) \leqslant \Omega_k^*+\gamma_k \quad \text{при всех } k \geqslant k_0.$$

Это значит, что $u_k^* \in U_k$ и поэтому при всех $k \geqslant k_0$ имеем:

$$J^* \leqslant J(u_k) \leqslant J_k(u_k)+\delta_k(1+\Omega(u_k)) \leqslant J_k^*+\beta_k+\delta_k(1+\Omega^*+\eta_k) \leqslant$$
$$\leqslant J(u_k^*)+\delta_k(1+\Omega(u_k^*))+\beta_k+\delta_k(1+\Omega^*+\eta_k) \leqslant$$
$$\leqslant J^*+\beta_k+\delta_k(2+2\Omega^*+\eta_k+\gamma_k^2) \equiv J^*+\xi_k,$$

где

$$\lim_{k\to\infty}\xi_k = 0.$$

Таким образом неравенства (7), (8) доказаны для всех трёх методов (4), (5), (6). При выполнении условий 1)–4) теоремы, из (8) немедленно следует, что $\lim_{k\to\infty} J(u_k) = J^*$, то есть $\{u_k\}$ — минимизирующая последовательность. Кроме того, из (7) имеем:

$$\Omega(u_k) \leqslant \Omega^*+\sup_{k\geqslant 1}|\eta_k| = C = \text{const},$$

то есть $u_k \in \Omega_C$ при всех k. Из определения 3 стабилизатора следует, что множество Ω_C τ-счётно-компактно. Поэтому из последовательности $\{u_k\}$ можно выбрать хотя бы одну подпоследовательность $\{u_{k_n}\}$, τ-сходящуюся к некоторой точке $v^* \in \Omega_C \subseteq U_\Omega \subseteq U$. Покажем, что $v^* \in U_\Omega^*$. В самом деле, пользуясь τ-счётно-полунепрерывностью снизу $J(u)$, из оценки (8) при $k = k_n \to \infty$ имеем:

$$J^* \leqslant J(v^*) \leqslant \varliminf_{k\to\infty} J(u_{k_n}) \leqslant J^*,$$

то есть

$$J(v^*) = J^* \quad \text{или} \quad v^* \in U_\Omega^*.$$

Тем самым доказано, что любая τ-предельная точка v^* последовательности $\{u_k\}$ принадлежит U_Ω^*. Отсюда следует, что $\{u_k\}$ τ-сходится к U_Ω^*. Наконец, пусть выполнены все условия 1)–5) теоремы. Пусть v^* — произвольная τ_1-предельная точка $\{u_k\}$ и пусть $\{u_{k_n}\}$ τ_1-сходится к v^*. Так как топология τ_1 не слабее топологии τ, то $\{u_{k_n}\}$ τ-сходится к v^*, причём в силу вышедоказанного $v^* \in U_\Omega^*$. Пользуясь тем, что $\Omega(u)$ τ_1-счётно полунепрерывен снизу и $v^* \in U_\Omega^*$, из (7) при $k = k_n \to \infty$ получим:

$$\Omega^* \leqslant \Omega(v^*) \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \Omega(u_{k_n}) = \varlimsup_{n\to\infty} \Omega(u_{k_n}) \leqslant \Omega^*,$$

то есть

$$\lim_{n\to\infty}\Omega(u_{k_n}) = \Omega^*.$$

Из этих же рассуждений следует, что последовательность $\{\Omega(u_k)\}$ имеет единственную предельную точку Ω^*, то есть $\lim_{k\to\infty}\Omega(u_k) = \Omega^*$. Отсюда немедленно вытекает последнее утверждение теоремы для случая $U_\Omega \equiv U$, $\tau_1 = \tau$, так как в этом случае $U_\Omega^* = U^*$. Теорема 1 доказана.

Замечание 1. В теореме 1 метод квазирешений (6) был исследован для случая, когда последовательность $\{\gamma_k\}$ положительна. Однако в описании метода (6) на $\{\gamma_k\}$ наложены менее жёсткие условия: $\omega_k^* - \Omega_k^* < \gamma_k$, $k = 1,2,\ldots$, $\varliminf_{k\to\infty}\gamma_k \geqslant 0$, $\sup_{k\geqslant 1}\gamma_k < +\infty$, и при $\omega_k^* < \Omega_k^*$ либо вся последовательность $\{\gamma_k\}$ (см. ниже § 4), либо её подпоследовательность вполне может быть отрицательной и сходиться к нулю. Чтобы исследовать метод (6) и в этом более общем случае, предположим, что выполнены условия теоремы 1 и кроме того

$$(14)\qquad \sup_{u\in U_\Omega}\Omega(u) \leqslant R < +\infty, \quad \omega^* < \Omega^*, \quad \lim_{\theta\to+0}\varphi(\theta) = J^*,$$

где $\varphi(\theta) = \inf_{u\in\Omega_\theta} J(u)$, $\Omega_\theta = \{u\colon u\in U_\Omega, \Omega(u) \leqslant \Omega^*-\theta\}$, $\omega^* = \inf_{u\in U_\Omega}\Omega(u)$. Здесь условие $\omega^* < \Omega^*$ является необходимым и достаточным для непустоты Ω_θ при каком-либо $\theta > 0$.

Условие $\sup_{u\in U_\Omega}\Omega(u) \leqslant R$, как будет видно ниже, при $\delta_k = 0$, $k = 1,2,\ldots$ является излишним. Достаточные условия, при которых имеет место третье соотношение из (14), будут сформулированы ниже в лемме 1.

Неравенства (12), (13) и, следовательно, оценка (7) остаются верными и в рассматриваемом случае. Для доказательства оценки (8) при сделанных предположениях введём множества

$$\Omega_{\theta_k} = \{u\colon u\in U_\Omega, \Omega(u) \leqslant \Omega^*-\theta_k\}, \quad \text{где} \quad \theta_k > 2|\gamma_k|, \quad k = 1,2,\ldots$$

Покажем, существование такого номера k_1, что $\Omega_{\theta_k} \subseteq U_k$ при всех $k \geqslant k_1$.

В самом деле, возьмём любую точку $u \in \Omega_{\theta_k}$. Тогда из (3), (11) получим:

$$\Omega_k(u) \leqslant \Omega(u)\,(1+\chi_k)+\chi_k \leqslant (\Omega^*-\theta_k)\,(1+\chi_k)+\chi_k \leqslant$$
$$\leqslant \Omega_k^*+A\chi_k-\theta_k \leqslant \Omega_k^*+A\chi_k-2|\gamma_k|, \quad \text{где } A=\text{const}>0.$$

Поскольку $\lim\limits_{k\to\infty} \chi_k\gamma_k^{-1}=0$, то

$$A\chi_k-2|\gamma_k| < -|\gamma_k| \quad \text{при всех } k \geqslant k_1.$$

Это означает, что $\Omega_k(u) \leqslant \Omega_k^*-|\gamma_k| \leqslant \Omega_k^*+\gamma_k$ для любого $k \geqslant k_1$ и $u \in \Omega_{\theta_k}$, то есть $\Omega_{\theta_k} \subseteq U_k$, $k \geqslant k_1$.

С учётом (2), (14) тогда имеем:

$$J_k^* \leqslant \inf_{u\in U_k} J(u)+\delta_k(1+R) \leqslant \varphi(\theta_k)+\delta_k(1+R), \quad k \geqslant k_1,$$

так что $\lim\limits_{k\to\infty} J_k^* = J^*$. Следовательно,

$$J_k(u_k) \leqslant J_k^*+\beta_k = J^*+(\beta_k+J_k^*-J^*) \equiv J^*+\xi_k, \quad \text{где} \quad \lim_{k\to\infty} \xi_k=0.$$

Таким образом, последовательность $\{u_k\}$, определяемая методом (6), и в рассматриваемом случае удовлетворяет неравенствам (7), (8). Как уже было показано выше, из (7), (8) следуют τ-сходимость $\{u_k\}$ ко множеству U_Ω^* и другие утверждения теоремы 1.

Приведём достаточные условия, при которых имеет место последнее из соотношений (14).

Лемма 1. *Пусть выполнено одно из следующих условий:*

А) *задача* (1) *имеет хотя бы одно Ω-нормальное решение u^*, множество $\Omega_0=\{u: u\in U_\Omega, \Omega(u) \leqslant \Omega^*\}$ совпадает с секвенциальным замыканием множества $\Omega_{-0}=\{u: u\in U_\Omega, \Omega(u)<\Omega^*\}$ в топологии τ и функционал $J(u)$ τ-непрерывен в точке u^*;*

B) *U — выпуклое множество из линейного топологического пространства с топологией τ, функционалы $J(u)$, $\Omega(u)$ удовлетворяют условиям* 1)–2) *теоремы* 1 *и выпуклы на выпуклом множестве U_Ω.*

Тогда

$$\lim_{\theta\to+0} \varphi(\theta)=J^*, \quad \text{где} \quad \varphi(\theta)=\inf_{u\in\Omega_\theta} J(u),$$

и множество $\Omega_\theta=\{u: u\in U_\Omega, \Omega(u) \leqslant \Omega^*-\theta\}$ предполагается непустым хотя бы для какого-либо $\theta>0$.

Доказательство. Сначала заметим, что $\lim\limits_{\theta\to+0} \varphi(\theta)$ всегда существует, ибо $\varphi(\theta)$ монотонно убывает и не меньше J^* при $\theta>0$. Пусть выполнено условие А). Так как $u^*\in\Omega_0$ и Ω_0 совпадает с секвенциальным замыканием Ω_{-0}, то существует последовательность $\{u_k\}\in\Omega_{-0}$, τ-сходящаяся к u^*. Условие $u_k\in \in\Omega_{-0}$ означает, что $u_k\in\Omega_{\theta_k}$, где $\theta_k=\Omega^*-\Omega(u_k)>0$. Поэтому $J^* \leqslant \varphi(\theta_k) \leqslant \leqslant J(u_k)$. Отсюда с учётом τ-непрерывности $J(u)$ в точке u^* при $k\to\infty$ получим $\lim\limits_{\theta\to+0} \varphi(\theta)=J^*$.

Пусть теперь выполнено условие В). Зафиксируем произвольное число α, $0<\alpha<1$, и рассмотрим столь малые θ, чтобы $0<\theta<\alpha$ и $\Omega_\theta \neq \varnothing$. По определению Ω^* существует точка $u_\theta^*\in U_\Omega^*$ такая, что $\Omega(u_\theta^*) \leqslant \Omega^*+\theta^2(1-\alpha)^{-1}$. Кроме того, по определению $\varphi(\theta)$ для любого $\varepsilon>0$ найдется точка $v_\theta^*\in\Omega_\theta$, такая что $J(v_\theta^*) \leqslant \varphi(\theta)+\varepsilon$. Так как U_Ω выпукло, то $\alpha v_\theta^*+(1-\alpha)u_\theta^*\in U_\Omega$. Поэтому

$$\Omega(\alpha v_\theta^*+(1-\alpha)\,u_\theta^*) \leqslant \alpha\,\Omega(v_\theta^*)+(1-\alpha)\,\Omega(u_\theta^*) \leqslant$$
$$\leqslant \alpha\,(\Omega^*-\theta)+(1-\alpha)\,(\Omega^*+\theta^2(1-\alpha)^{-1}) =$$
$$= \Omega^*-(\alpha\theta-\theta^2) < \Omega^*,$$

то есть $\alpha v_\theta^*+(1-\alpha)u_\theta^*\in\Omega_{\alpha\theta-\theta^2}$. Тогда

$$J^* \leqslant \varphi(\alpha\theta-\theta^2) \leqslant J\big(\alpha v_\theta^*+(1-\alpha)\,u_\theta^*\big) \leqslant \alpha\,(\varphi(\theta)+\varepsilon)+(1-\alpha)\,J^*$$

при любом $\varepsilon>0$ и θ, $0<\theta<\alpha$. Отсюда при $\varepsilon\to+0$ и при $\theta\to+0$ имеем:

$$J^* \leqslant \lim_{\theta\to+0} \varphi(\alpha\theta-\theta^2) = \lim_{\theta\to+0} \varphi(\theta) \leqslant \alpha \lim_{\theta\to+0} \varphi(\theta)+(1-\alpha)\,J^*$$

для любого α, $0<\alpha<1$. Наконец, устремляя здесь $\alpha\to+0$, получим $J^*= =\lim\limits_{\theta\to+0} \varphi(\theta)$. Лемма 1 доказана.

Замечание 2. Методы (4), (5), (6) при выполнении всех условий 1)–5) теоремы 1 позволяют строить минимизирующие последовательности $\{u_k\}$, сходящиеся к U_Ω^* не только в топологии τ, но и, вообще говоря, в более сильной топологии τ_1. Вместе с соотношением $\lim\limits_{k\to\infty} \Omega(u_k)=\Omega^*=\inf\limits_{u\in U_\Omega^*} \Omega(u)$ это может означать сходимость $\{u_k\}$ к U_Ω^* даже в более сильной топологии, чем τ_1. Например, если в гильбертовом или равномерном выпуклом банаховом пространстве B в качестве топологий τ и τ_1 взята слабая топология B, а $\Omega(u)=\|u\|$ — норма в B, то из слабой сходимости $\{u_k\}$ к u^* и из $\lim\limits_{k\to\infty} \Omega(u_k)= =\Omega(u^*)=\Omega^*$ будет следовать сходимость $\{u_k\}$ к u^* по норме B.

Замечание 3. Для реализации методов (5), (6) нужно иметь оценки величин J^* и Ω_k^*, в то время как метод (4) предварительного знания таких оценок не требует. Кроме того, в методе (4) функционал $T_k(u)$ минимизируется при ограничениях $u\in U_\Omega$, а в методах (5), (6) наряду с $u\in U_\Omega$ нужно учитывать ещё и дополнительные ограничения: $J_k(u) \leqslant J^*+\nu_k$ — в методе (5), и $\Omega_k(u) \leqslant \Omega_k^*+\gamma_k$ — в методе (6), что также может вызвать определённые трудности при реализации методов (5), (6). Впрочем, если эти дополнительные ограничения учесть с помощью метода штрафов или метода множителей Лагранжа, то придём к функционалу $L_k(u)=\lambda_k J_k(u)+\alpha_k\Omega_k(u)$, совпадающим с функционалом $T_k(u)$ при $\lambda_k=1$. Таким образом, метод (4) среди рассмотренных трёх методов (4)–(6) выделяется своей универсальностью и достаточной простотой использования для численного решения некорректных экстремальных задач. Одна возможность численной реализации метода (6) будет обсуждена ниже в § 4.

Замечание 4. Методы (4), (5) разработаны и исследованы А. Н. Тихоновым; метод квазирешений (6) предложен и исследован В. К. Ивановым; подробнее об исторических аспектах, развитии и приложениях этих методов, а также библиографию см. в [1], [15], [16]. Единообразный подход к исследованию этих методов дан в [17] для выпуклых некорректных экстремальных задач в рефлексивных банаховых пространствах, в более общей форме для метрических пространств такой подход развит в [57].

3. Приложения

Рассмотрим возможности регуляризации некорректных экстремальных задач в основных, часто встречающихся в приложениях пространствах таких, как E_n, $L_2^{(r)}[a,b]$, $C^{(r)}[a,b]$, $C_n^{(r)}[a,b]$, $L_1^{(r)}[a,b]$.

Здесь E_n — n-мерное евклидово пространство точек $u=(u^1,\ldots,u^n)$ с нормой

$$|u|=\Big(\sum_{i=1}^{n}(u^i)^2\Big)^{1/2};$$

$L_2^{(r)}[a,b]$ — лебегово пространство r-мерных вектор-функций $u(\tau)=(u^1(\tau),\ldots,u^r(\tau))$, $a\leqslant\tau\leqslant b$, с нормой

$$\|u\|_{L_2}=\Big(\int_a^b|u(\tau)|^2\,d\tau\Big)^{1/2}$$

и со скалярным произведением

$$\langle u,v\rangle_{L_2}=\int_a^b\Big(\sum_{i=1}^{r}u^i(\tau)v^i(\tau)\Big)\,d\tau;$$

$C^{(r)}[a,b]$ — пространство непрерывных r-мерных вектор-функций $u(\tau)=(u^1(\tau),\ldots,u^r(\tau))$, $a\leqslant\tau\leqslant b$, с нормой

$$\|u\|_C=\max_{a\leqslant\tau\leqslant b}|u(\tau)|;$$

$C_n^{(r)}[a,b]$ — пространство n раз непрерывно дифференцируемых вектор-функций $u(\tau)=(u^1(\tau),\ldots,u^r(\tau))$, $a\leqslant\tau\leqslant b$, с нормой

$$\|u\|_{C_n}=\max_{a\leqslant\tau\leqslant b}\sum_{i=0}^{n}\left|\frac{d^i(u(\tau))}{d\tau^i}\right|;$$

$L_1^{(r)}[a,b]$ — пространство вектор-функций $u(\tau)=(u^1(\tau),\ldots,u^r(\tau))$, суммируемых по Лебегу на $a\leqslant\tau\leqslant b$, с нормой

$$\|u\|_{L_1}=\int_a^b|u(\tau)|\,d\tau.$$

1°. Начнём с евклидова пространства E_n. Пусть требуется минимизировать полунепрерывную снизу функцию $J(u)$ на замкнутом множестве $U\subseteq E_n$, пусть множество точек минимума U^* непусто. Если эта задача некорректна в топологии пространства E_n, то для её регуляризации можно использовать стабилизатор $\Omega(u)=|u-\overline{u}|^2$, где $\overline{u}$ — заданная точка из E_n. Очевидно, такой функционал $\Omega(u)$ удовлетворяет всем требованиям определения 3 стабилизатора в топологии E_n на множестве $U_\Omega\equiv U$; при этом $U_\Omega^*\equiv U^*\neq\varnothing$. Следовательно, если выполняются остальные условия теоремы 1, то все предельные точки последовательности $\{u_k\}$, построенной одним из трёх методов (4), (5), (6), будут Ω-нормальными решениями для задачи $\min\limits_{u\in U}J(u)$. В частности, если U^* выпуклое множество, то $\Omega(u)$ будет достигать своего минимума на U^* в единственной точке u^* и последовательность $\{u_k\}$ будет сходиться к u^* по норме E_n.

Более общим стабилизатором для задач минимизации на множествах из E_n может служить функционал

$$\Omega(u)=\sum_{i,j=1}^{n}p_{ij}(u_i-\overline{u}_i)(u_j-\overline{u}_j),$$

где $P=\{p_{ij}\}$ — положительно определенная матрица.

Пример 4. Пусть требуется найти Ω-нормальное решение задачи минимизации $J(u)=|Au-b|^2$ на $U\equiv E_n$ при $\Omega(u)=|u-\overline{u}|^2$. Здесь A — матрица порядка $m\times n$, b — вектор из E_m, $\overline{u}$ — заданная точка из E_n. В этой задаче Ω-нормальное решение единственно. Предположим, что матрица A и вектор b известны лишь приближенно и при вычислениях задаются как A_k, b_k с погрешностями $\|A_k-A\|\leqslant\sigma_k$, $|b_k-b|\leqslant\sigma_k$, $k=1,2,\ldots$; $\lim\limits_{k\to\infty}\sigma_k=0$. Так что вместо точного $J(u)$ мы будем иметь дело с приближённым $J_k(u)=|A_ku-b_k|^2$, $k=1,2,\ldots$

Рассматриваемая задача тесно связана с задачей отыскания Ω-нормального решения линейной алгебраической системы $Au=b$ с приближённо заданными A и b и может оказаться некорректной [9], [11], [1]. Дело в том, что для вырожденных и плохо обусловленных систем $Au=b$ при сколь угодно малых погрешностях в задании A, b множество решений приближённой системы $A_ku=b_k$ может сильно отличаться от множества решений точной системы $Au=b$. Например, если точная система имеет вид $0\cdot u=0$, $u\in E_1$, то множество её решений $U^*\equiv E_1$; в то же время приближённая система $a_ku=b_k$, где $\lim\limits_{k\to\infty}a_k=\lim\limits_{k\to\infty}b_k=0$, имеет единственное решение при $a_k\neq0$ и не имеет решений при $a_k=0$, $b_k\neq0$.

Для отыскания Ω-нормального решения поставленной задачи можно применить один из трёх описанных выше методов (4), (5), (6). Погрешность $J_k(u)-J(u)$ здесь согласована со стабилизатором $\Omega(u)$ в смысле неравенства (2). В самом деле,

$$|J_k(u)-J(u)| \leqslant \sigma_k(1+|u|)\left((2\|A\|+\sigma_k)|u|+2|b|+\sigma_k\right) \leqslant$$
$$\leqslant 2\sigma_k(1+|u|)^2(\|A\|+|b|+\sigma_k) \leqslant$$
$$\leqslant 4\sigma_k(1+|\bar{u}|)^2(\|A\|+|b|+\sigma_k)\left(1+\Omega(u)\right) \equiv \delta_k\left(1+\Omega(u)\right),$$
$$k = 1, 2, \ldots$$

Заметим, что условие $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{\delta_k+\varepsilon_k}{\alpha_k}=0$ теоремы 1 при поиске Ω-нормального решения существенно для метода (4). В самом деле, если $J(u)=|0\cdot u-0|^2$, $J_k(u)=|\sigma_k u-\sigma_k|^2$, $\Omega(u)=u^2$, $u\in E_1$, то имеем $\delta_k=2\sigma_k^2$. Минимум $T_k(u)=\sigma_k^2(u-1)^2+\alpha_k u^2$ на E_1 достигается при $u_k=\sigma_k^2(\sigma_k^2+\alpha_k)^{-1}=\delta_k(2\alpha_k+\delta_k)^{-1}$. Для сходимости $\{u_k\}$ к Ω-нормальному решению u^* необходимо $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{\delta_k}{\alpha_k}=0$. Аналогично можно убедиться в необходимости соотношения $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{\varepsilon_k}{\alpha_k}=0$.

2°. Перейдём к рассмотрению некорректных экстремальных задач в гильбертовых пространствах H, в частности, в $L_2^{(r)}[a,b]$.

Пусть требуется минимизировать выпуклый непрерывный по норме H функционал $J(u)$ на выпуклом замкнутом множестве $U\subseteq H$. Пусть множество точек минимума U^* непусто. Если эта задача некорректна в сильной топологии H, определяемой нормой $\|u\|$ в H, то согласно замечанию 2 к теореме 1 для её регуляризации можно использовать стабилизатор $\Omega(u)=\|u\|^2$. Однако $\Omega(u)$ не является стабилизатором в сильной топологии H, так как множество $\Omega_C=\{u\colon u\in U, \Omega(u)\leqslant C\}$, вообще говоря, некомпактно по норме H. Поэтому под топологией τ, используемой в теореме 1, здесь нужно понимать слабую топологию в H. Напоминаем, что сходимость $\{u_k\}$ к точке u в слабой топологии H означает, что $\lim\limits_{k\to\infty}\langle c,u_k\rangle=\langle c,u\rangle$ для любого $c\in H$; здесь $\langle c,u\rangle$ означает скалярное произведение в H.

Множество Ω_C слабо компактно в H при любом $C\geqslant 0$, так что $\Omega(u)=\|u\|^2$ согласно определению 3 является стабилизатором рассматриваемой задачи в слабой топологии H на множестве $M\equiv U$; при этом $U_\Omega^*\equiv U^*\neq\varnothing$. Функционалы $J(u)$, $\Omega(u)$ непрерывны в сильной топологии H и выпуклы на U, поэтому они слабо полунепрерывны снизу на U [42], [62]. Кроме того, при сделанных выше предположениях множество U^* выпукло и замкнуто и сильно выпуклый функционал $\Omega(u)$ достигает на U^* своей нижней грани в единственной точке [42]. Это означает, что Ω-нормальное решение задачи $\min\limits_{u\in U}J(u)$ существует и единственно. Таким образом, если выполнены остальные условия теоремы 1, то последовательность $\{u_k\}$, построенная одним из трёх методов (4), (5) или (6), слабо сходится к Ω-нормальному решению u^* и, кроме того, $\lim\limits_{k\to\infty}\|u_k\|=\|u^*\|$. Отсюда следует, что $\{u_k\}$ сходится к u^* в норме H.

Тем самым показано, что задачу минимизации выпуклого и сильно непрерывного функционала на выпуклом замкнутом множестве гильбертова пространства H можно регуляризовать с помощью стабилизатора $\Omega(u)=\|u\|^2$ в слабой топологии H. Этот вывод сохраняет силу в любом равномерно выпуклом банаховом пространстве.

Пример 5. Рассмотрим следующую задачу оптимального управления. Пусть требуется минимизировать функционал

$$J(u)=\int_{t_0}^{T} f^0(x(t),u(t),t)\,dt+\Phi(x(T)) \tag{15}$$

при условиях

$$\dot{x}(t)=A(t)x(t)+B(t)u(t)+f(t),\quad t_0\leqslant t\leqslant T;\qquad x(t_0)=x_0, \tag{16}$$

$$u=u(t)\in U\subseteq L_2^{(r)}[t_0,T], \tag{17}$$

где $x=(x^1,\ldots,x^n)$ — фазовые координаты, $u=(u^1,\ldots,u^r)$ — управляющие параметры, t — время, моменты t_0, T и начальная точка x_0 заданы; $A(t)$, $B(t)$, $f(t)$ — заданные кусочно-непрерывные при $t_0\leqslant t\leqslant T$ матрицы порядка $n\times n$, $n\times r$, $n\times 1$ соответственно; U — выпуклое замкнутое ограниченное множество из $L_2^{(r)}[t_0,T]$; $f^0(x,u,t)$, $\Phi(x)$ — известные функции, непрерывные по совокупности своих аргументов при $x\in E_n$, $u\in E_r$, $t_0\leqslant t\leqslant T$.

Как известно [42], решение $x(t,u)$, $t_0\leqslant t\leqslant T$, задачи Коши (15), отвечающее управлению $u=u(t)\in U$, равномерно ограничено: $\sup\limits_{u\in U}\max\limits_{t_0\leqslant t\leqslant T}|x(t,u)|\leqslant M<+\infty$. Пусть функция $\Phi(x)$ выпукла по x при $|x|\leqslant M$, а $f^0(x,u,t)$ выпукла по совокупности (x,u) и, кроме того

$$|f^0(x,u,t)-f^0(x,v,t)|\leqslant L|u-v|^\gamma,$$

при $|x|\leqslant M$; $u,v\in E_r$, $t_0\leqslant t\leqslant T$; $L=\mathrm{const}>0$, $0<\gamma=\mathrm{const}\leqslant 1$.

При сделанных предположениях функционал $J(u)$ является выпуклым и непрерывным по норме $L_2^{(r)}[t_0,T]$ на множестве U, и, следовательно, достигает своей нижней грани на непустом множестве U^* (см. теорему 5 из § 7). Однако, как показывает пример 2 из § 1, задачи оптимального управления вида (15)–(17) могут быть некорректными в сильной топологии $L_2^{(r)}[t_0,T]$. В таких задачах для построения минимизирующих последовательностей $\{u_k(t)\}$, сходящихся по норме $L_2^{(r)}[t_0,T]$ ко множеству U^*, могут быть применены методы (4), (5), (6) со стабилизатором $\Omega(u)=\|u\|_{L_2}^2$. В соответствии с вышесказанным, применение такого стабилизатора в (4), (5), (6) гарантирует построение минимизирующей последовательности, сходящейся по норме $L_2^{(r)}[t_0,T]$ к единственному Ω-нормальному решению задачи (15)–(17).

Пример 6. Пусть требуется минимизировать функционал

$$J(u)=\int_a^b\left|\int_a^b A(s,t)u(t)\,dt-f(s)\right|^2 ds \tag{18}$$

на множестве $U\equiv L_2[a,b]$, где $f(s)$, $A(s,t)$ некоторые функции, $f(s)\in L_2[a,b]$, $A(s,t)\in L_2(Q)$, $Q=\{a\leqslant s\leqslant b, a\leqslant t\leqslant b\}$.

Эта задача тесно связана с задачей определения решения интегрального уравнения первого рода

$$\int_a^b A(s,t)\,u(t)\,dt = f(s), \quad a \leqslant s \leqslant b. \tag{19}$$

Пусть уравнение (19) имеет непустое множество решений $U^* \subseteq L_2[a,b]$. Это значит, что минимальное значение функционала (18) равно нулю и достигается на U^*.

Предположим, что вместо точных $A(s,t)$, $f(s)$ мы имеем дело с их приближениями $A_k(s,t)$, $f_k(s)$, причём

$$\|A_k - A\|_{L_2} \leqslant \sigma_k, \quad \|f_k - f\|_{L_2} \leqslant \sigma_k, \quad k = 1, 2, \ldots, \quad \lim_{k\to\infty} \sigma_k = 0.$$

Как известно [1], множество решений U_k^* приближённого уравнения

$$\int_a^b A_k(s,t)\,u(t)\,dt = f_k(s)$$

или иначе, множество точек минимума

$$J_k(u) = \int_a^b \left| \int_a^b A_k(s,t)\,u(t)\,dt - f_k(s) \right|^2 ds,$$

может сильно отличаться от множества U^* и, в частности, U_k^* может быть даже пустым. Поэтому для уверенного получения последовательности $\{u_k(t)\}$, для которой $\lim\limits_{k\to\infty} J(u_k) = 0 = J^*$ и которая в метрике $L_2[a,b]$ сходится к U^*, нужно воспользоваться одним из описанных выше методов (4), (5) или (6). В качестве стабилизатора здесь можно взять функционал

$$\Omega(u) = \|u\|_{L_2}^2 = \int_a^b u^2(t)\,dt.$$

По аналогии с примером 4 нетрудно доказать, что погрешность $J_k(u) - J(u)$ согласована со стабилизатором в смысле неравенства (2). Так как функционал (18) выпуклый и непрерывный по норме $L_2[a,b]$, то в соответствии с вышесказанным в п. 2° применение методов (4), (5) или (6) гарантирует получение минимизирующей последовательности, сходящейся в $L_2[a,b]$ к единственному Ω-нормальному решению.

Пример 7. Пусть дан однородный стержень $0 \leqslant s \leqslant l$, левый конец $s = 0$ которого теплоизолирован, а на правом конце $s = l$ происходит теплообмен с внешней средой. Требуется, управляя температурой внешней среды, к заданному моменту времени T привести температурный режим в стержне как можно ближе к заданному режиму. Иначе говоря, нужно минимизировать функционал

$$J(u) = \int_0^l |x(s,T) - y(s)|^2\,ds \tag{20}$$

при условиях:

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial^2 x}{\partial s^2}, \quad (s,t) \in Q = \{0 < s < l,\ 0 < t \leqslant T\}, \\ &\frac{\partial x(0,t)}{\partial s} = 0, \ 0 < t \leqslant T; \ x(s,0) = \varphi(s), \ 0 < s < l; \\ &\frac{\partial x(l,t)}{\partial s} = \nu[u(t) - x(l,t)], \ 0 < t \leqslant T, \\ &\qquad u = u(t) \in U = \{u(t)\colon u(t) \in L_2[0,T],\ |u(t)| \leqslant 1\}, \end{aligned}\right. \tag{21}$$

где $\varphi(s)$, $y(s)$ — заданные непрерывные функции; $\nu = \mathrm{const} > 0$.

Как известно [74], функционал (20) при условиях (21) непрерывен в слабой топологии $L_2[0,T]$. Кроме того, он выпуклый на U. Поэтому множество точек минимума функционала $J(u)$ на U образует непустое выпуклое и замкнутое множество U^*. Так как U^*, вообще говоря, может содержать более чем одно оптимальное управление, то имеет смысл искать то управление из U^*, реализация которого потребует меньших энергетических затрат. Эти затраты можно оценить функционалом $\Omega(u) = \int_0^T u^2(t)\,dt$. Таким образом, пришли к задаче отыскания Ω-нормального решения задачи (20)–(21). Так как $\Omega(u)$ является стабилизатором задачи (20)–(21) в слабой топологии $L_2[0,T]$, то, применяя один из методов (4), (5) или (6), можно построить минимизирующую последовательность $\{u_k(t)\}$, сходящуюся к единственному Ω-нормальному решению в метрике $L_2[0,T]$.

3°. Рассмотрим возможность регуляризации некорректных экстремальных задач в пространствах $C^{(r)}[a,b]$, $C_n^{(r)}[a,b]$.

Пусть требуется минимизировать непрерывный в метрике $C^{(r)}[a,b]$ функционал $J(u)$ на выпуклом и замкнутом в этой метрике множестве $U \subseteq C^{(r)}[a,b]$. Пусть множество U^* точек минимума $J(u)$ на U непусто.

Предположим, что U^* содержит хотя бы одну точку $u = u^*(t) \in W_2^{(1,r)}[a,b]$; здесь под $W_2^{(1,r)}[a,b]$ понимается пространство абсолютно-непрерывных вектор-функций $u(t) = \{u^1(t), \ldots, u^r(t)\}$ на отрезке $[a,b]$ с производной

$$\frac{du(t)}{dt} \in L_2^{(r)}[a,b],$$

со скалярным произведением

$$\langle u, v\rangle_{W_2} = \int_a^b \left\{ \langle u(t), v(t)\rangle_{E_r} + \left\langle \frac{du(t)}{dt}, \frac{dv(t)}{dt} \right\rangle_{E_r} \right\} dt$$

и с нормой

$$\|u\|_{W_2} = \left(\int_a^b \left(|u(t)|^2 + \left| \frac{du(t)}{dt} \right|^2 \right) dt \right)^{1/2}.$$

При этом предположении для регуляризации некорректной задачи $\min_U J(u)$ в сильной топологии пространства $C^{(r)}[a,b]$, порождаемой нормой этого пространства, можно взять тихоновский стабилизатор [1] $\Omega(u)=\|u\|^2_{W_2}$. В самом деле, $\Omega(u)\geqslant 0$ на $U_\Omega\equiv U\cap W_2^{(1,r)}[a,b]$. Далее, множество $\Omega_C=\{u\colon u\in U_\Omega, \Omega(u)\leqslant C\}$ при любом $C=\mathrm{const}\geqslant 0$ является компактным в метрике $C^{(r)}[a,b]$ в силу теорем вложения [75]. Наконец, множество $U^*_\Omega=U^*\cap U_\Omega$ непусто по предположению. Тогда при выполнении остальных условий 1)–4) теоремы 1 последовательность $\{u_k\}$, полученная одним из методов (4), (5) или (6), будет сходиться к U^*_Ω в метрике $C^{(r)}[a,b]$.

Далее, $W_2^{(1,r)}[a,b]$ — гильбертово пространство, поэтому множество Ω_C слабо компактно в $W_2^{(1,r)}[a,b]$, а норма $\Omega(u)=\|u\|_{W_2}$ слабо полунепрерывна снизу на U_Ω. Кроме того, из слабой сходимости в $W_2^{(1,r)}[a,b]$ вытекает сходимость по норме $C^{(r)}[a,b]$. Это значит, что в условии 5) теоремы 1 в качестве топологии τ_1 можно взять слабую топологию пространства $W_2^{(1,r)}[a,b]$. Тогда при выполнении остальных условий 1)–5) теоремы 1 любая слабая предельная точка $u^*(t)=u^*$ последовательности $\{u_k(t)\}$, построенной одним из методов (4), (5) или (6), удовлетворяет условию

$$\|u^*\|^2_{W_2}=\Omega^*=\lim_{k\to\infty}\Omega(u_k)=\lim_{k\to\infty}\|u_k\|^2_{W_2}.$$

При этом из слабой сходимости $\{u_{k_n}(t)\}$ к $u^*(t)$ и равенства $\|u^*\|_{W_2}=\lim_{n\to\infty}\|u_{k_n}\|_{W_2}$ вытекает сходимость $\{u_{k_n}(t)\}$ к $u^*(t)$ по норме $W_2^{(1,r)}[a,b]$. В частности, если U^*_Ω выпукло и замкнуто в $W_2^{(1,r)}[a,b]$, то $\min_{u\in U^*_\Omega}\|u\|_{W_2}$ достигается в единственной точке $u^*(t)\in U^*_\Omega$ и поэтому вся последовательность $\{u_k(t)\}$ будет сходиться к $u^*(t)$ по норме $W_2^{(1,r)}[a,b]$.

Аналогично можно регуляризовать задачи минимизации функционалов на выпуклых замкнутых множествах $U\subseteq C_n^{(r)}[a,b]$, некорректных в метрике $C_n^{(r)}[a,b]$. А именно, через $W_2^{(n+1,r)}[a,b]$ обозначим пространство n раз непрерывно дифференцируемых на $[a,b]$ функций $u(t)=(u^1(t),\dots,u^r(t))$, n-я производная которых абсолютно непрерывна, а $(n+1)$-я производная принадлежит $L_2^{(r)}[a,b]$. Норму в $W_2^{(n+1,r)}[a,b]$ можно ввести так:

$$\|u\|_{W_2}=\left(\int_a^b\sum_{i=0}^{n+1}\left|\frac{d^iu(t)}{dt^i}\right|^2dt\right)^{1/2}.$$

Из теорем вложения следует [75], что множество

$$\Omega_C=\{u\colon u\in U\cap W_2^{(n+1,r)}[a,b],\ \Omega(u)\leqslant C\}$$

при любом $C=\mathrm{const}\geqslant 0$ компактна в метрике $C_n^{(r)}[a,b]$ (топология τ) и слабо компактна в $W_2^{(n+1,r)}[a,b]$ (топология τ_1 в теореме 1). Таким образом, если хотя бы одна точка минимума рассматриваемой задачи минимизации принадлежит пространству $W_2^{(n+1,r)}[a,b]$, то в этой задаче стабилизатором можно взять [1] $\Omega(u)=\|u\|^2_{W_2}$.

Поскольку задачи из примеров 5–7 некорректны в метрике $L_2^{(r)}[a,b]$, то они тем более некорректны в метрике $C_n^{(r)}[a,b]$, $n=0,1,\dots$ (в примерах 6 и 7 $r=1$). Таким образом, если в примерах 5–7 множество U^* содержит хотя бы одну оптимальную точку $u^*\in W_2^{(n+1,r)}[a,b]$, стабилизатором можно взять $\Omega(u)=\|u\|^2_{W_2}$ и методами (4), (5) или (6) получить минимизирующую последовательность, по норме в $W_2^{(n+1,r)}[a,b]$ сходящуюся к точке $u^*(t)\in U_\Omega\cap U^*\cap W_2^{(n+1,r)}[a,b]$, определяемой условием $\|u^*\|_{W_2}=\inf_{u\in U^*_\Omega}\|u\|_{W_2}$.

Укажем ещё один стабилизатор, который может быть использован для регуляризации некорректных экстремальных задач в $C_n^{(r)}[a,b]$. А именно пусть $C_{n+\gamma}^{(r)}[a,b]$ — подмножество функций из $C_n^{(r)}[a,b]$, для которых величина

$$\|u\|_{C_{n+\gamma}}=\sum_{i=1}^{n}\max_{a\leqslant t\leqslant b}\left|\frac{du^i(t)}{dt^i}\right|+\sup_{\substack{t,\tau\in[a,b]\\ t\neq\tau}}\frac{|d^nu(t)/dt^n-d^nu(\tau)/dt^n|}{|\tau-t|^\gamma}$$

конечна; здесь γ — фиксированная константа, $0<\gamma\leqslant 1$. Нетрудно видеть что $C_{n+\gamma}^{(r)}[a,b]$ превращается в банахово пространство, если в нем в качестве нормы функции $u(t)$ взять $\|u\|_{C_{n+\gamma}}$. Так как шар $\|u\|_{C_{n+\gamma}}\geqslant C<+\infty$ компактен в метрике $C_n^{(r)}[a,b]$, то функционал $\Omega(u)=\|u\|_{C_{n+\gamma}}$ может служить стабилизатором для тех некорректных экстремальных задач в $C_n^{(r)}[a,b]$, у которых множество $U^*\cap C_{n+\gamma}^{(r)}[a,b]$ непусто.

4°. Наконец, остановимся на возможности регуляризации некорректных экстремальных задач в пространстве $L_1^{(r)}[a,b]$.

Пусть требуется минимизировать непрерывный в метрике $L_1^{(r)}[a,b]$ функционал $J(u)$ на замкнутом в этой метрике множестве $U\subseteq L_1^{(r)}[a,b]$. Пусть множество U^* точек минимума $J(u)$ на U непусто. Предположим, что U^* содержит хотя бы одну функцию $u^*(t)$ с конечной полной вариацией $\overset{b}{\underset{a}{V}}(u^*(t))$. Тогда для регуляризации некорректной задачи $\min_U J(u)$ в метрике пространства $L_1^{(r)}[a,b]$ можно взять стабилизатор [44] $\Omega(u)=\|u\|_{L_1}+\overset{b}{\underset{a}{V}}(u)$, где $\overset{b}{\underset{a}{V}}(u)$ — полная вариация функции $u(t)$. В самом деле, множество $\Omega(u)\leqslant C$ при любом $C\geqslant 0$ равномерно ограничено и равностепенно непрерывно в метрике $L_1^{(r)}[a,b]$ и, следовательно, компактно в $L_1^{(r)}[a,b]$. При выполнении остальных условий 1)–4) теоремы 1 последовательность $\{u_k(t)\}$, полученная одним из методов (4), (5) или (6), будет сходиться к U^*_Ω в норме $L_1^{(r)}[a,b]$. Более того это утверждение здесь можно усилить следующим предложением: из $\{u_k(t)\}$ можно выбрать хотя бы одну подпоследовательность $\{u_{k_m}(t)\}$, которая всюду на $[a,b]$ сходится к некоторой функции $u^*(t)\in U^*_\Omega$. Этот результат является прямым следствием теорем Хелли [73].

Приведённые примеры иллюстрируют, как нужно строить стабилизаторы для некорректных экстремальных задач в основных, часто встречающихся в приложения. функциональных пространствах. Из этих примеров видно, что при выборе стабилизатора крайне важно знать критерии компактности множеств в используемых топологических пространствах, иметь теоремы вполне непрерывного вложения одного функционального пространства в другие (см. [75], [76]; [77], гл. IV).

4. Одна реализация метода квазирешений

Численная реализация метода квазирешений в соответствии с условиями (6) весьма затруднительна из-за неконструктивности описания множества U_k, так как множество U_Ω^* и, следовательно, величины $\Omega_k^* = \inf\limits_{u\in U_\Omega^*} \Omega_k(u)$, входящие в определение U_k, заранее неизвестны. В связи с этим желательно иметь такие способы численной реализации метода квазирешений, которые явно не используют величины Ω_k^*. Следуя работе [28] и несколько обобщая её результаты, опишем один из таких способов в предположении, что известны числа ω, R такие, что

$$(22)\qquad 0 \leqslant \omega \leqslant \omega^* = \inf_{u\in U_\Omega} \Omega(u) \leqslant \sup_{u\in U_\Omega} \Omega(u) \leqslant R < +\infty .$$

Заметим, что для определения ω и R нужно решить задачи минимизации и максимизации известного функционала $\Omega(u)$ на известном множестве U_Ω, что представляется сравнительно легкой проблемой, чем определение $\Omega_k^* = \inf\limits_{U_\Omega^*} \Omega_k(u)$, где множество U_Ω^* само является искомым. Для определения ω, R нет необходимости точно находить величины $\inf\limits_{U_\Omega} \Omega(u)$, $\sup\limits_{U_\Omega} \Omega(u)$ — достаточно иметь для них какую-либо оценку типа (22). Наряду с условиями (22) будем предполагать, что выполнены условия 1)–3) теоремы 1, одно из условий леммы 1, и существует хотя бы одна точка $u^* \in U_\Omega^*$, для которой $\Omega(u^*) = \Omega^* = \inf\limits_{u\in U_\Omega^*} \Omega(u)$. Кроме того для простоты изложения будем считать, что функционал $\Omega(u)$ при каждом $u \in U_\Omega$ известен точно, так что в (3) и теореме 1 $\chi_k = 0$, $k = 1, 2, \ldots$

Способ численной реализации метода квазирешений опишем индуктивно. В качестве начального приближения произвольно зададим величины $\delta_0 > 0$, $\beta_0 > 0$, точку $u_0 \in U_\Omega$ и положим $\omega_0 = \omega$. Сначала рассмотрим случай $\omega = \omega^* < \Omega^*$. Пусть уже сделано $k-1$ шагов ($k \geqslant 1$) и найдены величины $\omega_{k-1} < \Omega^*$, $\delta_{k-1} > 0$, $\beta_{k-1} > 0$ и точка $u_{k-1} \in U_\Omega$. Тогда k-е приближение ищется следующим образом. Положим

$$(23)\qquad \omega_{k,n} = \omega_{k-1} + \frac{R-\omega_{k-1}}{2^n}, \qquad \delta_{k,n} = \frac{\delta_{k-1}}{2^{n+1}}, \qquad \beta_{k,n} = \frac{\beta_{k-1}}{2^{n+1}}, \qquad n = 0, 1, \ldots$$

Через $J_{k,n}(u)$ обозначим приближённое значение функционала $J(u)$ в точке $u \in U_\Omega$ с погрешностью

$$(24)\qquad |J(u) - J_{k,n}(u)| \leqslant \delta_{k,n}(1+\Omega(u)), \qquad n = 0, 1, \ldots$$

Последовательно решая задачи минимизации функционала $J_{k,n}(u)$ на множествах U_Ω и $U_{k,n} = \{u\colon u \in U_\Omega,\ \Omega(u) \leqslant \omega_{k,n}\}$ при $n = 0, 1, \ldots$ с помощью каких-либо методов минимизации, найдём точки $v_{k,n} \in U_\Omega$ и $u_{k,n} \in U_{k,n}$ такие, что

$$(25)\qquad J_{k,n}^{**} = \inf_{u\in U_\Omega} J_{k,n}(u) \leqslant J_{k,n}(v_{k,n}) \leqslant J_{k,n}^{**} + \beta_{k,n}, \qquad v_{k,n} \in U_\Omega,$$

$$(26)\qquad J_{k,n}^{*} = \inf_{u\in U_{k,n}} J_{k,n}(u) \leqslant J_{k,n}(u_{k,n}) \leqslant J_{k,n}^{*} + \beta_{k,n}, \qquad u_{k,n} \in U_{k,n}, \qquad n = 0, 1, \ldots$$

Ниже будет доказано существование такого номера n, когда будет выполняться неравенство

$$(27)\qquad J_{k,n}(u_{k,n}) - J_{k,n}(v_{k,n}) > \beta_{k,n} + 2(1+R)\,\delta_{k,n}.$$

Через n_k обозначим тот наименьший номер $n \geqslant 0$, при котором справедливо неравенство (27), и положим

$$(28)\qquad \omega_k = \omega_{k,n_k}, \qquad \delta_k = \delta_{k,n_k}, \qquad \beta_k = \beta_{k,n_k}, \qquad u_k = u_{k,n_k}.$$

Описание k-го шага для случая $\omega = \omega^* < \Omega^*$ закончено. Остаётся лишь показать, что в этом случае неравенство (27) справедливо хотя бы при одном $n \geqslant 0$ и $\omega_k < \Omega^*$. С этой целью сначала установим, что

$$(29)\qquad \lim_{n\to\infty} J_{k,n}^{**} = J^*, \qquad \lim_{n\to\infty} J_{k,n}^{*} > J^*.$$

Из неравенств (22), (24) имеем:

$$(30)\qquad J(u) - (1+R)\,\delta_{k,n} \leqslant J_{k,n}(u) \leqslant J(u) + (1+R)\,\delta_{k,n}, \qquad u \in U_\Omega, \qquad n = 0, 1, \ldots$$

Так как $U_\Omega^* = U_\Omega \cap U^*$ непусто в силу определения стабилизатора задачи (1), то $\inf\limits_{U_\Omega} J(u) = J^*$, и из (30) тогда следует

$$(31)\qquad J^* - (1+R)\,\delta_{k,n} \leqslant J_{k,n}^{**} = \inf_{u\in U_\Omega} J_{k,n}(u) \leqslant J^* + (1+R)\,\delta_{k,n}, \qquad n = 0, 1, \ldots$$

Отсюда при $n \to \infty$ получаем первое из соотношений (29). Аналогично, рассматривая неравенства (30) при $u \in U_{k,n} \subseteq U_\Omega$, будем иметь

$$(32)\qquad J_{\omega_{k,n}}^* - (1+R)\,\delta_{k,n} \leqslant J_{k,n}^* = \inf_{u\in U_{k,n}} J_{k,n}(u) \leqslant J_{\omega_{k,n}}^* + (1+R)\,\delta_{k,n}, \qquad n = 0, 1, \ldots,$$

где $J_{\omega_{k,n}}^* = \inf\limits_{u\in U_{k,n}} J(u)$. Так как $U_{k,n+1} \subseteq U_{k,n} \subseteq U_\Omega$, то

$$(33)\qquad J^* \leqslant J_{\omega_{k,n}}^* \leqslant J_{\omega_{k,n+1}}^*, \qquad n = 0, 1, \ldots$$

и, следовательно, существует конечный или бесконечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} J_{\omega_{k,n}}^*$. А тогда в силу неравенств (32) существует конечный или бесконечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} J_{k,n}^* = \lim\limits_{n\to\infty} J_{\omega_{k,n}}^*$, и для доказательства второго из соотношений (29) достаточно доказать неравенство $\lim\limits_{n\to\infty} J_{\omega_{k,n}}^* > J^*$.

Поскольку $\{\omega_{k,n}\}$ монотонно убывает при возрастании n и $\lim\limits_{n\to\infty} \omega_{k,n} = \omega_{k-1} < \Omega^*$ по предположению индукции, то найдётся номер N такой, что $\omega_{k,n} < \Omega^*$ при всех $n \geqslant N$. Покажем, что $J_{\omega_{k,N}}^* > J^*$. Пусть это не так, то есть

$J^*_{\omega_{k,N}} \leqslant J^*$. С учётом неравенств (33) это возможно лишь при $J^*_{\omega_{k,N}} = J^*$. Так как функционал $J(u)$ τ-счётно полунепрерывен снизу, а множество $U_{k,N}$ τ-счётно компактно, то существует точка $u^*_{k,N} \in U_{k,N}$ такая, что $J(u^*_{k,N}) = J^*_{\omega_{k,N}} = J^*$ (см. § 7, теорему 4). Это значит, что $u^*_{k,N} \in U^*_\Omega$ и поэтому $\Omega^* \leqslant \Omega(u^*_{k,N}) \leqslant \omega_{k,N} < \Omega^*$ с учётом выбора N. Получили противоречивое неравенство. Следовательно, $J^*_{\omega_{k,N}} > J^*$. А тогда в силу (33) тем более $J^* < J^*_{\omega_{k,N}} \leqslant J^*_{\omega_{k,n}}$ при всех $n > N$, то есть $\lim\limits_{n\to\infty} J^*_{\omega_{k,n}} \geqslant J^*_{\omega_{k,N}} > J^*$. Отсюда и из (32) вытекает справедливость второго соотношения (29).

Из (29) с учётом неравенств (25), (26) будем иметь

$$\lim_{n\to\infty} \left(J_{k,n}(u_{k,n}) - J_{k,n}(v_{k,n})\right) = \lim_{n\to\infty} (J^*_{k,n} - J^{**}_{k,n}) = \lim_{n\to\infty} J^*_{k,n} - J^* = d_k > 0,$$

а из (23) получим

$$\lim_{n\to\infty} (\beta_{k,n} + (1+R)\,\delta_{k,n}) = 0 < d_k.$$

Отсюда следует существование такого конечного номера n, когда будет выполняться неравенство (27). А тогда существует и наименьший номер $n = n_k$, при котором справедливо (27), и тем самым корректность определения (28) доказана.

Остаётся показать, что $\omega_k = \omega_{k,n_k} < \Omega^*$. Допустим противное: $\omega_{k,n_k} \geqslant \Omega^*$. Выше мы предположили существование точки $u^* \in U^*_\Omega$, для которой $\Omega(u^*) = \Omega^* \leqslant \omega_{k,n_k}$. Это значит, что $u^* \in U_{k,n_k}$, и поэтому $J(u^*) = J^* = J^*_{\omega_{k,n_k}}$. А тогда из неравенств (25)–(27), (31), (32) следует, что

$$(34)\qquad \beta_{k,n_k} + 2(1+R)\,\delta_{k,n_k} < J_{k,n_k}(u_{k,n_k}) - J_{k,n_k}(v_{k,n_k}) \leqslant$$
$$\leqslant J^*_{k,n_k} + \beta_{k,n_k} - J^{**}_{k,n_k} \leqslant$$
$$\leqslant J^*_{\omega_{k,n_k}} + (1+R)\,\delta_{k,n_k} + \beta_{k,n_k} - J^* + (1+R)\,\delta_{k,n_k} =$$
$$= \beta_{k,n_k} + 2(1+R)\,\delta_{k,n_k}.$$

Получили противоречивое неравенство. Следовательно, $\omega_k < \Omega^*$.

Индуктивное описание метода для случая $\omega = \omega^* < \Omega^*$ закончено. Убедимся теперь, что построенные последовательности $\{u_k\}$, $\{\beta_k\}$, $\{\delta_k\}$, $\{\omega_k\}$ удовлетворяют всем требованиям метода квазирешений (6). В самом деле, положим $J_k(u) \equiv J_{k,n_k}(u)$, $J^*_k = J^*_{k,n_k}$, $U_k = U_{k,n_k}$, $\gamma_k = \omega_k - \Omega^*$. Тогда неравенство (26) при $n = n_k$ с учётом обозначений (28) можно переписать в виде:

$$J^*_k \leqslant J_k(u_k) \leqslant J^*_k + \beta_k,$$

где $u_k \in U_k = \{u\colon u \in U_\Omega,\ \Omega(u) \leqslant \omega_k = \Omega^* + \gamma_k\}$, $k = 1, 2, \ldots$ Кроме того,

$$\lim_{k\to\infty} \delta_k = \lim_{k\to\infty} \beta_k = 0,$$

так как в соответствии с соотношениями (23) первоначальные величины δ_0, β_0 на каждом шаге дробятся по крайней мере пополам. Наконец, последовательность $\{\gamma_k\}$ такова, что $\omega^* - \Omega^* < \gamma_k = \omega_k - \Omega^* < 0$, $k = 1, 2, \ldots$

Покажем, что $\lim\limits_{k\to\infty} \gamma_k = 0$, то есть $\lim\limits_{k\to\infty} \omega_k = \Omega^*$. Существование $\lim\limits_{k\to\infty} \omega_k = a \leqslant \Omega^*$ следует из того, что $\{\omega_k\}$ строго монотонно возрастает и $\omega_k < \Omega^*$, $k = 1, 2, \ldots$ Предположим противное: пусть $a < \Omega^*$. Возьмём произвольное число $\theta > 0$, чтобы $a < a + \theta < \Omega^*$, и обозначим $J^*_\theta = \inf\limits_{u \in \Omega_\theta} J(u)$, где $\Omega_\theta = \{u\colon u \in U_\Omega,\ \Omega(u) \leqslant a + \theta\}$. Ясно, что $J^*_\theta - J^* = \varepsilon > 0$ — это доказывается точно также, как выше было доказано неравенство $J^*_{\omega_{k,N}} > J^*$. Так как $\lim\limits_{k\to\infty} \beta_k = \lim\limits_{k\to\infty} \delta_k = 0$, $\lim\limits_{k\to\infty} \omega_k = a$, то найдётся номер k такой, что

$$(35)\qquad \beta_{k-1} + 2(1+R)\,\delta_{k-1} < \varepsilon/2, \quad 0 < a - \omega_{k-1} < \theta.$$

Рассмотрим k-й шаг метода. Так как $\omega_{k,n} = \omega_{k-1} + \dfrac{R - \omega_{k-1}}{2^n} \to \omega_{k-1}$ при $n \to \infty$, $\omega_{k-1} < a + \theta < \omega_{k,0}$, то существует $n \geqslant 1$ такой, что $\omega_{k,n} < a + \theta \leqslant \omega_{k,n-1}$. Покажем, что $a < \omega_{k,n}$. В самом деле, по выбору n: $(R - \omega_{k-1}) \times 2^{-(n-1)} \geqslant a + \theta - \omega_{k-1}$. Отсюда с учётом второго неравенства (35) имеем:

$$\omega_{k,n} - a = \omega_{k-1} - a + \frac{R - \omega_{k-1}}{2^n} \geqslant \omega_{k-1} - a + \tfrac{1}{2}(a - \omega_{k-1} + \theta) =$$
$$= \tfrac{1}{2}(\theta - a + \omega_{k-1}) > 0.$$

Таким образом, нашли такой номер $n \geqslant 1$, что

$$(36)\qquad a < \omega_{k,n} < a + \theta \leqslant \omega_{k,n-1}.$$

В силу выбора номера k согласно (35) и формулам (23) имеем:

$$\beta_{k,n} + 2(1+R)\,\delta_{k,n} < \beta_{k-1} + 2(1+R)\,\delta_{k-1} < \varepsilon/2, \quad n = 0, 1, \ldots$$

Отсюда и из неравенств (25), (26), (31)–(33) получим

$$J_{k,n}(u_{k,n}) - J_{k,n}(v_{k,n}) \geqslant J^*_{k,n} - J^{**}_{k,n} - \beta_{k,n} \geqslant$$
$$\geqslant J^*_{\omega_{k,n}} - (1+R)\,\delta_{k,n} - J^* - (1+R)\,\delta_{k,n} - \beta_{k,n} \geqslant$$
$$\geqslant J^*_\theta - J^* - 2(1+R)\,\delta_{k,n} - \beta_{k,n} =$$
$$= \varepsilon - 2(1+R)\,\delta_{k,n} - \beta_{k,n} > \beta_{k,n} + 2(1+R)\,\delta_{k,n}.$$

Это означает, что неравенство (27) впервые выполнится при номере $n_k \leqslant n$. А тогда $\omega_k = \omega_{k,n_k} \geqslant \omega_{k,n} > a$. Противоречие с тем, что $\omega_k < \lim\limits_{m\to\infty} \omega_m = a$. Следовательно, $\lim\limits_{k\to\infty} \omega_k = \Omega^*$ и $\lim\limits_{k\to\infty} \gamma_k = 0$.

Остаётся заметить, что при сделанных выше предположениях все неравенства (14) будут справедливы, и воспользоваться замечанием 1 к теореме 1 при $\chi_k = 0$, $k = 1, 2, \ldots$ Тем самым один из возможных способов реализации метода квазирешений (6) для случая $\omega = \omega^* < \Omega^*$ рассмотрен полностью.

Перейдём к рассмотрению случая $\omega = \omega^* = \Omega^*$. Покажем, что описанный выше метод безо всяких изменений применим и в этом случае. В самом деле, при $\omega^* = \Omega^*$ неравенство (27) не будет выполняться ни при каких $n \geqslant 0$ уже на первом шаге, когда $k = 0$. Это следует из того, что в рассматриваемом случае $\omega_{0,n} = \omega^* + \dfrac{R - \omega^*}{2^n} \geqslant \Omega^*$ при всех $n \geqslant 0$, и выполнение неравенства

(27) при каком-либо n приведёт к противоречивому неравенству (34) (при $k=0$). Однако это не должно нас огорчать, ибо последовательность $\{u_n\}$, где $u_n = u_{0,n}$, $n=0,1,\dots$ берутся из условий (26) при $k=0$, как раз и будет искомой. Действительно, из предыдущих рассуждений вытекает, что процессы (25), (26) при $\omega^* = \Omega^*$ не могут оборваться из-за выполнения неравенства (27), что доказывает существование последовательности $\{u_n\}$. Далее, если положить $J_n(u) \equiv J_{0,n}(u)$, $J_n^* = J_{0,n}^*$, $U_n = U_{0,n}$, $\gamma_n = \omega_{0,n} - \Omega^* = (R-\omega^*)/2^n$, $\beta_n = \beta_0/2^n$, то условия (26) при $k=0$ можно переписать в виде:

$$J_n^* \leqslant J_n(u_n) \leqslant J_n^* + \beta_n,$$

$$u_n \in U_n = \{u\colon\ u \in U_\Omega,\ \Omega(u) \leqslant \omega_{0,n} = \Omega^* + \gamma_n\}, \qquad n = 0, 1, \dots$$

Остаётся заметить, что

$$\lim_{k\to\infty} \beta_k = \lim_{k\to\infty} \gamma_k = 0, \qquad \beta_n > 0, \qquad \omega^* - \Omega^* = 0 < \gamma_n < R - \omega^*, \qquad n = 0, 1, \dots$$

Таким образом, последовательность $\{u_n\}$ удовлетворяет всем условиям (6), а её сходимость будет следовать из теоремы 1.

Наконец, кратко остановимся на случае $\omega < \omega^*$. Описанный выше способ реализации метода квазирешений здесь требует уточнения, так как при $\omega < \omega^*$ нет гарантий, что все используемые множества $U_{k,n}$ будут непустыми. В самом деле, уже на первом шаге $\omega_0 = \omega < \omega^*$ может наступить момент, когда $\omega_{0,n} < \omega^*$ и $U_{0,n} = \varnothing$. Тем не менее небольшая модификация описанного выше способа реализации метода квазирешений позволяет учесть такие возможности, когда $U_{k,n} = \varnothing$.

А именно, пусть уже сделано $k-1$ шагов ($k \geqslant 1$) и найдены $\omega_{k-1} < \Omega^*$, $\delta_{k-1} > 0$, $\beta_{k-1} > 0$ и $u_{k-1} \in U_\Omega$. Определим величины $\omega_{k,n}$, $\delta_{k,n}$, $\beta_{k,n}$ по формулам (23) и перебирая последовательно $n = 0,1,\dots$, для непустых $U_{k,n}$ найдём $v_{k,n}$, $u_{k,n}$ из условий (25), (26) и каждый раз будем проверять неравенство (27). Здесь возможны два случая: 1) найдётся такой наименьший номер $n_k \geqslant 0$, что $U_{k,n} \neq \varnothing$ при $n = 0,1,\dots,n_k$ и выполняется неравенство (27). Тогда следующее k-е приближение ω_k, δ_k, β_k, u_k определяется условиями (28). Это значит, что $\omega^* \leqslant \omega_k < \Omega^*$ и в дальнейшем все множества $U_{i,n}$, $i \geqslant k$, $n \geqslant 0$, будут непустыми; 2) найдётся наименьший номер $n_k \geqslant 1$ такой, что $U_{k,n_k} = \varnothing$, $U_{k,n} \neq \varnothing$, $n = 0,1,\dots,n_k - 1$, причём неравенство (27) не выполняется ни при каких $n = 0,1,\dots,n_k - 1$. Тогда ω_k, δ_k, β_k определим согласно (28), положим $u_k = u_{k,n_k-1}$, так что $\omega_k < \omega^*$, $J_{k,n_k-1}(u_k) \leqslant J_{k,n_k-1}^* + \beta_{k,n_k-1}$. Описание k-го шага для случая $\omega < \omega^*$ закончено.

И здесь δ_k, β_k на каждом шаге дробятся пополам хотя бы один раз, поэтому $\lim\limits_{k\to\infty} \delta_k = \lim\limits_{k\to\infty} \beta_k = 0$. Далее, нетрудно доказать равенство $\lim\limits_{k\to\infty} \omega_k = \Omega^*$. Для этого нужно отдельно рассмотреть случаи $\omega^* = \Omega^*$ и $\omega^* < \Omega^*$ и провести рассуждения, близкие к которым проводились выше с использованием неравенств (34)–(36), и придти к противоречию с определением номера n_k. При этом выяснится, что выполнение неравенства (27) возможно

тогда и только тогда, когда $\omega^* < \Omega^*$, а если же $\omega^* = \Omega^*$, то (27) не будет выполняться ни при каких $n \geqslant 0$ и k-й шаг при всех $k \geqslant 1$ будет заканчиваться обнаружением $U_{k,n_k} = \varnothing$, $n_k \geqslant 1$. Кроме того, $\Omega(u_k) \leqslant \Omega^* + \gamma_k$, $k = 1,2,\dots$, $\lim\limits_{k\to\infty} \gamma_k = 0$, где $\gamma_k = \omega_{k,n_k-1} - \Omega^*$ при $\omega^* = \Omega^*$ и $\gamma_k = \omega_k - \Omega^*$ при выполнении (27). Сходимость $\{u_k\}$ и для случая $\omega < \omega^*$ будет следовать из теоремы 1 и замечания 1 к этой теореме.

Эффективность описанного способа реализации метода квазирешений зависит от того, существуют ли достаточно простые методы минимизации функционала $J_{k,n}(u)$ на множествах U_Ω, $U_{k,n}$ в соответствии с условиями (25), (26) и каковы методы выяснения непустоты или пустоты множеств $U_{k,n}$.

Впрочем, возможна такая модификация описанного выше способа реализации метода квазирешений, когда с пустыми множествами $U_{k,n}$ не придётся иметь дело. А именно, решая задачу минимизации функционала $\Omega(u)$ на множестве U_Ω, сначала найдём последовательность $\{\omega_k\}$ такую, что $\omega_k < \omega_{k-1}$, $k = 1,2,\dots$, $\lim\limits_{k\to\infty} \omega_k = \omega^* = \inf\limits_{u\in U_\Omega} \Omega(u)$. В качестве начального приближения произвольно зададим числа δ_0, $\beta_0 > 0$ и точку $u_0 \in U_\Omega$. Пусть уже сделано $k-1$ шагов ($k \geqslant 1$) и найдены величины $\delta_{k-1} > 0$, $\beta_{k-1} > 0$, $u_{k-1} \in U_\Omega$. Положим $\delta_k = \delta_{k-1}/2$, $\beta_k = \beta_{k-1}/2$, и образуем множество $U_k = \{u\colon\ u \in U_\Omega,\ \Omega(u) \leqslant \omega_k\}$. Так как $\omega^* < \omega_k$, то $U_k \neq \varnothing$. Решая задачи минимизации функционала $J_k(u)$ из (2) на множествах U_Ω и U_k, найдём такие $v_k \in U_\Omega$ и $u_k \in U_k$, чтобы

$$J_k^{**} = \inf_{u\in U_\Omega} J_k(u) \leqslant J_k(v_k) \leqslant J_k^{**} + \beta_k, \qquad J_k^* = \inf_{u\in U_k} J_k(u) \leqslant J_k(u_k) \leqslant J_k^* + \beta_k.$$

Затем проверим неравенство, аналогичное (27):

$$J_k(u_k) - J_k(v_k) > \beta_k + 2(1+R)\,\delta_k. \tag{37}$$

Если (37) не выполняется, то переходим к следующему $(k+1)$-у шагу на множестве U_{k+1} с новыми δ_{k+1}, β_{k+1}. Если же (37) выполняется, то как и выше, используя неравенство вида (34), устанавливаем, что $\omega_k < \Omega^*$, и дальнейшие приближения находим по описанной ранее схеме (23)–(28).

Очевидно, при $\omega^* = \Omega^*$ неравенство (37) не будет выполняться ни при каких $k \geqslant 1$ и последовательность $\{u_k\}$ будет удовлетворять условиям (6) с $\gamma_k = \omega_k - \Omega^* > 0$, $\lim\limits_{k\to\infty} \gamma_k = 0$. Если же $\omega^* < \Omega^*$, то найдётся номер k, когда впервые выполнится неравенство (37) — это легко доказать от противного, опираясь на неравенства вида (35), (36).

5. Регуляризация на приближённо заданном множестве

Выше мы предполагали, что множество U, на котором ищется минимум функционала $J(u)$, известно точно. Однако во многих практических задачах такое предположение не является естественным, и изучение экстремальных задач на приближённо заданных множествах представляет большой интерес [1], [10], [12], [26], [38], [45], [46], [61], [64], [66].

Пусть U_0 — некоторое заданное множество из евклидова пространства E_n, пусть $J(u)$, $g_1(u)$, …, $g_s(u)$ — функции, определённые на множестве U_0. Рассмотрим задачу минимизации функции $J(u)$ на множестве

$$(38)\qquad U=\{u\colon u\in U_0,\, g_i(u)\leqslant 0,\, i=1,\dots,p;\, g_i(u)=0,\, i=p+1,\dots,s\}.$$

Эту задачу кратко будем называть задачей (38).

На практике информация о функциях $J(u)$, $g_i(u)$ носит приближённый характер, то есть вместо точных $J(u)$, $g_i(u)$ известны их приближения $J_k(u)$, $g_{ik}(u)$, $k=1,2,\dots$, определенные на множестве U_0. Предположим, что погрешности $|J(u)-J_k(u)|$, $|g_i(u)-g_{ik}(u)|$ удовлетворяют неравенствам:

$$(39)\qquad |J(u)-J_k(u)|\leqslant\delta_k\big(1+\Omega(u)\big),\qquad u\in U_0,$$

$$(40)\qquad \sum_{i=1}^{s}|g_i(u)-g_{ik}(u)|\leqslant\delta_k\big(1+\Omega(u)\big),\qquad u\in U_0,$$

где $\Omega(u)=|u-u_0|^2$, u_0 — некоторая фиксированная точка из E_n, а последовательность $\{\delta_k\}$ неотрицательна и стремится к нулю. Множество U_0 считается заданным точно.

Понятно, что выбор функций $J_k(u)$, $g_{ik}(u)$ из множеств, определяемых условиями (39), (40), вообще говоря, не зависит от нашего желания и носит, как правило, случайный характер. Таким образом, о решениях исходной задачи (38) можно судить лишь по решениям следующей приближённой задачи: минимизировать функцию $J_k(u)$ на множестве

$$(41)\qquad U_k=\{u\colon u\in U_0,\, g_{ik}(u)\leqslant 0,\, i=1,\dots,p;\, g_{ik}(u)=0,\, i=p+1,\dots,s\},$$

$k=1,2,\dots$, где $J_k(u)$, $g_{ik}(u)$ случайно выбраны из множества, задаваемого условиями (39), (40).

Множество U_0 в задачах (38) и (41) будем считать известным точно (например, возможно $U_0\equiv E_n$; в задаче линейного программирования U_0 может обозначать множество точек с неотрицательными координатами, и т.п.).

Возникают вопросы: будет ли $J_k^*=\inf\limits_{u\in U_k}J_k(u)\to J^*=\inf\limits_{u\in U}J(u)$ при $k\to\infty$. Если существуют точки $u_k\in U_k$ такие, что $J_k^*=J_k(u_k)$, то можно ли ожидать, что $\varrho(u_k,U^*)=\inf\limits_{u\in U^*}|u_k-u|\to 0$ при $k\to\infty$? Оказывается, в общем случае ответ на поставленные вопросы отрицательный. Поясним это примерами.

Пример 8. Пусть ищется минимум функции $J(u)=u$ (или $J(u)=u^2-2u$) на множестве $U=\{u\colon u\in E_1,\, g(u)\equiv|u-1|+|u+1|-2=0\}$. Очевидно множество точек минимума U^* состоит из одной точки $u^*=-1$, и $J^*=-1$. Предположим, что функция $g(u)$ нам точно неизвестна и задана в виде $g_k(u)=|a_ku-1|+|b_ku+1|-2$, где $\lim\limits_{k\to\infty}a_k=\lim\limits_{k\to\infty}b_k=1$. Заменим исходную задачу приближённой задачей минимизации $J(u)$ на множестве $U_k=\{u\colon u\in E_1,$ $g_k(u)=0\}$. Так как может оказаться, что $a_k>b_k>0$, то множество U_k будет состоять из двух точек $u=0$, $u=2/(a_k+b_k)$ и $\inf\limits_{u\in U_k}J(u)=J_k^*=0$ будет достигаться в точке $u_k^*=0$. Ясно, что $\lim\limits_{k\to\infty}J_k^*=0\neq J^*=-1$.

Пример 9. Если в предыдущем примере взять $U=\{u\colon u\in E_1,\, g(u)\leqslant 0\}$, $U_k=\{u\colon u\in E_1,\, g_k(u)\leqslant 0\}$, то также нет гарантий того, что $J_k^*\to J^*$. В самом деле, может оказаться, что $a_k>b_k>0$, а тогда $U_k=\{u\colon 0\leqslant u\leqslant 2/(a_k+b_k)\}$ и $J_k^*=\inf\limits_{u\in U_k}J(u)=0$ достигается при $u_k^*=0$.

Пример 10. Пусть $J(u)=-x-y$, $U=\{u=(x,y)\colon 0\leqslant x\leqslant 1,\; x-y\leqslant 0,\; y-x\leqslant 0\}$. Очевидно, что $J^*=\inf\limits_{u\in U}J(u)=-2$ достигается в единственной точке $u^*=(1,1)$. Если $U_k=\left\{u\colon 0\leqslant x\leqslant 1,\left(1+\dfrac{1}{k}\right)x-y\leqslant 0,\, y-\left(1-\dfrac{1}{k}\right)x\leqslant 0\right\}$, то $U_k=\{(0,0)\}$, $J_k^*=\inf\limits_{u\in U_k}J(u)=0$, $k=1,2,\dots$, и $\lim\limits_{k\to\infty}J_k^*=0\neq J^*=-2$.

Рассмотрим возможность регуляризации задач (41). С этой целью ограничения типа равенств и неравенств из (38), (41) учтём с помощью штрафных функций. Обозначим:

$$g_i^+(u)=\begin{cases}\max\{g_i(u);0\}, & i=1,\dots,p,\\ |g_i(u)|, & i=p+1,\dots,s,\end{cases}$$

$$g_{ik}^+(u)=\begin{cases}\max\{g_{ik}(u);0\}, & i=1,\dots,p,\\ |g_{ik}(u)|, & i=p+1,\dots,s;\quad k=1,2,\dots,\end{cases}$$

и положим

$$P(u)=\sum_{i=1}^{s}g_i^+(u),\qquad P_k(u)=\sum_{i=1}^{s}g_{ik}^+(u),\qquad u\in U_0.$$

Очевидно, $P(u)=0$ при $u\in U$ и $P(u)>0$ при $u\in U_0\setminus U$. Исходя из определения $g_i^+(u)$, $g_{ik}^+(u)$ с учётом условия (40) нетрудно получить оценку

$$(42)\qquad |P(u)-P_k(u)|\leqslant\sum_{i=1}^{s}|g_i^+(u)-g_{ik}^+(u)|\leqslant$$
$$\leqslant\sum_{i=1}^{s}|g_i(u)-g_{ik}(u)|\leqslant\delta_k\big(1+\Omega(u)\big),\quad u\in U_0,\quad k=1,2,\dots$$

Определим функции

$$(43)\qquad M_{\alpha,k}(u)\equiv J_k(u)+\alpha\,\Omega(u)+A_kP_k(u),\qquad u\in U_0,\qquad k=1,2,\dots,$$

где $\alpha>0$, $A_k>0$, $k=1,2,\dots$, $\lim\limits_{k\to\infty}A_k=+\infty$.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия:*

1) *множество U_0 выпукло и замкнуто в E_n;*
2) *функции $J(u)$, $g_i(u)$, $i=1,\dots,p$, непрерывны и выпуклы на U_0, а при*

$i = p+1, \ldots, s$, $g_i(u) = \langle a_i, u\rangle - b_i$, *где* a_i — *заданные векторы из* E_n, b_i — *заданные числа,* $\langle a_i, u\rangle$ *скалярное произведение* a_i *на* u;

3) *множество* $U^* = \{u\colon u \in U,\ J(u) = J^* = \inf_{v\in U} J(v)\}$ *непусто;*

4) *функции* $J_k(u)$, $g_{ik}(u)$, $i = 1, \ldots, s$, *удовлетворяют условиям* (39), (40);

5) *при каждом фиксированном* $\alpha > 0$ *и* $k = 1, 2, \ldots$ *найдены точки* $u_k = u_k(\alpha)$ *из условий:*

$$M^*_{\alpha,k} \leqslant M_{\alpha,k}(u_k) \leqslant M^*_{\alpha,k} + \eta_k, \quad u_k \in U_0, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{44}$$

где

$$M^*_{\alpha,k} = \inf_{u\in U_0} M_{\alpha,k}(u), \quad \eta_k > 0, \quad \lim_{k\to\infty} \eta_k = \lim_{k\to\infty} \delta_k A_k = 0.$$

Тогда

$$\lim_{\alpha\to+0} \lim_{k\to\infty} |u_k(\alpha) - u^*| = 0, \tag{45}$$

где u^* *представляет собой* Ω*-нормальное решение задачи* (38).

Доказательство. При выполнении условий теоремы множества U, U^* выпуклы и замкнуты, поэтому Ω-нормальное решение задачи (38) существует и единственно. Для этой задачи функционал $T_\alpha(u) = J(u) + \alpha\Omega(u)$ при каждом $\alpha > 0$ является сильно выпуклой функцией на U и U_0, поэтому существует единственная точка $u^*_\alpha \in U$ такая, что $T_\alpha(u^*_\alpha) = \inf_{u\in U} T_\alpha(u) = T^*_\alpha$, и кроме того, $\inf_{u\in U_0} T_\alpha(u) = T^{**}_\alpha > -\infty$ ([42], [46]). Так как $\Omega(u)$ является стабилизатором для задачи (38), то из теоремы 1 (см. метод (4) при $\varepsilon_k = \delta_k = 0$, $k = 1, 2, \ldots$) следует что

$$\lim_{\alpha\to+0} J(u^*_\alpha) = \lim_{\alpha\to+0} T_\alpha(u^*_\alpha) = J^*, \quad \lim_{\alpha\to+0} |u^*_\alpha - u^*| = 0. \tag{46}$$

Возьмём произвольное $\varepsilon > 0$. Согласно (46) тогда найдётся $\alpha_0 = \alpha_0(\varepsilon) > 0$, что

$$|u^*_\alpha - u^*| \leqslant \varepsilon/2, \quad 0 < \alpha \leqslant \alpha_0. \tag{47}$$

Зафиксируем произвольное α, $0 < \alpha \leqslant \alpha_0$. Из условий теоремы при учёте (39), (42), (44) вытекает следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned}
-\infty &< T^{**}_{\alpha/2} \leqslant T^{**}_{\alpha/2} + \tfrac12\alpha\Omega(u_k) \leqslant T_{\alpha/2}(u_k) + \tfrac12\alpha\Omega(u_k) = \\
&= T_\alpha(u_k) \leqslant J_k(u_k) + \delta_k(1+\Omega(u_k)) + \alpha\Omega(u_k) + A_k P_k(u_k) = \\
&= M_{\alpha,k}(u_k) + \delta_k + \delta_k\Omega(u_k) \leqslant M^*_{\alpha,k} + \eta_k + \delta_k + \delta_k\Omega(u_k) \leqslant \\
&\leqslant M_{\alpha,k}(u^*_\alpha) + \eta_k + \delta_k + \delta_k\Omega(u_k) \leqslant \\
&\leqslant J(u^*_\alpha) + \delta_k + \delta_k\Omega(u^*_\alpha) + \alpha\Omega(u^*_\alpha) + A_k P_k(u^*_\alpha) + \eta_k + \delta_k + \delta_k\Omega(u_k) \leqslant \\
&\leqslant T^*_\alpha + 2\delta_k(1+\Omega(u^*_\alpha)) + \eta_k + \delta_k\Omega(u_k) + A_k\delta_k(1+\Omega(u^*_\alpha)),
\end{aligned} \tag{48}$$

$k = 1, 2, \ldots$

Отсюда имеем:

$$\begin{aligned}
(\tfrac12\alpha - \delta_k)\Omega(u_k) &\leqslant T^*_\alpha - T^{**}_{\alpha/2} + \eta_k + (2\delta_k + A_k\delta_k)(1+\Omega(u^*_\alpha)) \leqslant \\
&\leqslant C_1(\alpha) = \mathrm{const} < +\infty, \quad k = 1, 2, \ldots
\end{aligned}$$

Так как $\lim_{k\to\infty}\delta_k = \lim_{k\to\infty}\delta_k A_k = \lim_{k\to\infty}\eta_k = 0$, то $\alpha/4 > \delta_k$ при всех $k \geqslant k_0$, поэтому

$$0 \leqslant \Omega(u_k) \leqslant \frac{4}{\alpha} C_1(\alpha) = C_2(\alpha) < +\infty, \quad k \geqslant k_0. \tag{49}$$

Из (48) тогда имеем:

$$T_\alpha(u_k) \leqslant T^*_\alpha + (2\delta_k + A_k\delta_k)(1+\Omega(u^*_\alpha)) + \eta_k + \delta_k C_2(\alpha), \quad k \geqslant k_0.$$

Следовательно,

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} T_\alpha(u_k) \leqslant T^*_\alpha. \tag{50}$$

Кроме того, из (48) следует, что

$$M_{\alpha,k}(u_k) \leqslant T^*_\alpha + \eta_k + (2\delta_k + A_k\delta_k)(1+\Omega(u^*_\alpha)) \equiv C_3(\alpha) < +\infty, \quad k \geqslant k_0.$$

Отсюда с учётом (43), (49) имеем

$$\begin{aligned}
0 \leqslant P_k(u_k) &= \frac{1}{A_k}[M_{\alpha,k}(u_k) - J_k(u_k) - \alpha\Omega(u_k)] \leqslant \\
&\leqslant \frac{1}{A_k}[C_3(\alpha) - T_\alpha(u_k) + \delta_k(1+\Omega(u_k))] \leqslant \\
&\leqslant \frac{1}{A_k}[C_3(\alpha) - T^{**}_\alpha + \sup_{k\geqslant1}\delta_k\cdot(1+C_2(\alpha))] \to 0
\end{aligned}$$

при $k\to\infty$. Из неравенства (42) тогда

$$0 \leqslant P(u_k) \leqslant P_k(u_k) + |P(u_k) - P_k(u_k)| \leqslant P_k(u_k) + \delta_k(1+C_2(\alpha)) \to 0$$

при $k\to\infty$. В силу оценки (49) последовательность $\{u_k\}$ ограничена. Пусть v^* какая-либо предельная точка $\{u_k\}$, то есть $\lim_{m\to\infty} u_{k_m} = v^*$. Так как $v^* \in U_0$ и $\lim_{m\to\infty} P(u_{k_m}) = P(v^*) = 0$, то $v^* \in U$. С учетом (50) отсюда имеем: $T^*_\alpha \leqslant T_\alpha(v^*) = \lim_{m\to\infty} T_\alpha(u_{k_m}) \leqslant T^*_\alpha$, то есть $T_\alpha(v^*) = T^*_\alpha$. Однако $T_\alpha(u)$ на U достигает своей нижней грани в единственной точке u^*_α, поэтому $v^* = u^*_\alpha$. Таким образом, последовательность $\{u_k\}$ при каждом фиксированном α, $0 < \alpha \leqslant \alpha_0$, имеет единственную предельную точку u^*_α, то есть $\lim_{k\to\infty} u_k(\alpha) = u^*_\alpha$. Это значит, что при каждом α, $0 < \alpha \leqslant \alpha_0$, найдётся $k_0(\alpha) = k_0$, что $|u_k(\alpha) - u^*_\alpha| \leqslant \varepsilon/2$ при всех $k \geqslant k_0$. Отсюда и из (47) следует (45). Теорема доказана.

Для иллюстрации этой теоремы можно привести задачу линейного программирования с приближённо заданной информацией [1], [10], [12], [61], [64]. Другой подход к регуляризации задач линейного программирования см. в [66].

Более общий подход к вопросам регуляризации некорректных экстремальных задач принят в [26] (см. также [38]), однако принятые в [26] условия регуляризации неконструктивны и труднопроверяемы.

6. Усиленная регуляризация

Предположим, что для задачи минимизации функционала $J(u)$ на множестве $U \subseteq L_2^{(r)}[a,b]$ с помощью того или иного метода регуляризации получили минимизирующую последовательность $\{u_k(t)\}$, которая сходится к оптимальному управлению $u^*(t)$ по норме $L_2^{(r)}[a,b]$, но не сходится к $u^*(t)$ равномерно. Возникает вопрос: нельзя ли провести дополнительную или, лучше сказать, усиленную регуляризацию и заменить последовательность $\{u_k(t)\}$ новой сглаженной последовательностью $\{v_k(t)\}$, которая сходилась бы к $u^*(t)$ равномерно на любых замкнутых множествах из интервалов непрерывности этой функции? Оказывается, это можно сделать с помощью средних функций вида

(51) $$v_k(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u_k(\tau) H(t-\tau, \sigma_k)\, d\tau,$$

где $H(y,\sigma)$ — некоторая известная функция, определённая при $-\infty < y < +\infty$, $\sigma > 0$, а $\{\sigma_k\}$ — некоторая специально подбираемая положительная последовательность, сходящаяся к нулю; кроме того, в (51) для определённости положим $u_k(\tau) \equiv 0$ при всех $\tau \notin [a,b]$.

Определение 4. Функцию $H(y,\sigma)$, определённую при $-\infty < y < +\infty$, $\sigma > 0$, назовём *сглаживающим ядром*, если:

1) $H(y,\sigma) \geqslant 0$ и $H(-y,\sigma) = H(y,\sigma)$ при всех y и $\sigma > 0$;

2) $H(y,\sigma) \in L_2(-\infty, +\infty)$ и $\int_{-\infty}^{\infty} H(y,\sigma)\, dy = 1$ при каждом $\sigma > 0$;

3) для каждого фиксированного $\nu > 0$ имеет место равенство:

$$\lim_{\sigma\to+0} \int_{\nu}^{+\infty} H(y,\sigma)\, dy = 0.$$

Примеры сглаживающих ядер:

$$H(y,\sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2\sigma^2};$$

$$H(y,\sigma) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sigma} & \text{при} \quad |y| \leqslant \sigma, \\ 0 & \text{при} \quad |y| > \sigma; \end{cases}$$

(52) $$H(y,\sigma) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sigma}\left(1 - \dfrac{|y|}{\sigma}\right) & \text{при} \quad |y| \leqslant \sigma, \\ 0 & \text{при} \quad |y| > \sigma; \end{cases}$$

$$H(y,\sigma) = \begin{cases} \dfrac{1}{A\sigma} e^{-\sigma^2/(\sigma^2-y^2)} & \text{при} \quad |y| \leqslant \sigma, \\ 0 & \text{при} \quad |y| > \sigma; \end{cases}$$

где $A = \int_{-1}^{1} e^{-\frac{1}{1-x^2}}\, dx$ — нормирующий множитель.

Теорема 3. *Пусть последовательность $\{u_k(t)\}$ сходится к некоторой кусочно-непрерывной функции $u^*(t)$ по норме $L_2^{(r)}[a,b]$. Доопределим $u_k(t) \equiv \equiv u^*(t) \equiv 0$ вне отрезка $[a,b]$ и построим последовательность $\{v_k(t)\}$ по формуле (51), где $H(y,\sigma)$ — какое-либо сглаживающее ядро, $\sigma_k > 0$, $\lim_{k\to\infty}\sigma_k = 0$ и кроме того*

(53) $$\lim_{k\to\infty} \int_a^b |u_k(t) - u^*(t)|^2\, dt \cdot \int_{-\infty}^{\infty} H^2(y,\sigma_k)\, dy = 0.$$

Тогда справедливы следующие утверждения:

1) $\lim_{k\to\infty} v_k(t) = \frac{1}{2}[u^*(t-0) + u^*(t+0)]$ *при всех* t;

2) $\{v_k(t)\}$ *сходится к* $u^*(t)$ *равномерно на любом замкнутом множестве, принадлежащем интервалу непрерывности* $u^*(t)$;

3) $\{v_k(t)\}$ *сходится к* $u^*(t)$ *по норме* $L_2^{(r)}[a,b]$.

Сразу же прокомментируем условие (53). Нетрудно подсчитать, что для сглаживающих ядер (52)

$$\int_{-\infty}^{\infty} H^2(y,\sigma)\, dy = O\left(\frac{1}{\sigma}\right).$$

Поэтому для ядер (52) условие (53) может быть записано в виде:

$$\lim_{k\to\infty} \|u_k - u^*\|^2 \cdot \sigma_k^{-1} = 0,$$

что означает, что последовательность $\{\sigma_k\}$ должна стремится к нулю не слишком быстро, чтобы не нарушилось равенство $\|u_k - u^*\|_{L_2}^2 = o(\sigma_k)$. В общем случае условие (53) также накладывает ограничение на порядок стремления к нулю последовательности $\{\sigma_k\}$ в зависимости от $\|u_k - u^*\|_{L_2}$.

Для доказательства теоремы нам понадобятся две леммы.

Лемма 2. *Пусть $u(t)$ — кусочно-непрерывная функция на отрезке $[a,b]$ и $u(t) \equiv 0$ вне $[a,b]$. Положим*

$$u_\sigma(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) H(\tau - t, \sigma)\, d\tau, \qquad -\infty < t < +\infty.$$

Тогда

$$\lim_{\sigma\to+0} u_\sigma(t) = \tfrac{1}{2}[u(t-0) + u(t+0)] \quad \text{при всех } t.$$

Доказательство. Зададим произвольные $\varepsilon > 0$ и t. Так как $u(\tau)$ кусочно-непрерывная функция на $[a,b]$ и $u(\tau) = 0$ вне $[a,b]$, то $\sup_\tau |u(\tau)| =$

$= u_{\max} < +\infty$ и найдётся $\nu = \nu(\varepsilon, t) > 0$, что $|u(\tau) - u(t-0)| \leqslant \varepsilon/2$ для всех τ, $t - \nu \leqslant \tau < t$ и $|u(\tau) - u(t+0)| \leqslant \varepsilon/2$ для всех τ, $t < \tau \leqslant t + \nu$. Зафиксируем такое $\nu > 0$. Тогда

$$(54)\quad \left|u_\sigma(t) - \frac{u(t-0)+u(t+0)}{2}\right| = \left|\int_{-\infty}^{\infty}\left(u(\tau) - \frac{u(t-0)+u(t+0)}{2}\right)H(\tau - t, \sigma)\,d\tau\right| \leqslant$$
$$\leqslant \left|\int_{t-\nu}^{t+\nu}(\ldots)\,d\tau\right| + \left|\int_{|\tau-t|\geqslant\nu}(\ldots)\,d\tau\right|;$$

здесь и ниже знак $(\ldots)$ заменяет предыдущее подинтегральное выражение. Для оценки 1-го слагаемого в правой части (54) заметим, что

$$\int_{t-\nu}^{t+\nu} H(\tau - t, \sigma)\,d\tau = 2\int_{t-\nu}^{t} H(\tau - t, \sigma)\,d\tau = 2\int_{t}^{t+\nu} H(\tau - t, \sigma)\,d\tau \leqslant 1.$$

Отсюда с учётом выбора $\nu > 0$ получим:

$$(55)\quad \left|\int_{t-\nu}^{t+\nu}(\ldots)\,d\tau\right| =$$
$$= \left|\int_{t-\nu}^{t}[u(\tau) - u(t-0)]\,H(\tau - t, \sigma)\,d\tau + \int_{t}^{t+\nu}[u(\tau) - u(t+0)]\,H(\tau - t, \sigma)\,d\tau\right| \leqslant \varepsilon$$

равномерно для всех $\sigma > 0$. Наконец, по определению сглаживающего ядра найдётся $\sigma_0 = \sigma_0(\nu) > 0$, что

$$(56)\quad \left|\int_{|\tau-t|\geqslant\nu}(\ldots)\,d\tau\right| \leqslant 2u_{\max}\int_{|\tau-t|\geqslant\nu} H(\tau - t, \sigma)\,d\tau = 4u_{\max}\int_{\nu}^{\infty} H(y, \sigma)\,dy \leqslant \varepsilon$$

для всех σ, $0 < \sigma \leqslant \sigma_0$. В силу произвольности $\varepsilon > 0$ из оценок (54)–(56), получим утверждение леммы.

Лемма 3. *Пусть выполнены все условия предыдущей леммы и пусть $t_1 < t < t_2$ — один из интервалов непрерывности $u(\tau)$. Тогда функция $u_\sigma(t)$ при $\sigma \to +0$ сходится к $u(t)$ равномерно на любом отрезке, принадлежащем интервалу (t_1, t_2).*

Доказательство. Возьмём произвольный отрезок $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$ и столь малое число $\mu > 0$, чтобы $t_1 < \alpha - \mu < \alpha < \beta < \beta + \mu < t_2$. Так как $u(t)$ непрерывна на отрезке $\alpha - \mu \leqslant t \leqslant \beta + \mu$, то она равномерно непрерывна на этом отрезке, то есть для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $\nu = \nu(\varepsilon) > 0$, что $|u(t) - u(\tau)| < \varepsilon/2$ для всех $\tau, t \in [\alpha - \mu, \beta + \mu]$ и $|\tau - t| \leqslant \nu$. Можем считать, что $\nu < \mu$. Зафиксируем такое ν. Тогда

$$(57)\quad |u_\sigma(t) - u(t)| = \left|\int_{-\infty}^{\infty}[u(\tau) - u(t)]\,H(\tau - t, \sigma)\,d\tau\right| \leqslant$$
$$\leqslant \left|\int_{t-\nu}^{t+\nu}(\ldots)\,d\tau\right| + \left|\int_{|\tau-t|\geqslant\nu}(\ldots)\,d\tau\right|.$$

Так как

$$\left|\int_{t-\nu}^{t+\nu}(\ldots)\,d\tau\right| \leqslant \int_{t-\nu}^{t+\nu}\frac{\varepsilon}{2}H(\tau - t, \sigma)\,d\tau \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

равномерно по $t \in [\alpha, \beta]$ и $\sigma > 0$, и

$$\left|\int_{|\tau-t|\geqslant\nu}(\ldots)\,d\tau\right| \leqslant 2u_{\max}\int_{|\tau-t|\geqslant\nu} H(\tau - t, \sigma)\,d\tau = 4u_{\max}\int_{\nu}^{+\infty} H(y, \sigma)\,dy \leqslant \varepsilon/2$$

для всех σ, $0 < \sigma < \sigma_0 = \sigma_0(\varepsilon, \nu)$ и $t \in [\alpha, \beta]$, то из (57) получаем:

$$|u_\sigma(t) - u(t)| \leqslant \varepsilon$$

для всех $t \in [\alpha, \beta]$ как только $0 < \sigma \leqslant \sigma_0$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 3. Введём вспомогательную последовательность $\{w_k(t)\}$ следующим образом:

$$(58)\quad w_k(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u^*(\tau)\,H(\tau - t, \sigma_k)\,d\tau, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Тогда

$$(59)\quad \left|v_k(t) - \frac{u^*(t-0)+u^*(t+0)}{2}\right| \leqslant$$
$$\leqslant |v_k(t) - w_k(t)| + \left|w_k(t) - \frac{u^*(t-0)+u^*(t+0)}{2}\right|.$$

В силу лемм 2, 3 последнее слагаемое в (59) стремится к нулю при $k \to \infty$, причём эта сходимость равномерная на любом отрезке, принадлежащем интервалу непрерывности $u^*(t)$. Далее, с помощью неравенства Коши–Буняковского с учётом условия (53) теоремы будем иметь

$$(60)\quad |v_k(t) - w_k(t)| = \left|\int_{-\infty}^{\infty}[u_k(\tau) - u^*(\tau)]\,H(\tau - t, \sigma_k)\,d\tau\right| \leqslant$$
$$\leqslant \|u_k - u^*\|_{L_2}\cdot\left(\int_{-\infty}^{\infty} H^2(y, \sigma_k)\,dy\right)^{1/2} \to 0$$

при $k \to \infty$, причём сходимость равномерная по t. Отсюда и из (59) следует справедливость утверждений 1), 2) теоремы 3.

Наконец, докажем, что $\|v_k - u^*\|_{L_2} \to 0$ при $k \to \infty$. Имеем:

$$(61)\quad \|v_k - u^*\|_{L_2} = \|v_k - w_k\|_{L_2} + \|w_k - u^*\|_{L_2}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Так как $|v_k(t) - w_k(t)| \to 0$ равномерно по $t \in [a, b]$ в силу (60), то тем более $\|v_k - w_k\|_{L_2} \to 0$ при $k \to \infty$. Оценим второе слагаемое в (61). Пусть θ_i, $i = 1, \ldots, m$, — все точки разрыва функции $u^*(t)$ на $[a, b]$, причём $a = \theta_0 < \theta_1 < \ldots < \theta_m < \theta_{m+1} = b$. Возьмём произвольное $\varepsilon > 0$ и зафиксируем число $\mu > 0$ столь малым, чтобы

$$0 < \mu < \min\left\{\min_{0\leqslant i\leqslant m}\frac{\theta_{i+1} - \theta_i}{2}, \left[\frac{8(m+2)(u^*_{\max})^2}{\varepsilon}\right]^{-1}\right\}.$$

Тогда

$$(62)\quad \|w_k-u^*\|^2_{L_2}=\int_a^b|w_k(\tau)-u^*(\tau)|^2\,d\tau\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{i=0}^{m+1}\int_{\theta_i-\mu}^{\theta_i+\mu}|w_k(\tau)-u^*(\tau)|^2\,d\tau+\sum_{i=0}^{m}\int_{\theta_i+\mu}^{\theta_{i+1}-\mu}|w_k(\tau)-u^*(\tau)|^2\,d\tau.$$

Так как согласно (58) $|w_k(t)|\leqslant u^*_{\max}$ при любом t и всех $k=1,2,\ldots$ (напоминаем, что $u^*(t)\equiv 0$ вне $[a,b]$), то в силу выбора μ первое слагаемое в правой части (62) не больше $\varepsilon/2$ при всех $k=1,2,\ldots$ Второе слагаемое в (62) так же будет не больше $\varepsilon/2$ при всех k, начиная с достаточно большого номера $k_0=k_0(\varepsilon,\mu)$, так как $\{w_k(t)\}$ сходятся к $u^*(t)$ в силу леммы 3 равномерно по t на каждом из отрезков $\theta_i+\mu\leqslant t\leqslant\theta_{i+1}-\mu$, $i=0,1,\ldots,m$. Следовательно, $\lim\limits_{k\to\infty}\|w_k-u^*\|_{L_2}=0$. Отсюда и из (62), (61) следует $\lim\limits_{k\to\infty}\|v_k-u^*\|_{L_2}=0$. Теорема 3 доказана.

В [23] эта теорема была доказана для ядер Гаусса

$$H(y,\sigma)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-y^2/2\sigma^2}.$$

Нетрудно видеть, что все утверждения теоремы 3 сохраняют силу и для функций $u^*(t)$, которые ограничены на $[a,b]$ и могут иметь на $[a,b]$ бесконечно много точек разрыва первого рода, лишь бы множество точек разрыва можно было покрыть системой интервалов любой сколь угодно малой суммарной длины.

Если последовательность $\{u_k(t)\}$ сходится к $u^*(t)$ по норме $L_p^{(r)}[a,b]$, $1<p<+\infty$, то есть

$$\|u_k-u^*\|_{L_p}\equiv\left(\int_a^b|u_k(t)-u^*(t)|^p\,dt\right)^{1/p}\to 0\quad\text{при}\quad k\to\infty,$$

то теорема 3 остаётся верной, если $H(y,\sigma)\in L_q^{(r)}(-\infty,+\infty)$ при каждом $\sigma>0$ и вместо условия (53) потребовать

$$(63)\qquad \lim_{k\to\infty}\left(\int_a^b|u_k(t)-u^*(t)|^p\,dt\right)^{1/p}\left(\int_{-\infty}^{\infty}H^q(y,\sigma_k)\,dy\right)^{1/q}=0,$$

где q определяется равенством $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$, а в утверждении 3) $L_2^{(r)}[a,b]$ заменить на $L_p^{(r)}[a,b]$. Для сглаживающих ядер (52) условие (63) может быть записано в виде

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\|u_k-u^*\|_{L_p}}{\sigma_k^{1-1/q}}=0,$$

так как в этом случае

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty}H^q(y,\sigma)\,dy\right)^{1/q}=O\left(\frac{1}{\sigma^{1-1/q}}\right).$$

В заключение заметим, что если последовательность $\{u_k(t)\}$ из доказанной теоремы была получена при минимизации некоторого функционала $J(u)$ на множестве $U\subseteq L_p^{(r)}[a,b]$ и $\lim\limits_{k\to\infty}J(u_k)=\inf\limits_{u\in U}J(u)$, $u_k\in U$, $k=1,2,\ldots$, то последовательность $\{v_k(t)\}$ также будет минимизировать $J(u)$ на U, если только $J(u)$ непрерывен в точке $u^*(t)$ в метрике $L_p^{(r)}[a,b]$ и $v_k(t)\in U$, $k=1,2,\ldots$ Включение $v_k(t)\in U$, $k=1,2,\ldots$ гарантировано для любого сглаживающего ядра, если, например,

$$U=\{u=u(t)\colon\ u(t)\in L_p^{(r)}[a,b],\ u(t)\in V\ \text{почти всюду на}\ [a,b]\},$$

где V — заданное выпуклое замкнутое множество из E_r.

7. Корректные экстремальные задачи

Реализация вышеизложенных методов регуляризации некорректных экстремальных задач связана с дополнительными вычислительными затратами. Поэтому для решения тех экстремальных задач, в которых требуется приближённо найти лишь экстремальное значение функционала и не требуется аппроксимировать множество точек минимума, целесообразно использовать более простые методы, требующие меньшей вычислительной работы. Кроме того, существуют классы экстремальных задач, в которых минимизирующие последовательности, полученные любым методом, будут сходиться ко множеству точек минимума в требуемой топологии и для их решения применять методы регуляризации необязательно. Укажем некоторые из таких классов задач.

Теорема 4. *Пусть U — некоторое множество из топологического пространства с топологией τ. Если U — τ-счётно компактно, а функционал $J(u)$ конечен при каждом $u\in U$ и τ-счётно полунепрерывен снизу на U (4), то задача минимизации $J(u)$ на U корректна в топологии τ.*

Доказательство. Пусть $J^*=\inf\limits_{u\in U}J(u)$. Покажем, что $J^*>-\infty$ и множество $U^*=\{u\colon\ u\in U,\ J(u)=J^*\}$ непусто. По определению нижней грани найдётся хотя бы одна минимизирующая последовательность: $\{u_k\}\in U$, $\lim\limits_{k\to\infty}J(u_k)=J^*$. Так как U τ-счётно компактно в топологии τ, то существует подпоследовательность $\{u_{k_m}\}$, τ-сходящаяся к некоторой точке $u^*\in U$. Из определения нижней грани J^* и τ-счётной полунепрерывности снизу $J(u)$ тогда имеем:

$$J^*\leqslant J(u^*)\leqslant\varliminf_{m\to\infty}J(u_{k_m})=\lim_{k\to\infty}J(u_k)=J^*,$$

то есть $J(u^*)=J^*$. Отсюда следует, что $J^*>-\infty$, так как $J(u)$ при каждом $u\in U$ принимает конечное значение, и кроме того, $u^*\in U^*$, то есть U^* непусто.

Покажем, что $\{u_k\}$ τ-сходится к U^*. От противного: пусть существует открытое множество O, содержащее U^*, и такое, что для любого $m\geqslant 1$ най-

(4) см. сноски (2) и (3) на стр. 302 и 305.

дётся номер $k_m > m$, что $u_{k_m} \notin O$, $m = 1, 2, \ldots$ В силу τ-счётной компактности U можем считать, что $\{u_{k_m}\}$ τ-сходится к $u^* \in U$. Выше было доказано, что любая τ-предельная точка последовательности $\{u_k\}$ принадлежит U^*. Следовательно, $u^* \in U^*$. Но открытое множество O является окрестностью и для точки u^*. По определению τ-сходимости $\{u_{k_m}\}$ к u^* найдётся номер m_0, что $u_{k_m} \in O$ для всех $m \geqslant m_0$. Получили противоречие с выбором $\{u_{k_m}\}$. Это означает, что произвольная минимизирующая последовательность $\{u_k\}$ τ-сходится ко множеству U^*. Теорема доказана.

Из этой теоремы следует, что для корректности задачи минимизации функции $J(u)$ переменных $u = (u^1, \ldots, u^n)$ на точно заданном множестве $U \subseteq E_n$ достаточно, чтобы U было замкнутым и ограниченным в метрике E_n, а функция $J(u)$ — полунепрерывна снизу.

Приведём ещё две теоремы, являющиеся следствием теоремы 4 и более удобные в приложениях.

Теорема 5. *Пусть B — рефлексивное банахово пространство, U — выпуклое множество из B, ограниченное и замкнутое в метрике B, а $J(u)$ — выпуклый и полунепрерывный снизу в метрике B функционал на U. Тогда задача минимизации $J(u)$ на U корректна в слабой топологии пространства B.*

Доказательство непосредственно следует из теоремы 4, так как при сделанных предположениях U — слабо компактное множество, $J(u)$ — слабо полунепрерывный снизу на U функционал [42], [62], [77].

Из теоремы 5 имеем, что задачи из примеров 5 и 7 § 3 при сделанных там предположениях корректны в слабой топологии $L_2^{(r)}[t_0, T]$ и $L_2[0, T]$ соответственно.

Теорема 6. *Пусть B — рефлексивное банахово пространство, множество $U \subseteq B$, выпукло и замкнуто в метрике B, а функционал $J(u)$ выпуклый на U, полунепрерывен снизу в метрике B и $\lim\limits_{\|u\| \to \infty, u \in U} J(u) = +\infty$. Тогда задача минимизации $J(u)$ на U корректна в слабой топологии B.*

Доказательство. Заметим, что в отличие от предыдущей теоремы множество U не предполагается ограниченным, но зато $\lim J(u) = +\infty$ при $\|u\| \to \infty$, $u \in U$. Возьмём произвольную минимизирующую последовательность $\{u_k\}$: $\lim\limits_{k \to \infty} J(u_k) = J^*$, $u_k \in U$, $k = 1, 2, \ldots$ Очевидно, $\sup\limits_{k \geqslant 1} J(u_k) < +\infty$. Положим $C = \sup\limits_{k \geqslant 1} J(u_k) + 1$ и рассмотрим множество $M_C = \{u\colon u \in U,\ J(u) \leqslant C\}$. Нетрудно видеть, что $\{u_k\} \in M_C$ и $\inf\limits_{u \in M_C} J(u) = \inf\limits_{u \in U} J(u) = J^* = \lim\limits_{k \to \infty} J(u_k)$, то есть $\{u_k\}$ минимизирует $J(u)$ и на множестве M_C. Однако в силу условий теоремы множество M_C выпукло, замкнуто и ограничено в метрике B, и по предыдущей теореме задача минимизации $J(u)$ на M_C корректна в слабой топологии B. Это означает, что множество $U^* = \{u\colon u \in U,\ J(u) = J^*\} = \{u\colon u \in M_C,\ J(u) = J^*\}$ непусто и последовательность $\{u_k\}$, минимизирующая $J(u)$ на M_C, будет слабо сходиться к U^*. Теорема доказана.

Пример 11. Пусть $J(u) = \frac{1}{2}\langle Au, u\rangle - \langle b, u\rangle$, где b — заданный элемент из гильбертова пространства H со скалярным произведением $\langle b, u\rangle$, A — линейный ограниченный симметричный оператор из H в H, причём $\langle Au, u\rangle \geqslant 2\varkappa\|u\|^2$ для всех $u \in H$; $\varkappa = \mathrm{const} > 0$. Требуется минимизировать $J(u)$ на $U \equiv H$.

Такая задача возникает при применении метода Ритца для решения уравнения $Au = b$. Нетрудно видеть, что функционал $J(u)$ непрерывный и выпуклый на H. Кроме того, из оценки $J(u) \geqslant \varkappa\|u\|^2 - \|b\| \cdot \|u\|$ следует, что $\lim\limits_{\|u\| \to +\infty} J(u) = +\infty$. По теореме 6 задача минимизации $J(u)$ на H корректна в слабой топологии H. Ниже будет показано, что на самом деле эта задача корректна в более сильной топологии.

Теоремы 5, 6 дают достаточные условия корректности задач минимизации в слабой топологии рефлексивных банаховых пространств. Для корректности экстремальных задач в норме этих пространств приходится накладывать на функционал более жёсткие ограничения, чем в этих теоремах. Здесь мы ограничимся следующей теоремой.

Теорема 7. *Пусть U — выпуклое замкнутое множество из гильбертова пространства H, $J(u)$ — полунепрерывный снизу сильно выпуклый функционал на U. Тогда задача минимизации $J(u)$ на U корректна в метрике пространства H.*

Сначала напомним

Определение 5. Функционал $J(u)$, определённый на выпуклом множестве U гильбертова пространства, называется *сильно выпуклым*, если существует такая постоянная $\varkappa > 0$, что

$$J(\alpha u + (1-\alpha)v) \leqslant \alpha J(u) + (1-\alpha)J(v) - \varkappa\alpha(1-\alpha)\|u - v\|_H^2 \tag{64}$$

при всех $u, v \in U$ и всех α, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$.

Например, функционал $J(u)$ из примера 11 сильно выпуклый на H, так как

$$\alpha J(u) + (1-\alpha)J(v) - J(\alpha u + (1-\alpha)v) = \tag{65}$$

$$= \alpha(1-\alpha)\tfrac{1}{2}\langle A(u-v), u-v\rangle \geqslant \alpha(1-\alpha)\varkappa\|u-v\|^2, \quad u, v \in H,\ 0 \leqslant \alpha \leqslant 1.$$

Доказательство теоремы 7. Для сильно выпуклых функционалов множество $M(v) = \{u\colon u \in U,\ J(u) \leqslant J(v)\}$ при любом фиксированном $v \in U$ является выпуклым замкнутым и ограниченным в норме H [42]. По теореме 5 функционал $J(u)$ достигает своей нижней грани на $M(v)$ хотя бы в одной точке $u^* \in M(v)$. Но $\inf\limits_{u \in U} J(u) = \inf\limits_{u \in M(v)} J(u) = J(u^*)$, так что u^* является точкой минимума $J(u)$ на всём множестве U. Поскольку сильно выпуклый функционал является строго выпуклым, то $J(u)$ на выпуклом множестве может достигать своей нижней грани не более, чем в одной точке. Таким образом, множество U^* точек минимума $J(u)$ на U состоит из одной точки u^*.

Положим в (64) $\alpha = \frac{1}{2}$, $v = u^*$. Получим

$$\varkappa\|u-v^*\|_H^2 \leqslant 2\left[J(u)-J\left(\frac{u+u^*}{2}\right)\right]+2\left[J(u^*)-J\left(\frac{u+u^*}{2}\right)\right] \leqslant 2[J(u)-J(u^*)]$$

или

$$\|u-u^*\|_H^2 \leqslant \frac{2}{\varkappa}\left(J(u)-J^*\right), \qquad u \in U. \tag{66}$$

Возьмём произвольную минимизирующую последовательность $\{u_k\}$: $\lim\limits_{k\to\infty} J(u_k) = J^*$, $u_k \in U$, $k = 1, 2, \ldots$ Из (66) при $u = u_k$ и $k \to \infty$ получим: $\lim\limits_{k\to\infty} \|u_k - u^*\|_H = 0$. Теорема доказана.

Более общие теоремы см., например, в [50].

Из теоремы 7 следует корректность задачи минимизации из примера 11 в метрике H, так как функционал в этой задаче согласно неравенству (65) является сильно выпуклым. Более того, из (65) нетрудно получить, что всякая минимизирующая последовательность $\{u_k\}$ сходится к точке минимума u^* в так называемой энергетической норме $\|u\|_A = (\langle Au, u\rangle)^{1/2}$.

Далее, пусть в примере 5 функция $f^0(x, u, t)$ такова, что

$$f^0(\alpha x+(1-\alpha)y,\ \alpha u+(1-\alpha)v,\ t) \leqslant \alpha f^0(x,u,t)+(1-\alpha)f^0(y,v,t)+\alpha(1-\alpha)\varkappa|u-v|^2, \tag{67}$$

$$x, y \in E_n, \quad u, v \in E_r, \quad t_0 \leqslant t \leqslant T, \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant 1, \quad \varkappa = \text{const} > 0.$$

Кроме того, если выполнены остальные предположения из примера 5, то задача (15)–(17) согласно теореме 7 корректна в метрике $L_2[t_0, T]$. Интересным для практики примером, когда имеет место неравенство (67), является функция $f^0(x,u,t) \equiv A|x-a(t)|^2+B|u-u_0(t)|^2$, где A, B — постоянные, $A \geqslant 0$, $B > 0$; $a(t)$, $u_0(t)$ — заданные функции из $L_2[t_0, T]$.

Задача минимизации функционала $T_\alpha(u) = J(u)+\alpha\|u\|_{L_2}^2$, где $J(u)$ взят из (18) (пример 6) или из (20) при условиях (21) (пример 7), для каждого $\alpha > 0$ также является корректной в метрике $L_2[a, b]$ или $L_2[0, T]$ соответственно.

Литература

[1] А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин, *Методы решения некорректных задач*, „Наука", Москва 1974.

[2] В. К. Иванов, *Интегральные уравнения первого рода и приближённое решение обратной задачи потенциала*, Докл. АН СССР 142.5 (1962), стр. 997–1000.

[3] —, *О некорректно поставленных задачах*, Матем. сб. 61.2 (1963), стр. 211–223.

[4] —, *О приближенном решении операторных уравнений первого рода*, Журн. вычисл. матем. и матем. физики 6.6 (1966), стр. 1089–1094.

[5] М. М. Лаврентьев, *О некоторых некорректных задачах математической физики*, Изд-во Сиб. отд. АН СССР, Новосибирск 1962.

[6] А. Н. Тихонов, *О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации*, Докл. АН СССР 151.3 (1963), стр. 501–504.

[7] —, *О регуляризации некорректно поставленных задач*, ibid. 153.1 (1963), стр. 49–52.

[8] —, *О методах регуляризации задач оптимального управления*, ibid. 162.4 (1965), стр. 763–766.

[9] —, *О некорректных задачах линейной алгебры и устойчивом методе их решения*, ibid. 163.3 (1965), стр. 591–594.

[10] —, *О некорректных задачах оптимального планирования и устойчивых методах их решения*, ibid. 164.3 (1965), стр. 507–510.

[11] —, *Об устойчивости алгоритмов для решения вырожденных систем линейных алгебраических уравнений*, Журн. вычисл. матем. и матем. физики 5.4 (1965), стр. 718–722.

[12] —, *О некорректных задачах оптимального планирования*, ibid. 6.1 (1966), стр. 81–89.

[13] —, *Об устойчивости задачи оптимизации функционалов*, ibid. 6.4 (1966), стр. 631–634.

[14] —, *О некорректно поставленных задачах*; В сб.: „*Вычислительные методы и программирование*", вып. 8, Изд-во МГУ, 1967, стр. 3–33.

[15] А. Н. Тихонов, В. К. Иванов, М. М. Лаврентьев, *Некорректно поставленные задачи*; В сб.: *Труды симпозиума „Дифференциальные уравнения с частными производными"*, „Наука", Москва 1970, стр. 224–239.

[16] В. А. Морозов, *Линейные и нелинейные некорректные задачи*; В сб. работ ВИНИТИ *Итоги науки и техники*, Математический анализ 11 (1973), стр. 129–178.

[17] А. С. Антипин, *Об едином подходе к методам решения некорректных экстремальных задач*, Вестн. Московск. ун-та, сер. матем. и механика 2 (1973), стр. 61–67.

[18] А. Б. Бакушинский, *Регуляризирующие алгоритмы для решения некорректных экстремальных задач*; В сб.: „*Методы управления большими системами*", т. I, Иркутск 1970, стр. 223–235.

[19] Е. М. Беркович, *Об аппроксимации двухэтапных стохастических экстремальных задач*, Журн. вычисл. матем. и матем. физики 11.5 (1971), стр. 1150–1165.

[20] Ю. П. Боглаев, *О сглаживании оптимального решения в одной задаче регулирования*, ibid. 10.3 (1970), стр. 744–748.

[21] Б. М. Будак, Е. М. Беркович, Е. Н. Соловьева, *О разностных аппроксимациях в задачах оптимального управления*, Вестн. Московск. ун-та, сер. матем. и механика 2 (1968), стр. 41–55.

[22] —, —, —, *О разностных аппроксимациях в задачах оптимального управления*; В сб.: „*Вычисленные методы и программирование*", вып. 12, Изд-во МГУ, 1969, стр. 115–134.

[23] Б. М. Будак, Е. М. Беркович, Ю. Л. Гапоненко, *О построении сильно сходящейся минимизирующей последовательности для непрерывного выпуклого функционала*, Журн. вычисл. матем. и матем. физики 9.2 (1969), стр. 286–299.

[24] Б. М. Будак, Е. М. Беркович, Е. Н. Соловьева, *О сходимости разностных аппроксимаций для задач оптимального управления*, ibid. 9.3 (1969), стр. 522–547.

[25] Б. М. Будак, Е. М. Беркович, *Разностные аппроксимации для задач оптимального управления с подвижными концами при наличии фазовых ограничений I, II, III*, Вестн. Московск. ун-та, сер. матем., механика 6 (1969), стр. 59–68; 1 (1970), стр. 39–47; 3 (1970), стр. 23–33.

[26] —, —, *Об аппроксимации экстремальных задач, I, II*, Журн. вычисл. матем. и матем. физики 11. 3 (1971), стр. 580–596; 11.4, стр. 870–884.

[27] Б. М. Будак, А. Виньоли, Ю. Л. Гапоненко, *Об одном способе регуляризации экстремальной задачи для непрерывного выпуклого функционала*, Докл. АН СССР 184.1 (1969), стр. 12–15.

[28] —, —, —, *Об одном способе регуляризации для непрерывного выпуклого функционала*, Журн. вычисл. матем. и матем. физики 9.5 (1969), стр. 1046–1056.

[29] Б. М. Будак, В. Н. Васильева, *Об обратных задачах с неизвестными коэффициентами для дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений*; В сб.: „*Разностные методы решения краевых задач для интегро-дифференциальных уравнений*", Изд-во МГУ, 1970, стр. 233–274.

[30] —, —, *О решении обратной задачи Стефана*; В сб.: „*Решения задач Стефана*", Изд-во МГУ, 1971, стр. 65–86.

[31] —, —, *О решении обратной задачи Стефана, I*, Журн. вычисл. матем. и матем. физики 13. 1 (1973), стр. 103–118.

[32] —, —, *О решении обратной задачи Стефана, II*, ibid. 13.4 (1973), стр. 897–906.

[33] —, —, *К обратной задаче об определении коэффициентов квазилинейного параболического уравнения*; В сб.: „*Решение задач оптимального управления и некоторых обратных задач*", Изд-во МГУ, 1974, стр. 3–20.

[34] —, —, *К обратной задаче об определении коэффициентов разностного квазилинейного параболического уравнения*, ibid. стр. 21–39.

[35] Б. М. Будак, Ю. Л. Гапоненко, В. Г. Сидорович, *О прямом методе решения некоторой некорректной обратной задачи*; В сб.: „*Решения задач Стефана*", Изд-во МГУ, 1971, стр. 226–234.

[36] Б. М. Будак, Н. Л. Гольдман, *Обратная задача Стефана с неизвестным потоком на границе для квазилинейного параболического уравнения*; В сб.: „*Приближенные методы решения задач оптимального управления и некоторых некорректных обратных задач*", Изд-во МГУ, 1972, стр. 147–171.

[37] —, —, *Об устойчивости квазирешений обратной задачи Стефана для квазилинейного параболического уравнения*, ibid. стр. 172–202.

[38] Б. М. Будак, Ф. П. Васильев, *Некоторые вычислительные аспекты задач оптимального управления*, Изд-во МГУ, 1975.

[39] Ф. П. Васильев, Р. П. Иванов, *О приближенном решении задачи быстродействия в банаховых пространствах при наличии ограничений на фазовые координаты*, Журн. вычисл. матем. и матем. физики 11.2 (1971), стр. 328–347.

[40] Ф. П. Васильев, *Основы численных методов решения экстремальных задач* (тексты лекций), вып. 2, Изд-во МГУ, 1973.

[41] —, *Метод регуляризации в теории оптимального управления*; В сб.: „*Математика на службе инженера*", Изд-во „Знание", Москва 1973, стр. 200–211.

[42] —, *Лекции по методам решения экстремальных задач*, Изд-во МГУ, 1974.

[43] —, *О методе квазирешений в некорректных экстремальных задачах*; В сб.: „*Вычислительные методы и программирование*", вып. 26, Изд-во МГУ, 1976.

[44] М. Г. Дмитриев, В. С. Полещук, *О регуляризации одного класса неустойчивых экстремальных задач*, Журн. вычисл. матем. и матем. физики 12. 5 (1972), стр. 1316–1318.

[45] В. Г. Карманов, *О проблеме устойчивости в математическом программировании*; В сб.: „*Труды всесоюзной школы молодых ученых „Методы решения некорректных задач и их применение*", Изд-во МГУ, 1974, стр. 49–55.

[46] —, *Математическое программирование*, „Наука", Москва 1975.

[47] Л. С. Кириллова, А. А. Пионтковский, *Некорректные задачи в теории оптимального управления* (обзор), Автоматика и телемеханика 10 (1968), стр. 5–17.

[48] И. А. Крылов, *Численное решение задачи об оптимальной стабилизации спутников*, Журн. вычисл. матем. и матем. физики 8. 1 (1968), стр. 203–208.

[49] Р. Латтес, Ж. Л. Лионс, *Метод квазиобращения и его приложения*, „Мир", Москва 1970.

[50] Е. С. Левитин, Б. Т. Поляк, *О сходимости минимизирующих последовательностей в задачах на условный экстремум*, Докл. АН СССР 168.5 (1966), стр. 997–1000.

[51] Ж. Л. Лионс, *Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными*, „Мир", Москва 1972.

[52] М. К. Лихт, Л. Э. Фельдман, *О решении задачи минимизации квадратичного функционала с приближенными исходными данными*, Журн. вычисл. матем. и матем. физики 9.5 (1969), стр. 1004–1014.

[53] Д. А. Молодцов, В. В. Федоров, *Аппроксимация игр двух лиц с передачей информации*, ibid. 13.6 (1973), стр. 1469–1484.

[54] В. А. Морозов, *О принципе невязки при решении операторных уравнений методом регуляризации*, ibid. 8.2 (1968), стр. 295–309.

[55] —, *О регуляризации некоторых классов экстремальных задач*; В сб.: „*Вычислительные методы и программирование*", вып. 12, Изд-во МГУ, 1969, стр. 24–37.

[56] —, *О вычислении нижних граней функционалов по приближенной информации*, Журн. вычисл. матем. и матем. физики 13. 4 (1973), стр. 1045–1048.

[57] —, *О некоторых общих условиях регуляризуемости некорректных вариационных задач*; В сб.: „*Труды I-й конференции молодых ученых факультета ВМиК*", Изд-во МГУ, 1973, стр. 140–164.

[58] —, *Регулярные методы решения некорректно поставленных задач*, Изд-во МГУ, 1974.

[59] О. В. Пионтковский, *О минимизации нелинейных функционалов в нормированных пространствах*, Успехи матем. наук 29 (3) (1974), стр. 225–226.

[60] —, *О минимизации функционалов по методу А. Н. Тихонова*, ibid. 30 (3) (1975), стр. 171–172.

[61] Т. Л. Руднева, А. П. Корольков, *О выборе параметров регуляризации*; В сб.: „*Вычислительные методы и программирование*", вып. 21, Изд-во МГУ, 1973, стр. 42–52.

[62] Ж. Сеа, *Оптимизация. Теория и алгоритмы*, „Мир", Москва 1973.

[63] А. Н. Тихонов, В. Я. Галкин, П. Н. Заикин, *О прямых методах решения задач оптимального управления*, Журн. вычисл. матем. и матем. физики 7.2 (1967), стр. 416–423.

[64] А. Н. Тихонов, В. Г. Карманов, Т. Л. Руднева, *Об устойчивости задач линейного программирования*; В сб.: „*Вычислительные методы и программирование*", вып. 12, Изд-во МГУ, 1969, стр. 3–9.

[65] В. В. Федоров, *Об устойчивости задачи определения кратного максмина*, Журн. вычисл. матем. и матем. физики 15. 1 (1975), стр. 79–86.

[66] —, *К вопросу об устойчивости задачи линейного программирования*, ibid. 15.6 (1975), стр. 1412–1423.

[67] В. Ф. Шолохович, *О неустойчивых экстремальных задачах*, Математич. записки Уральского гос. унив. 7.2 (1969), стр. 103–111.

[68] —, *Неустойчивые экстремальные задачи и геометрические свойства банаховых пространств*, Докл. АН СССР 195. 2 (1970), стр. 289–291.

[69] —, *О приближенном решении неустойчивых экстремальных задач*. Изв. вузов, матем. 5 (1971), стр. 101–108.

[70] —, *Об одном способе численного решения неустойчивых экстремальных задач*, ibid. 6 (1972), стр. 92–100.

[71] —, *О численном решении неустойчивых экстремальных задач*, ibid. 8 (1972), стр. 105–113.

[72] P. Loridan, *Sur un procede d'optimisation utilisant simultanement les methodes de penalisation et des variations locales, I, II*, SIAM J. Control 11.1 (1973), стр. 159–184.

[73] А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, *Элементы теории функций и функционального анализа*, „Наука", Москва 1972.

[74] Ю. В. Егоров, *Некоторые задачи теории оптимального управления*, Журн. вычисл. матем. и матем. физики 3.5 (1963), стр. 887–904.
[75] С. Л. Соболев, *Введение в теорию кубатурных формул*, „Наука", Москва 1974.
[76] О. В. Бесов, В. П. Ильин, С. М. Никольский, *Интегральные представления функций и теоремы вложения* „Наука", Москва 1975.
[77] Н. Данфорд, Дж. Т. Шварц, *Линейные операторы. Общая теория*, Изд-во иностр. литер., Москва 1962.

Примечание при корректуре. После сдачи в печать настоящей обзорной статьи появились работы:

[78] А. Н. Тихонов, Ф. П. Василев, М. М. Потапов, А. Д. Юрий, *О регуляризации задач минимизации на множествах, заданных приближенно*, Вестн. Московск. ун-та, сер. вычисл. математ. и кибернетики 1(1977), стр. 4–19.
[79] А. Б. Бакушинский, *Методы решения монотонных вариационных неравенств, основанные на принципе итеративной регуляризации*, Журн. вычисл. матем. и матем. физики 17.6 (1977), стр. 1350–1362,

в которых получены новые интересные результаты по методам решения некорректных экстремальных задач.

Presented to the Semester
Mathematical Models and Numerical Methods
(February 3–June 14, 1975)

BANACH CENTER PUBLICATIONS
VOLUME 3

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ, СВЯЗАННЫЕ С ОБРАТНЫМИ ЗАДАЧАМИ ГЕОФИЗИКИ И МЕТОД РЕГУЛЯРИЗАЦИИ ТИХОНОВА

В. Б. ГЛАСКО

Московский Государственный Университет, Кафедра Математики, Москва, СССР

1. Введение

Значение концепции регуляризации Тихонова [1]–[3] для анализа некорректно поставленных задач хорошо известно. К числу некорректно поставленных относятся так называемые обратные задачи, если в рамках соответствующей математической модели учитывается лишь элементарная связь между характеристиками изучаемого объекта и характеристиками поля наблюдений.

Рассмотрим следующий простой пример. При определенных модельных представлениях, интенсивность теплового излучения некоторой частоты ν на уровне $z = H$ над поверхностью земли определяется решением следующей задачи Коши [4]–[5]:

$$\frac{dI_\nu}{dz} = -\varkappa I_\nu + \varkappa B[T(z), \nu], \quad 0 < z \leqslant H, \; I_\nu(0) = I_0(\nu), \; |\nu-\nu_0| \leqslant \Delta\nu, \tag{1}$$

где $\varkappa$ — коэффициент поглащения — предполагается известным, и при заданном распределении температуры $T(z)$ в атмосфере интенсивность источников на уровне z описывается формулой Планка

$$B[T, \nu] \approx B[T, \nu_0] = \frac{2\nu_0^3 h}{c^2} \cdot \frac{1}{e^{h\nu_0/kT}-1}. \tag{2}$$

Очевидна следующая явная интегральная зависимость $I_\nu(H)$ от $T(z)$:

$$I_\nu(H) = I_\nu(0)e^{-\varkappa H} + \int_0^H K(\nu, z) B[T(z), \nu_0]\, dz. \tag{3}$$

Одна из обратных задач — задача термического зондирования атмосферы — состоит в том, чтобы по известной, например из наблюдений на спутниках, величине $I_\nu(H)$, как функции частоты, определить температурный профиль