

- [74] Ю. В. Егоров, *Некоторые задачи теории оптимального управления*, Журн. вычисл. матем. и матем. физики 3.5 (1963), стр. 887–904.
- [75] С. Л. Соболев, *Введение в теорию кубатурных формул*, „Наука”, Москва 1974.
- [76] О. В. Бессов, В. П. Ильин, С. М. Никольский, *Интегральные представления функций и теоремы вложения*, „Наука”, Москва 1975.
- [77] Н. Дайфорд, Дж. Т. Шварц, *Линейные операторы. Общая теория*, Изд-во иностр. литер., Москва 1962.

Примечание при корректуре. После сдачи в печать настоящей обзорной статьи появивались работы:

- [78] А. Н. Тихонов, Ф. П. Васильев, М. М. Потапов, А. Д. Юрий, *О регуляризации задач минимизации на множествах, заданных приближенно*, Вестн. Московск. ун-та, сер. вычисл. математ. и кибернетики 1(1977), стр. 4–19.
- [79] А. Б. Бакушинский, *Методы решения монотонных вариационных неравенств, основанные на принципе итеративной регуляризации*, Журн. вычисл. матем. и матем. физики 17.6(1977), стр. 1350–1362,

в которых получены новые интересные результаты по методам решения некорректных экстремальных задач.

*Presented to the Semester
 Mathematical Models and Numerical Methods
 (February 3–June 14, 1975)*

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ, СВЯЗАННЫЕ С ОБРАТНЫМИ ЗАДАЧАМИ ГЕОФИЗИКИ И МЕТОД РЕГУЛЯРИЗАЦИИ ТИХОНОВА

В. Б. ГЛАСКО

Московский Государственный Университет, Кафедра Математики, Москва, СССР

1. Введение

Значение концепции регуляризации Тихонова [1]–[3] для анализа некорректно поставленных задач хорошо известно. К числу некорректно поставленных относятся так называемые обратные задачи, если в рамках соответствующей математической модели учитывается лишь элементарная связь между характеристиками изучаемого объекта и характеристиками поля наблюдений.

Рассмотрим следующий простой пример. При определенных модельных представлениях, интенсивность теплового излучения некоторой частоты ν на уровне $z = H$ над поверхностью земли определяется решением следующей задачи Коши [4]–[5]:

$$(1) \quad \frac{dI_\nu}{dz} = -\kappa I_\nu + \kappa B[T(z), \nu], \quad 0 < z \leq H, \quad I_\nu(0) = I_0(\nu), \quad |\nu - \nu_0| \leq \Delta \nu,$$

где κ — коэффициент поглощения — предполагается известным, и при заданном распределении температуры $T(z)$ в атмосфере интенсивность источников на уровне z описывается формулой Планка

$$(2) \quad B[T, \nu] \approx B[T, \nu_0] = \frac{2\nu_0^3 h}{c^2} \cdot \frac{1}{e^{\hbar\nu_0/kT} - 1}.$$

Очевидна следующая явная интегральная зависимость $I_\nu(H)$ от $T(z)$:

$$(3) \quad I_\nu(H) = I_\nu(0)e^{-\kappa H} + \int_0^H K(\nu, z) B[T(z), \nu_0] dz.$$

Одна из обратных задач — задача термического зондирования атмосферы — состоит в том, чтобы по известной, например из наблюдений на спутниках, величине $I_\nu(H)$, как функции частоты, определить температурный профиль

атмосферы $T(z)$. В силу соотношения (2) задача сводится, очевидно, к определению функции $B = B(z, v_0) = B(z)$, которая является теперь решением интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода (3). Если, однако, уравнение (3) рассматривать как математическую постановку обратной задачи, то ее некорректность хорошо известна.

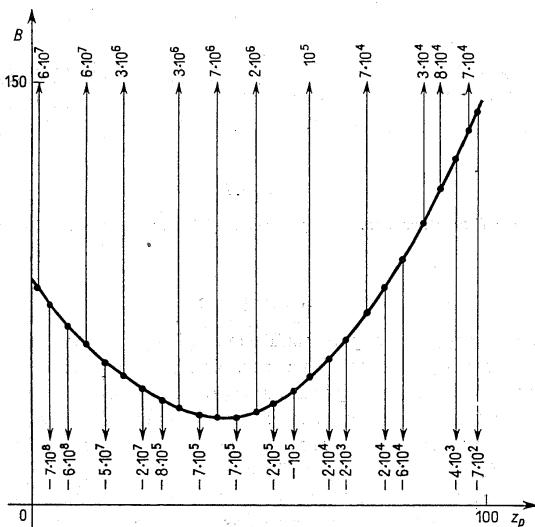


Рис. 1

Следствием этого является неэффективность прямых методов решения уравнения (3) при неточно заданной $I_s(H)$. Иллюстрацией этого служит рис. 1. На этом рисунке сплошной кривой изображена интенсивность источников $B(z)^{(1)}$. По ней был вычислен с машинной точностью ($\delta = 10^{-9}$) внешинтегральный член уравнения (3), затем редуцированное к алгебраической системе 50-го порядка уравнение было решено на ЭВМ. Результат решения изображен на том же рисунке стрелками.

К иной математической модели и иному результату приводят концепция регуляризации. Примем во внимание что искомый температурный профиль и соответственно $B(z)$ является гладкой функцией, и что значение температуры на краях сегмента $[0, H]$ могут быть известны. Будем искать максимально гладкую функцию, из множества удовлетворяющих заданным гра-

⁽¹⁾ По оси координат отложены безразмерные аналоговые значения. В частности, по оси абсцисс, относительное давление z_p .

ничным условиям и совместимых с наблюдаемой $I_s(H)$ в пределах погрешности наблюдений: $\| \tilde{I}_s(H) - I_s(H) \| \leq \delta$. При этом задача сводится к минимизации сглаживающего параметрического функционала Тихонова:

$$(4) \quad \inf \left\{ M[B] + \alpha \int_0^H B'^2(z) dz \right\}, \quad B(0) = B_0, \quad B(H) = B_H,$$

где

$$M[B] = \int_{|v-v_0| < \Delta v} \{u[v, B] - \tilde{u}(v)\}^2 dv, \quad u[v, B] = \int_0^H K(v, z) B(z) dz,$$

$\tilde{u}(v)$ — внешинтегральный член в (3), и значение параметра α может быть выбрано по условию:

$$(5) \quad M[B] = \delta^2.$$

Полученное таким образом приближение $B^{(\alpha, \delta)}$ удовлетворяет принципу регуляризации, т.е. $B^{(\alpha, \delta)} \rightarrow \bar{B}$ при $\delta \rightarrow 0$ где \bar{B} решение уравнения (3) при точно заданной $I_s(H)$; это приближение, найденное [5] при прежней разностной аппроксимации (4)–(5) изображено точками на рисунке 1.

Оказывается, таким образом, что изменение математической постановки в соответствии с концепцией регуляризации, на основе использования достаточно общей качественной информации об искомом решении, позволяет получать нужное приближение искомой величины.

Рассмотренный пример относится к той области физики, где накоплен предварительный статистический материал о характеристиках изучаемой среды. В этой связи при их поиске могут использоваться также статистические модели. Задачи, рассматриваемые далее в рамках концепции регуляризации относятся главным образом к физике земных недр, где реальный статистический материал отсутствует.

Рассмотренный пример связан с линейной зависимостью „наблюдаемой“ величины от искомой. В рассматриваемых ниже задачах такая зависимость нелинейна.

Теория регуляризации допускает использование любой априорной информации (и качественной и количественной) об искомом решении [2], [3], в рамках соответствующей вариационной задачи. В настоящей статье мы будем пользоваться минимальной, в основном — качественной априорной информацией.

Мы будем также предполагать здесь, что элементарная математическая модель обратной задачи, выраженная уравнением

$$Az = u, \quad z \in Z, \quad u \in U$$

где Z — множество характеристик изучаемого объекта, а U — множество характеристик поля наблюдений, сопоставимых с данными эксперимента — не отклоняется существенно от физики явления; иначе говоря, пренебрежём

погрешностью оператора A в сравнение с погрешностью входных данных. Заметим, однако, что применяемая нами методика, приводящая к устойчивому результату, может служить проверкой правильности принятой модели, в случае, если последняя является гипотетической [2].

Рассматриваемые ниже задачи относятся к классу интерпретации данных физического эксперимента, в условиях когда изучаемый объект трудно доступен прямому зондированию [2]. Для таких задач принципиальное значение имеет проблема единственности решения в рамках принятой модели при точном задании входных данных. Решение этой проблемы позволяет, в частности, судить о „разрешающей способности“ используемой физической методики при заданном уровне погрешности входных данных. В настоящей статье мы остановимся на вопросах единственности в связи с некоторыми задачами.

2. Об одной обратной задаче сейсмологии

2.1. Для прогнозирования региональных структур земной коры широко используются данные о дисперсии поверхностных сейсмических волн Релея и Лява, получаемые из наблюдений на дневной поверхности.

Рассмотрим элементарную математическую модель задачи на примере поверхностных волн Лява. Для региональной структуры принимается обычно изотропная плоско-слоистая модель земной коры, которую в данной точке земной поверхности можно охарактеризовать следующими параметрами: n — число плоско-параллельных слоев; b_i — скорости волн сдвига в различных слоях; h_i — глубина залегания слоев (или d_i их толщины); μ_i — модули упругости слоев (или ρ_i — их плотности, поскольку $b_i^2 = \mu_i/\rho_i$). Принимается, что структура из n -слоев покоятся на упругом полупространстве с параметрами b_{n+1} , μ_{n+1} .

Гармоническая составляющая волны Лява частоты ω содержит единственную компоненту смещения, которая в пренебрежении горизонтальной неоднородностью структуры выражается формулой:

$$u(x, z, t) = v(z)e^{i\omega(t-x/c)},$$

где $c = c(\omega)$ — фазовая скорость волны, зависящая также и от совокупности параметров структуры \vec{p}_n .

Для определения $c(\omega)$ в слоистой среде имеем следующую задачу о собственных значениях [7]–[8]:

$$(7) \quad v'' + \omega^2(b_i^{-2} - c^{-2})v = 0, \quad h_{i-1} < z < h_i, \quad i = 1, 2, \dots, n+1, \\ (z_0 = 0, \quad z_{n+1} = \infty);$$

$$v'|_{z=0} = 0, \quad v_i|_{z=h_i} = v_{i+1}|_{z=h_i};$$

$$\nu_i v'_i|_{z=h_i} = v'_{i+1}|_{z=h_{i+1}}; \quad v_{n+1}|_{z \rightarrow \infty} \rightarrow 0,$$

где $\nu_i = \mu_i/\mu_{i+1}$.

Эта задача имеет бесконечный дискретный спектр собственных значений [8], среди которых наименьшее $c = c_0(\omega)$ сопоставимо с величиной, извлекаемой из данных наблюдений (основным тоном колебаний).

Для расчета основного тона в произвольной заданной структуре имеются хорошо разработанные алгоритмы [9]–[10] на описании которых мы здесь не останавливаемся. Обозначим через $c[\omega, \vec{p}_n]$ функцию, определяемую первым собственным значением задачи (7), а через $\{c_s = c(\omega_s)\}$ — набор значений фазовой скорости, получаемых из данных наблюдений.

Тогда элементарной формулировке интересующей нас обратной задачи об определении \vec{p}_n по заданному набору значений c_s соответствует операторное уравнение:

$$c[\omega_s, \vec{p}_n] = c_s, \quad s = 1, 2, \dots, m, \quad (8)$$

где m — полное число искомых параметров структуры. То обстоятельство, что левая часть (8) определена неявно, очевидно, не существенно, поскольку есть алгоритмы для её расчета.

Однако, задача (8) поставлена некорректно по следующим причинам. Во-первых, при неизбежной погрешности входных данных: $c_s = \tilde{c}_s$, $\|c_s - \tilde{c}_s\| \leq \delta$, система (8), даже в пренебрежении неточностью модели, строго говоря, несовместна, т.е. не обязана иметь решений. Во-вторых, даже при точных c_s решение заведомо не единствено. Действительно, как видно из условий задачи (7) дисперсионный спектр не меняется при изменении параметров среды, сохраняющем значения отношений $\nu_i = \mu_i/\mu_{i+1}$. В-третьих, так как фазовые скорости слабо зависят от некоторых параметров структуры [11], то система (8) плохо обусловлена [12], а потому неустойчива относительно вариации c_s .

2.2. Проблема существования решения снимается переходом к задаче о минимизации среднеквадратичного функционала:

$$(9) \quad M[\vec{p}_n] = \sum_{s=1}^N \{c[\omega_s, \vec{p}_n] - \tilde{c}_s\}^2, \quad N \geq m.$$

Однако, такая постановка сама по себе не устраивает неустойчивости [11] и сохраняет множественность решений при $\delta \rightarrow 0$.

Обратимся к вопросу о единственности решения задачи (8), (9) при $\delta = 0$. Можно предположить, что точным дисперсионным данным однозначно соответствует некоторая часть полного набора параметров структуры, так что применение метода поверхностных волн в принципе требует достаточно представительной априорной информации о параметрах структуры. Мы, однако, будем рассматривать проблему при минимальной априорной информации о структуре, вытекающей из характера явной неоднозначности решения. Такой минимальной информацией может быть значение жесткости (или плотности) в одном, например, верхнем слое.

Рассмотрим следующую группу параметров, называемых существенными

$$(10) \quad \vec{q}_n = \{n, b_i \ (i = 1, 2, \dots, n+1), v_j, d_j \ (j = 1, 2, \dots, n)\}.$$

Нас будет интересовать вопрос о том, однозначно ли соответствие $c(\omega) \rightarrow \vec{q}_n$, где $c(\omega)$ основной тон волны Лява. Заметим, что выделив из спектра задачи (7) основной тон, мы ставим проблему в соответствии с условиями эксперимента и вместе с тем отказываемся от классической постановки проблемы (определения коэффициентов дифференциального уравнения по спектру краевой задачи).

Оказывается справедливой [8] следующая

Теорема. В классе структур, удовлетворяющих условию $b_1 = \min_{1 \leq i \leq n+1} b_i$,

дисперсионная кривая основного тона поверхности волны Лява однозначно определяет все существенные параметры структуры (включая и число её слоев).

Заметим, что условие теоремы в сущности не накладывает каких-либо ограничений на реальные структуры; согласно геологическим данным реальные структуры, в частности, содержащие глубинные волноводы — удовлетворяют этому условию. Установленный факт свидетельствует, в частности о том, что метод поверхностных волн способен дать достаточно детальное представление о структуре (в рамках принятой модели).

Аналогичные результаты получены нами для волн Релея [13], и в дальнейшем мы рассмотрим некоторые аспекты интерпретации поверхностных волн этого типа.

Теперь мы имеем основание вернуться к задаче (9), рассматривая функционал в зависимости лишь от существенных параметров: $M = M[\vec{q}_n]$.

Решению проблемы устойчивости в условиях единственности точного решения, могут способствовать априорные количественные ограничения на искомые параметры. Формулировка таких ограничений существует то, что параметры слоистых структур земных недр меняются в не слишком широких пределах⁽²⁾. В этом случае задача (9) вводится в класс корректности по Тихонову [14], [15] в следующей формулировке:

$$(11) \quad \inf M[\vec{q}_n], \quad \vec{q}_n \in \bar{G}.$$

Отметим, что множество \bar{G} должно быть все же достаточно „широким”, в противном случае постановка (11) может оказаться несостоятельной [2] при достаточно малых δ .

Однако, согласно концепции регуляризации, для вполне корректной постановки задачи о поиске приближения при конечном δ оказывается достаточно использовать самой общей априорной информации об искомой структуре. Зададимся, например по данным об изученных районах, некоторым вектором \vec{q}_r^0 ($r \geq n$), и будем искать приближение, наименее уклоняющееся

⁽²⁾ Последнее обстоятельство делает такую задачу критически неустойчивой, несмотря на то, что искомая характеристика принадлежит конечномерному евклидову пространству.

от \vec{q}_r^0 и совместимое с точностью входных данных задачи. Соответствующей постановкой [16], [18] будет задача о минимизации сглаживающего функционала Тихонова:

$$(12) \quad \inf \{M[\vec{q}_r] + \alpha \Omega[\vec{q}_r]\},$$

где $\Omega[\vec{q}_r] = \|\vec{q}_r - \vec{q}_r^0\|_{\ell_r}^2$, и α может быть определено условием:

$$(13) \quad M[\vec{q}_r^*] = \delta^2,$$

при заданном уровне погрешности входных данных.

2.3. Поскольку вытекающие из (12) алгоритмы удовлетворяют принципу регуляризации: $\vec{q}_r^{(0)} \rightarrow \vec{q}_r$ при $\delta \rightarrow 0$ они являются регуляризирующими алгоритмами (РА).

Обратим внимание на некоторые аспекты построения РА, как общие, так и связанные со спецификой рассматриваемой задачи.

Существует развитая методика решения задачи о минимизации функционала. Для поиска экстремали (12) при каком-либо α неизбежен, вследствие нелинейности задачи, итерационный процесс, сходимость которого зависит вообще говоря, от выбора начального приближения. Можно заметить [19], что сглаживающий параметрический функционал содержит в себе общий алгоритм спуска по параметру, экономизирующий процесс вычислений и в значительной степени снимающий проблему выбора начального приближения. Действительно, при выбранном нами регуляризаторе $\vec{q}_r \rightarrow \vec{q}_r^0$ при $\alpha \rightarrow \infty$ (напр. [20]), следовательно, при достаточно большом $\alpha = \alpha_0$, известно, ,хорошее начальное приближение⁽³⁾: \vec{q}_r^0 к экстремали сглаживающего функционала. Зададимся сеткой значений α_p (обычно, $\alpha_p = \mu \alpha_{p-1}$, $p = 1, 2, \dots, \mu < 1$); для $\alpha = \alpha_1$ в качестве начального приближения выберем $\vec{q}_r^{\alpha_1}$, что позволит эффективно определить $\vec{q}_r^{\alpha_1}$; для $\alpha = \alpha_2$ начальным приближением может быть $\vec{q}_r^{\alpha_1}$ и т.д. В рассматриваемой задаче применение „спуска по параметру” приводит обычно к экономичному „диагональному” процессу [16], когда для удовлетворительного по точности определения экстремали оказывается достаточно одним итераций (как в линейных задачах). Указанное свойство сглаживающего функционала существенно и для других, рассматриваемых ниже задач.

Заметим, далее, что в нашей постановке (12) размерность пространства (n) является, вообще говоря, искомой. Это значит, что если действительная структура содержит меньшее выбранного числа слоев ($n < r$), то отдельные варьируемые параметры (толщины фиктивных слоев) могут принимать некоторое множество значений. Тем самым, в этом случае существует формальное множество решений G^* , оказывающееся выпуклым. Тем не менее, РА и в этом случае [12], [20] приводит при $\delta \rightarrow 0$ к единственному („главному”) решению \vec{q}_r^* , подчиняющемуся условию:

$$(14) \quad \|\vec{q}_r^* - \vec{q}_r^0\| = \inf \|\vec{q} - \vec{q}_r^0\|, \quad \vec{q} \in G^*.$$

⁽³⁾ Здесь и в дальнейшем \vec{q}^* — экстремаль сглаживающего функционала.

Наконец, выбор приближения по условию (13) предполагает известной величину δ . Однако, в рассматриваемой задаче дисперсионные данные получаются в результате некоторой первичной обработки сейсмограмм, и не все этапы этой обработки допускают оценку по точности. Если δ не задана в эксперименте, то для выбора приближения (машинного прерывания процесса спуска) можно пользоваться также „квазиоптимальным” критерием [19]:

$$(15) \quad \inf \left\| \alpha - \frac{\partial \tilde{q}_r^\alpha}{\partial \alpha} \right\|, \quad \alpha < \alpha_0.$$

Т.к. проблема оценки точности первичной обработки носит достаточно общий характер в задачах интерпретации, то сделанное замечание имеет значение и для других рассматриваемых ниже задач.

Приводимые ниже результаты получены, в основном с использованием „квазиоптимального” критерия.

2.4. Рассмотрим некоторые результаты использования РА в классических аспектах прогнозирования региональных структур по дисперсии волн Релея.

Метод поверхностных волн используется, в частности для определения глубины залегания границ Конрада и Мохоровичича. При этом прочие параметры считаются найденными с помощью других методов. Такая задача априори входит в класс единственности, и является устойчивой; РА применим, конечно, и в этом случае, целесообразность чего определяется содержащимся в нём процессом спуска по параметру. С помощью РА нами были определены глубины залегания поверхностей Конрада и Мохоровичича по различным профилям в районе Средней Азии (СССР). Погрешность входных данных достигала 3–4-%. В качестве начального приближения был выбран $\tilde{q}^0 = \{15 \text{ км}, 30 \text{ км}\}$, что на 50% отличается от данных ГСЗ. Приведем значения, найденные для двух из рассмотренных профилей: $\tilde{q}^{(1)} = \{25 \text{ км}, 54 \text{ км}\}$, $\tilde{q}^{(2)} = \{41 \text{ км}, 58 \text{ км}\}$. Данные ГСЗ, имеющиеся для последнего профиля определяют толщину земной коры (поверхность Мохоровичича) ~60 км. Заметим, что при указанном начальном приближении соответствующий алгоритм прямой минимизации $M[\tilde{q}]$ ($\alpha = 0$) уводит от действительной структуры: первая его итерация дает $\tilde{q} = \{83 \text{ км}, 100 \text{ км}\}$, что противоречит геологическим данным о средней глубине залегания искомых поверхностей. В дальнейшем алгоритм при $\alpha = 0$ расходится.

Вопрос о возможности восстановления структуры в условиях неопределенности числа слоев рассмотрим на следующем простом примере. Пусть однослоистая структура задана параметрами $\tilde{q} = \{b_1 = 3,55 \text{ км/сек}, b_2 = 4,65 \text{ км/сек}, \varrho_1 = 2,74 \text{ г/см}^3, \varrho_2 = 3,32 \text{ г/см}^3\}$, и для нее в некотором диапазоне частот рассчитаны дисперсионные данные $c_s = c(\omega_s)$. Выберем в качестве начального приближения двухслойную модель, отличающуюся по значениям пара-

(*) На геометрической прогрессии $\{\alpha_p\}$ соответствующая норма эквивалентна $\|\tilde{q}_{rp+1} - \tilde{q}_r^\alpha\|$.

метров от истинной не менее, чем на 25%: $\tilde{q} = \{b_1 = 2 \text{ км/сек}, b_2 = 4 \text{ км/сек}, b_3 = 5,5 \text{ км/сек}, \varrho_1 = \varrho_2 = 3,5 \text{ г/см}^3, d_1 = 10 \text{ км}\}$ (5). Найденное приближениедается следующим вектором: $\tilde{q} = \{b_1 = 3,5501 \sim b_2 = 3,5496, b_3 = 4,6500, \varrho_1 = 2,7391 \sim \varrho_2 = 2,7405, d_1 = 9,993\}$, и таким образом, совпадает с действительной структурой с хорошей точностью. Величина d_1 является фиктивным параметром.

Для оценки устойчивости РА представляет интерес результаты расчетов на ЭВМ структуры коры в районе Нью-Йорк–Пенсильвания (США), полученные по одним и тем же экспериментальным данным, при одном и том же начальном приближении и даже сходными (исключая вид минимизируемого функционала) алгоритмами минимизации — в двух различных работах [11], [17]. Результат [11], автоматически полученный на ЭВМ, с учетом только варьируемых параметров дается вектором $\tilde{q} = \{b_1 = 3,70, b_2 = 4,29, \varrho_1 = 1,34, d_1 = 46,5\}$, что противоречит геологии хотя бы по аномальному значению плотности, и результатам других работ (например [37]), использующих данные иной природы — по остальным параметрам. Авторы [11] делают вывод о необходимости исключения плотности из числа варьируемых параметров, как „пассивного” (слабо влияющего на дисперсионную кривую). Между тем РА [17] приводит к следующей структуре: $\tilde{q} = \{b_1 = 3,61, b_2 = 4,68, \varrho_1 = 3,07, d_1 = 36,03\}$, где значение плотности уже отвечает геологической информации. Интересно, что этот результат хорошо совпадает с полученным с помощью ГСЗ в [37], где плотность не определялась: $\tilde{q} = \{b_1 = 3,61, b_2 = 4,69, d_1 = 36,3\}$.

Таблица 1

Данные	Параметры							погреш. р-та %
	h_1 км	h_2 км	b_1 км/сек	b_2 км/сек	b_3 км/сек	ϱ_2 $\text{г}/\text{см}^3$	ϱ_3 $\text{г}/\text{см}^3$	
Точный разрез	18	40	3,45	3,95	4,70	2,9	3,3	—
Начальн. приближ.	25	54	3,29	3,70	4,565	2,85	3,25	до 38
Результат 1 ($\delta = 0$)	17,95	39,98	3,450	3,949	4,700	2,900	3,301	$\leq 0,3$
Результат 2 ($\delta = 0,01$)	18,05	40,5	3,45	3,97	4,69	—	—	$\leq 1,2$
Результат 3 ($\delta = 0,13$)	19,1	49,6	3,45	4,32	4,57	—	—	до 24
Первое приближ. $\alpha = 0, \delta = 0$	16,3	61,6	3,48	5,32	4,31	—	—	до 55

Наконец, результаты, приведенные в таблице 1 относятся к исследованию одного из профилей Средне-Русской платформы [18] и иллюстрируют

(*) Здесь указаны только варьируемые параметры, причем d_1 — толщина слоя, отсутствующего в точной структуре.

зависимость приближения найденного по РА от точности дисперсионных данных. Вследствие устойчивости алгоритма они позволяют судить о разрешающей способности метода поверхностных волн в рамках принятой слоистой модели коры. Видно, что при погрешности на уровне 1% получается удовлетворительный результат по всем параметрам.

3. О некоторых обратных задачах гравиметрии

Как нетрудно заметить для практической реализации регуляризующего алгоритма, вытекающего из корректной вариационной постановки задачи (12), требуется лишь умение решать соответствующую „прямую”, т.е. рассчитывать для произвольной характеристики объекта эффект, сопоставимый с данными наблюдений: $u = Az$.

Неудивительно поэтому, что совершенно аналогичная методика применима к задачам совсем другого класса, связанным с изучением локальных или региональных структур земных недр по аномалиям гравитационного поля. Мы не занимаемся здесь анализом первичной обработки экспериментальных данных гравиметрии и редукций, предполагая аномальное гравитационное поле уже известным, естественно, с определенной погрешностью: $\|u - \tilde{u}\| \leq \delta$; поверхность „наблюдений” считаем плоской.

Область эффективного применения РА в задачах гравиметрии достаточно широка [19]–[23], и здесь мы остановимся только на так называемых „контактных” задачах [19].

3.1. Предметом контактной задачи является восстановление границ раздела сред различной плотности в недрах земли. Для простоты ограничимся простейшей моделью структуры, считая источники аномалий и гравитационное поле $u = u(x, z)$ двухмерными, контакт единичным и отклоняющимся от горизонтального уровня лишь на некотором заданном сегменте $[a, b]$. Избыточную плотность структуры, порождающую аномалию, будем считать известной (для определенности — постоянной).

Последнее ограничение, в отличие от первых двух, существенно для гравиметрического метода исследования структур, поскольку хорошо известны примеры эквивалентности структур обладающих различной геометрией и к тому же различным распределением плотности. С другой стороны, при заданной плотности геометрия источника определяется однозначно при условиях [24], не накладывающих существенных ограничений на типы границ раздела сред („контактов”); в частности, двумерный контакт может описываться осцилирующей над некоторым горизонтальным уровнем $z = H$ кривой.

При сделанных предположениях аномальное поле связано с конфигурацией источника следующими условиями:

$$(16) \quad u(x) = \frac{\partial v}{\partial z}(x, z)|_{z=0}, \quad \Delta v(x, z) = \begin{cases} -2\pi\varrho_0 & \text{в } G, \\ 0 & \text{вне } G, \end{cases}$$

где G определяется условиями: $H \leq z < H - z(x)$, $a \leq x \leq b$, причем $z(x)$ — верхняя граница контакта, в системе координат, связанной с уровнем $z = H$; очевидно, что по условию задачи $z(a) = z(b) = 0$.

В интересующей нас обратной задаче искомыми величинами являются $z(x)$ и H . Элементарная связь их с заданным полем $u(x)$ может быть в данном случае записана явно, в виде нелинейного интегрального соотношения

$$(17) \quad A[H, z] \equiv \int_a^b K[x, \xi, z(\xi), H] d\xi = u(x), \quad c \leq x \leq d,$$

где (c, d) — область наблюдений, а $K[x, \xi, z, H]$ легко выражается из условия (16) в конечной форме [19].

Поскольку имеется дополнительная информация о том, что контакт является гладким, будем искать приближение среди максимально гладких функций, удовлетворяющих заданным граничным условиям, а значение H — минимально уклоняющимся от некоторого заданного H_0 . Для этого достаточно потребовать

$$(18) \quad \inf Q[z, H], \quad Q[z, H] = \int_a^b z'^2 d\xi + p(H - H_0)^2,$$

где $p > 0$ — некоторый масштабный множитель. Условие совместимости минимизирующего элемента с данными наблюдений остается прежним: $M[z, H] \leq \delta^2$, где в данном случае

$$M[z, H] \equiv \int_c^d \{A[H, z] - \tilde{u}(x)\}^2 dx.$$

В результате вновь приходим к задаче о минимализации сглаживающего параметрического функционала:

$$\inf \{M[z, H] + \alpha Q[z, H]\}, \quad z(a) = z(b) = 0, \quad M[z^*, H^*] = \delta^2$$

определяющей корректную постановку⁽⁶⁾ для поиска приближения.

3.2. Рассмотрим некоторые результаты интерпретации гравитационного поля, полученные с помощью РА, идентичного по общей структуре выше описанному. Мы не останавливаемся здесь на вопросах разностной аппроксимации элементов задачи необходимой для реализации РА на ЭВМ. Здесь и в дальнейшем результаты „модельных” расчетов можно отличить по безразмерному масштабу на рисунках.

На рисунке 2 представлены начальное приближение (штрихами) и результат интерпретации (точки) в сравнении с точным решением (сплошная кривая), известным в рассматриваемой модельной задаче. Заметим, что поле, расчитанное по известному контакту задавалось на сегменте, втрое превос-

⁽⁶⁾ Заметим, что получаемое приближение удовлетворяет принципу регуляризации, поскольку выбранный функционал $Q[z, H]$ (регуляризатор) определяет компакт в пространстве $Z[z(x), H]$ в силу граничных условий $z(a) = z(b) = 0$.

ходящим интервалом $[a, b]$ [25]. Отказ от регуляризации даже при точном задании поля приводит к сильным искажениям. Так, например, штрих-пунктир на рис. 2 изображает „приближение”, найденное при $\alpha < \alpha(\delta)$, выбираемого по одному из критериев (13), (15); в пределе ($\alpha \rightarrow 0$) мы получили бы картину, аналогичную изображенной стрелками на рисунке 1.

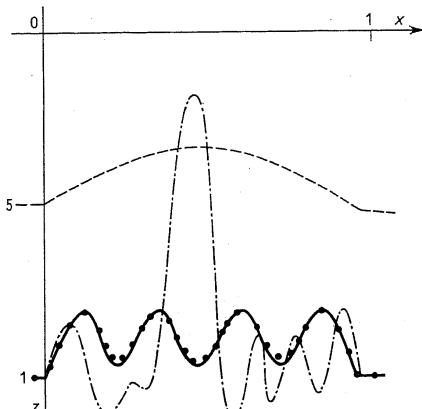


Рис. 2

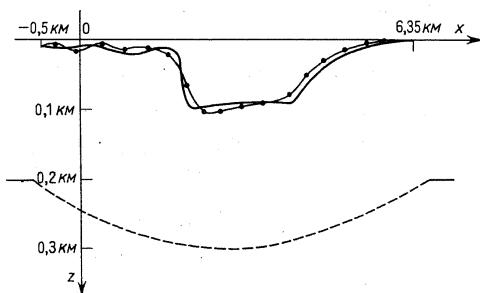


Рис. 3

На рисунке 3 (в аналогичных обозначениях) изображен результат восстановления границы раздела по реальным экспериментальным данным в одном из районов СССР [26]. В данном случае погрешность аномального поля составляла 3% от его максимального значения. Представленный на рисунке „точный” контакт известен в этом районе по данным бурений. Значение H

оказалось близким к нулю, что отвечает действительности, и уклонение приближения от буровых данных согласуется с погрешностью наблюдений.

В заключение остановимся на возможности расширения модели интерпретации в рамках контактных задач. Гравитационный метод, как показывают, в частности исследования глубинных границ раздела с помощью РА [25], обладает по отношению к таким границам малой разрешающей способностью. Поэтому обычно глубинные контакты ищут в рамках параметрических грубых моделей⁽⁷⁾. Усложнение модели за счет введения в рассмотрение, наряду с приповерхностными, глубинных контактов заданного класса (например, наклонных ступеней) — приводит лишь к добавлению соответствующих членов в выражение наблюдаемого поля (17). Если глубинные контакты характеризуются совокупностью параметров \vec{p}_n , то в регуляризатор (Ω) также добавляется член $\|\vec{p}_n - \vec{p}_n^*\|_{\tilde{\epsilon}_n}^2$, где норма может быть взвешенной, в соответствии с различными масштабами параметров.

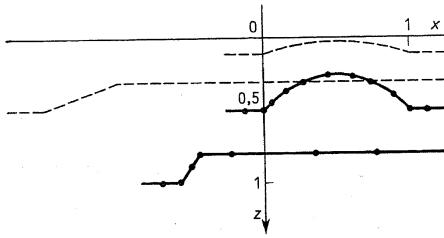


Рис. 4

На рисунке 4 представлен результат [25] восстановления пары контактов (точки) в сравнение с точным (заданным в модельной задаче) решением и начальным приближением (штрихи). Видно, что приближение оказывается вполне удовлетворительным даже при достаточно далеком начальном.

Заметим, что принципиальная возможность усложнения модели упрощает задачи первичной обработки. Например, если нас интересует лишь „приповерхностный” контакт, аномальное поле от которого едва заметно на региональном фоне, то последний можно рассматривать, как влияние некоторой глубинной, крупноблочной, структуры и интерпретировать с помощью РА непосредственно наблюдаемое поле.

4. Задача магнито-теллурического зондирования (МТЗ)

Метод МТЗ в геофизике предложен в работах [27], [28] и связан с использованием, для прогнозирования региональных структур, вариаций во времени

⁽⁷⁾ Мы оставляем в стороне вопрос о том, на каких глубинах в недрах земли контакт вообще может обладать тонкой структурой.

естественного электромагнитного поля земли. Мы ограничимся здесь рассмотрением простейшей плоско слоистой модели структуры, при нормальном падении плоской гармонической электромагнитной волны на дневную поверхность.

4.1. Величиной, сопоставимой с данными наблюдений в рассматриваемой задаче служит импеданс среды $I = I(\omega)$ (отношение амплитуд магнитного и электрического полей на поверхности земли), как функция частоты ω . Рассмотрим достаточно простую модель, когда слой с произвольным изменением проводимости σ по глубине ($\sigma = \sigma(z)$) покоятся на полупространстве $z \geq H$ с постоянной проводимостью σ_0 . В этом случае импеданс $I(\omega)$ связан с геоэлектрическим разрезом следующими условиями [29]:

$$(20) \quad I(\omega) = \frac{1}{v'(z)} \Big|_{z=0}, \quad v''(z) + i\omega\sigma(z)v(z) = 0, \quad 0 \leq z \leq H,$$

$$v|_{z=0} = 1, \quad v' \Big|_{z=H} = (1+i)\sqrt{\frac{\omega\sigma_0}{2}}v \Big|_{z=H} \quad (8)$$

Алгоритм расчета импеданса по заданному $\sigma(z)$ из краевой задачи (20) разработан в достаточно широких классах разрезов [30], [31], и тем самым прямой эффект: $I(\omega)$ мы умеем рассчитать при любом заданном геоэлектрическом разрезе.

В рассматриваемой обратной задаче искомыми величинами являются: H , σ_0 , $\sigma(z)$.

Проблема единственности определения геоэлектрического разреза по заданному импедансу структуры решена в [32] в классе кусочно-аналитических функций. Для разреза с кусочно-постоянной проводимостью, завершающая корректная постановка задачи может быть формулирована [33] аналогично [11], что соответствует в силу единственности введению задачи в класс корректности по Тихонову [14]. Это требует использования достаточно детальной количественной информации об искомой структуре, что в случае, например, непрерывного изменения $\sigma = \sigma(z)$ затруднительно.

Использование, в соответствии с концепцией регуляризации, минимальной качественной информации позволяет и в этом случае формулировать корректную постановку аналогично (12), (19).

Здесь удобно [29], [31] проводить сопоставление модулей импеданса, так что

$$(21) \quad M[H, \sigma_0, \sigma] \equiv \sum_{s=1}^N \{|I(\omega_s, H, \sigma_0, \sigma)| - |\tilde{I}_s|\}^2,$$

где первый член в скобках — значение модуля расчитанное из краевой за-

(8) Нормировка амплитуды электрического поля $v(z)$ на поверхности к единице возможна, т. к. согласно [27] импеданс не зависит от величины амплитуды на поверхности земли.

дачи (20), а \tilde{I}_s экспериментальные значения. В предположении о гладкости функции $\sigma(z)$, регуляризатор — $\Omega[H, \sigma_0, \sigma]$ — вводится аналогично (18) поскольку $\sigma(0)$ можно считать известной величиной:

$$(22) \quad \Omega[H, \sigma_0, \sigma] \equiv \int_0^H \sigma'^2(z) dz + p_1(H - H_0)^2 + p_2(\sigma - \sigma_0)^2,$$

где p_1 , p_2 , как обычно некоторые масштабные множители. В результате и приходим к вариационной постановке совершенно аналогичной (12), (19).

4.2. Приводимые ниже результаты [31] относятся к исследованию возможностей РА в расширенном классе моделей структуры. В проведенных модельных расчетах геоэлектрический разрез предполагался кусочно-непре-

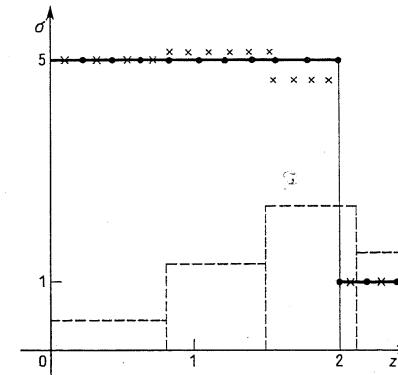


Рис. 5. — точный разрез, — начальные приближения, ··· результат РА, $\delta = 10^{-4}$, $\times \times$ результат РА, $\delta = 10^{-2}$

рывным и даже простейшие модели (с кусочно-постоянными σ) рассчитывались по общей программе; в соответствии с этим число варьируемых параметров достигало 20-ти. Соответствующее этой постановке выражение регуляризатора отличается от (22) лишь числом слагаемых, аналогичных по виду первым двум.

Некоторые результаты восстановления характерных моделей структур в сравнении с точными разрезами и начальными приближениями приведены на рисунках 5–7. Рисунок 5 иллюстрирует возможность определения числа слоев разреза, поскольку в этом случае приближение ищется в классе моделей с заданным большим, чем на самом деле, числом слоев. Рисунки 6–7 свидетельствуют о принципиальной возможности восстановления „тонкой структуры” разреза (непрерывной компоненты проводимости).

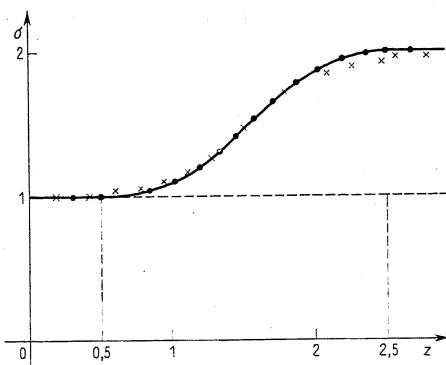


Рис. 6. — точный разрез, - - - начальные приближения, . . . результат РА, $\delta = 10^{-4}$,
 $\times \times$ результат РА, $\delta = 10^{-2}$

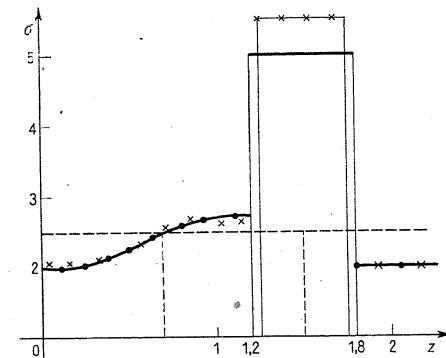


Рис. 7. — точный разрез, - - - начальные приближения, . . . результат РА, $\delta = 10^{-4}$,
 $\times \times$ результат РА, $\delta = 10^{-2}$

Анализ влияния погрешности импеданса на результат восстановления геоэлектрического разреза [31] обнаруживает, что удовлетворительная для практики точность во всяком случае сохраняется при погрешности входных данных не превышающей 1% — такова гарантированная разрешающая способность метода МГЗ в рассматриваемом классе моделей.

5. Некоторые общие вопросы реализации и использования РА в обратных задачах

5.1. Рассмотрим кратко вопрос о методах минимизации сглаживающего функционала при фиксированном α в рамках итерационного: $\alpha_p \rightarrow \alpha_{p+1}$ -процесса спуска по параметру [19], [31].

Для краткости дальнейшего изложения запишем сглаживающий функционал Тихонова в достаточно общем виде [3], [34]. Естественно, что поля наблюдений являются гильбертовыми пространствами, так что $\|u - \tilde{u}\|^2 = (u - \tilde{u}, u - \tilde{u})$, и тогда $M[z] = \|Az - \tilde{u}\|_0^2$ среднеквадратичный функционал. Регуляризатор $\Omega[z]$ естественно вводить как квадрат нормы в некотором гильбертовом подпространстве:

$$\Omega[z] \equiv \|z\|_Z^2 = (z, z)_Z.$$

Тогда сглаживающий функционал Тихонова $F_\alpha[z]$ имеет вид:

$$(23) \quad F_\alpha[z] \equiv \|Az - \tilde{u}\|_0^2 + \alpha \|z\|_Z^2 = (Az - \tilde{u}, Az - \tilde{u})_0 + \alpha (z, z)_Z,$$

где, как мы видели, A может быть нелинейным и даже неявно заданным оператором.

Поскольку начальное приближение для каждого α выбирается в процессе спуска: для $\alpha_{p+1} z_0 = z^{x_p}$, то при каждом α можно использовать любой алгоритм минимизации функционала.

Определенные преимущества имеет предложенный нами [19], [31] для минимизации (23) итерационный метод основанный на линеаризации Az в окрестности очередной итерации⁽⁹⁾. В этом случае минимизирующая последовательность строится из экстремалей функционала:

$$(24) \quad F_{n, \alpha}[z] = \|A(z_n) + A_z(z_n)(z - z_n) - \tilde{u}\|_0^2 + \alpha \Omega[z],$$

где $A_z(z_n)$ — операторная производная $A(z)$ в точке z_n .

В свою очередь, для минимизации $F_{n, \alpha}$ пользуемся уравнением Эйлера, получаемым обычным вариационным путем с использованием требований:

$$(25) \quad (z, \zeta)_Z = (Lz, \zeta)_Z, \quad (A_z \zeta, u)_U = (\zeta, A_z^* u)_Z,$$

где L имеет смысл оператора Эйлера для регуляризатора, а A_z^* — сопряженный, в указанном смысле, к производной линейный оператор. Условия (25) обычно выполнены в связанных с задачами интерпретации пространствах⁽¹⁰⁾.

Предлагаемый метод не требует введения дополнительных параметров (как градиентный) и вычисления второй операторной производной (как метод Ньютона для уравнения Эйлера). Для его применения следует, однако, вычислить A_z , A_z^* , L .

⁽⁹⁾ Для корректных задач ($\alpha = 0$), такая операция приводит к процессу Гаусса–Ньютона для решения операторных уравнений.

⁽¹⁰⁾ Само уравнение Эйлера имеет вид:

$$(A_z^* A_z(z_n) + \alpha L)z = A_z^*(z_n)\tilde{u}_n + \alpha Lz_n, \quad \tilde{u}_n = \tilde{u} - A(z_n) + A_z(z_n)z_n.$$

В задаче о восстановлении слойстой структуры по дисперсионным данным $z \in E_r$ и следовательно $\bar{Z} = Z$. Соответственно, L — оператор умножения матрицы на вектор, A_z и A_z^* — матрица Якоби из $\frac{\partial c_s}{\partial q_i}$ и транспонированная к ней. Заметим, что поскольку имеется алгоритм для вычисления $c(\omega_s, \vec{q})$, то определен и алгоритм вычисления производных (например, численного дифференцирования [35]).

В рассмотренной задаче гравиметрии $z = \{z(x), H\} \in C_{a,b} \times E_1$, $\bar{Z} = W'_2 \times E_1$, со скалярным произведением

$$(z, \zeta)_{\bar{Z}} = \int_a^b z' \zeta' d\zeta + p_1 H h;$$

в силу граничных условий

$$(z, \zeta)_{\bar{Z}} = - \int_a^b z'' \zeta d\zeta + p_1 H h,$$

и поскольку

$$(z, \zeta)_Z \equiv \int_a^b z \zeta d\zeta + p_1 H h,$$

то

$$Lz = \{-z''(\zeta), p_1 H\}.$$

В этой задаче $U \equiv L_2$, и оператор Az имеет явное интегральное выражение, вследствие чего A_z и A_z^* рассчитываются элементарно и имеют явные выражения.

Рассмотрим несколько подробнее задачу МТЗ где оператор Az задан неявно, полагая для простоты H и σ_0 известными. Тогда аналогично предшествующей задаче, $L\sigma \equiv -\sigma''(z)$. Для расчета A_σ достаточно воспользоваться методом возмущений применительно к дифференциальному уравнению (20). Заметим, что подстановка $v' = pv$, приводит задачу (20) к следующей:

$$p' + p^2 + i\omega \sigma(z) = 0, \quad z \in (0, H), \quad p(H) = (1+i) \sqrt{\frac{\omega \sigma_0}{2}},$$

причем явно связанный с импедансом величина $v'|_{z=0} \equiv p(0)$. Положим $\sigma(z) = \sigma_n(z) + \Delta(z)$, где Δ — малая величина, и соответственно,

$$p(z) = p_n(z) + \delta(z) \quad (p_n(H) = p(H)).$$

Нашей ближайшей целью является выделение линейной относительно Δ части приращения $\delta(z)$ при $z = 0$. Подстановка $\sigma(z)$ и $p(z)$ в уравнение и последующая элементарная выкладка приводят к следующему результату: Линейная часть

$$\delta(0) = i\omega \int_0^H v_n^2(z) \Delta(z) dz,$$

где $v_n(z)$ решение задачи (20) при $\sigma(z) = \sigma_n(z)$. Теперь уже нетрудно выделить линейную часть приращения $|I(\omega)| = 1/|p(0)|$. Эта последняя имеет очевидно интегральное выражение:

$$\text{Var}|I(\omega)| \sim \int_0^H K(\omega, z) \Delta(z) dz,$$

где $K(\omega, z)$ определяется алгоритмически через минимум и действительную части $v_n(z)$. Таким образом имеем, последовательно:

$$A_\sigma \zeta = \int_0^H K(\omega, z) \zeta(z) dz,$$

$$(A_\sigma \zeta, u)_U \equiv \sum_{i=1}^N u_i \int_0^H K(\omega_i, z) \zeta(z) dz \equiv \int_0^H \zeta(z) \left(\sum_{i=1}^N K(\omega_i, z) u_i \right) dz \equiv (\zeta, \zeta^*)_Z;$$

соответственно,

$$A_\sigma^* u = \sum_{i=1}^N K(\omega_i, z) u_i,$$

что определяет сопряженный к производной оператор. Аналогичные рассуждения приводят к результату и в более общем случае.

Заметим, что переход к уравнению Эйлера для задач, рассматриваемых в классе непрерывных функций связан с использованием некоторых граничных условий. Обычно это не вызывает вопросов, поскольку такие условия суть следствия естественной априорной информации о решении (см. например, задачу гравиметрии). Однако, в том случае если такая информация отсутствует прямые методы минимизации слаживающего функционала в рамках процесса спуска по параметру могут оказаться предпочтительнее.

5.2. Рассмотрим некоторые аспекты перспективы использования РА для решения обратных задач.

Любая задача интерпретации решается в рамках определенной модели, описываемой в приведенной выше постановке спецификацией множества Z -характеристик объекта и оператора A . Модель может существенно уклоняться от реальности. Но оценка этого уклонения выходит за рамки чисто математической проблематики. Само понятие „неточности” модели, как известно (см. например [2]) относительно и зависит от точности наблюдений. Так например, при грубом анализе дисперсии поверхностных волн нельзя судить о деталях структур, и соответственно классическая модель Мохоровичича оказывается „предельно точкой”. В свою очередь при достаточном понижении дисперсии входных данных может оказаться возможным выявление градиентных или горизонтально-неоднородных структур в рамках метода поверхностных волн. Аналогично, при достаточно высокой точности гравиметрических данных

грубые модели, учитывающие единичные локальные объекты могут оказаться в противоречии с наблюдениями на дневной поверхности.

Если имеется устойчивый алгоритм решения задачи на уровне интерпретации (РА) и если модель обоснована с точки зрения однозначности соответствия, то представление о „точности” модели может быть получено априорно так что РА могут служить целям проверки гипотез [2].

Для этого, однако, необходима уверенная оценка уровня погрешности входных данных задачи интерпретации. Если такая оценка имеется, и результат интерпретации все же не согласуется с данными наблюдений, то есть основание для усовершенствования модели.

Таким образом, анализ первичной обработки экспериментальных данных, включающий оценку суммарной погрешности — необходимое условие успешного решения задач интерпретации с помощью РА.

Указанные проблемы могут быть решены на пути разработки систем комплексной автоматизации обработки и интерпретации данных эксперимента. Одним из элементов таких систем является комплекс первичной обработки, другим и неизбежным — регуляризирующие алгоритмы решения задач интерпретации [26].

5.3. До сих пор мы рассматривали исключительно задачи интерпретации данных косвенных наблюдений над реальными объектами.

Между тем регуляризирующие алгоритмы оказываются эффективными и для решения другого класса обратных задач — задач синтеза, например, физических систем [2]–[3], [36].

Здесь речь идет о создании систем с априорно заданными эффектами (\hat{u}), и по самой природе задачи предполагается использование конкретной информации о характеристиках структуры синтезируемого объекта (z), проистекающей например, из условий технологии синтеза. Математическая формализация такого рода информации наряду с указанием элементарной связи $Az = u$ приводит к устойчивым алгоритмам, подобным вышеописанным. Регуляризирующие их свойства проявляются в том, что из априорного множества решений (задача синтеза, вообще говоря, обладает таким множеством) — автоматически выбирается одно, согласующееся с требованиями технологии и функционирования.

Заметим, что задача синтеза в известном смысле проще задач интерпретации, ибо уровень δ , „погрешности” эффекта: $\|u - \hat{u}\|_U \leq \delta$ — априорно заданная величина (здесь \hat{u} — „точный”, ожидаемый эффект).

В рамках выбранной модели математическая формулировка задачи синтеза может быть следующей:

$$(27) \quad \inf \Omega[z], \quad z \in G, \quad \|Az - \hat{u}\| \leq \delta,$$

где $\Omega[z]$ — некоторый функционал, требование минимума которого выражает априорное ограничение на синтезируемый объект, равно как и принадлежность

z множеству G . Если множество $\bar{Z} \setminus \{z: \Omega[z] \leq C\}$ — компакт в Z , причем существует непустое пересечение множеств \bar{Z}, G и множества эквивалентности, то (27) порождает регуляризирующую в указанном выше смысле алгоритм. И в этом случае можно воспользоваться общей формой регуляризирующего алгоритма, поставив задачу о минимизации слаживающего функционала на множестве с ограничениями:

$$(28) \quad \inf \{\|Az - \hat{u}\|^2 + \alpha \Omega[z]\}, \quad z \in G, \quad \|Az - \hat{u}\|^2 = \delta^2.$$

Рассмотрим в заключение один из результатов решения задачи синтеза оптических интерференционных систем [36]. В этом случае синтезируемой системой является тонкая слоистая диэлектрическая пленка, характеризуемая при заданном наборе материалов числом слоев и совокупностью толщин

$\vec{q}_r = \{r, d_1, d_2, \dots, d_r\}$, $\Omega[\vec{q}_r] = \sum_{i=1}^r d_i$ — соответствует требованию устойчивости системы, и $G \{ \vec{q}_r: d_i \geq 0 \}$. Эффектом системы является коэффициент пропускания T_1 как функция длины волны λ . Соответственно, оператор A алгоритмически определен краевой задачей для дифференциального уравнения

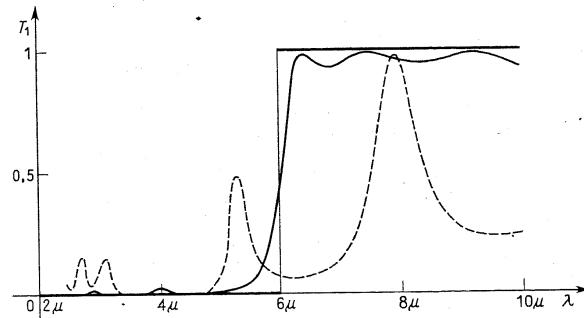


Рис. 8

второго порядка в конечной слоистой среде. Эта задача [36] легко получается из уравнений Максвелла в пренебрежении токами проводимости, при нормальном падении гармонической световой волны. Ожидаемый эффект \hat{u} определяется условиями:

$$\hat{u} = T_1(\lambda) = \begin{cases} 0 & \text{при } 2,2\mu < \lambda < 6\mu, \\ 1 & \text{при } 6\mu < \lambda < 10\mu. \end{cases}$$

Допустимое среднеквадратичное уклонение $\delta = 10^{-2}$. Существенно, что в рассматриваемой задаче размерность пространства Z (число r) также является варьируемой величиной, что отражает типичную для задач синтеза ситуацию: необходимость подбора модели, совместимой с заданными условиями.

Результат решения задачи изображен на рисунке 8 сплошной кривой, сравниваемой с кривой, отвечающей начальному приближению параметров структуры. Приведенный результат получен при $r = 11$ и отвечает требуемой точности эффекта.

Использование устойчивых алгоритмов при решении задач синтеза тем более необходимо что, как показывает приведенный пример, такие задачи не обязаны быть априори разрешимыми, и автоматизация подбора модели является важным условием успешного решения задачи.

Литература

- [1] А. Н. Тихонов, *О регуляризации некорректно-поставленных задач*, Докл. АН СССР 153.1 (1963), стр. 49–52.
- [2] —, *Некорректно-поставленные задачи и методы их решения*, Труды Всесоюзной школы молодых ученых: *Методы решения некорректных задач и их применение* (г. Ростов Великий, 9–18 сентября 1973 г.), Изд-во МГУ, 1974.
- [3] А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин, *Методы решения некорректно-поставленных задач*, „Наука”, Москва 1974.
- [4] К. Я. Кондратьев, *Метеорологические спутники*, Гидрометиздат, Москва 1963.
- [5] В. Б. Гласко, Ю. Н. Тимофеев, *Использование метода регуляризации для решения задач термического зондирования атмосферы*, Изв. АН СССР, сер. физика атмосферы и океана, 4.3 (1968).
- [6] Е. Ф. Саваренский, Д. П. Кирнос, *Элементы сейсмологии и сейсмометрии*, Гостехиздат, 1955.
- [7] Н. В. Золинский, *Дисперсия поверхностных волн Лява в двухслойной среде*, Труды ин-та геофизики Груз. СССР 42 (1958).
- [8] В. Б. Гласко, *О единственности решения некоторых обратных задач сейсмологии*, Журн. вычисл. матем. и матем. физики 10.6 (1970).
- [9] Н. А. Haskell, *The dispersion of surface waves on multilayered medium*, Bull. Seism. Soc. Amer. 1 (1953).
- [10] В. Б. Гласко, Е. Ф. Саваренский, Б. Н. Шечков, *Данные о фазовых и групповых скоростях поверхностных сейсмических волн*, Изв. АН СССР, сер. геофиз. 10 (1963).
- [11] J. Dogram, M. Ewing, *Numerical inversion of seismic surface wave dispersion data and crust-mantle structure in the New York-Pennsylvania area*, Journal of Geophys. Res. 67.13 (1962).
- [12] А. Н. Тихонов, *Об устойчивости алгоритмов для решения вырожденных систем уравнений*, Журн. вычисл. матем. и матем. физики 4.5 (1965).
- [13] В. Б. Гласко, *К вопросу об единственности восстановления структуры земной коры по дисперсионному спектру волн Релея*, Докл. АН СССР 206.6 (1972).
- [14] А. Н. Тихонов, *Об устойчивости обратных задач*, ibid. 39.5 (1943).
- [15] М. М. Лаврентьев, *О некоторых некорректных задачах математической физики*, Новосибирск, изд-во СО АН СССР, 1962.
- [16] Е. Ф. Саваренский, В. Б. Гласко, А. Б. Пешков, *Об определении толщины двухслойной земной коры с использованием регуляризующих алгоритмов*, Изв. АН СССР, сер. физика земли, 6 (1971).
- [17] В. Б. Гласко, Я. А. Гранит, Е. Ф. Саваренский, *Некоторые возможности РД в задачах о восстановлении структуры земной коры по поверхностным волнам*, Прикладная геофизика, вып. 72, „Наука”, Москва 1973.
- [18] В. Б. Гласко, Г. Н. Мартанус, Л. Н. Пашкова, Е. Ф. Саваренский, Н. Т. Хмелевский, *Определение параметров земной коры русской платформы по дисперсии поверхностных волн*, Изв. АН СССР, сер. физика земли, 5 (1974).
- [19] А. Н. Тихонов, В. Б. Гласко, *Применение метода регуляризации в нелинейных задачах*, Журн. вычисл. матем. и матем. физики 5.3 (1965).
- [20] В. Б. Гласко, Г. В. Гущин, В. И. Старостенко, *Метод регуляризации Тихонова при решении систем нелинейных уравнений*, Докл. АН Украинской ССР, серия Б, 3 (1975), Киев.
- [21] А. Н. Тихонов, В. Б. Гласко, О. К. Литвиненко, В. Р. Мелихов, *О продолжении потенциала в стопонутвоздушающих масс в гравиметрической и магнитной разведках на основе метода регуляризации*, Изв. АН СССР, сер. физика земли, 12 (1968).
- [22] В. Б. Гласко, А. Х. Остромогильский, В. Г. Филатов, *О восстановлении глубины и формы контактной поверхности на основе регуляризации*, Журн. вычисл. матем. и матем. физики 10.5 (1970).
- [23] В. Б. Гласко, В. В. Кравцов, Г. А. Кравцова, *Об одной обратной задаче гравиметрии*, Вестник МГУ 2 (1970).
- [24] Л. Н. Сретенский, *О единственности определения формы притягивающего тела по значениям его внешнего потенциала*, Докл. АН СССР 99.1 (1954), стр. 21–22.
- [25] В. Б. Гласко, Б. А. Володин, Е. А. Мурдепова, Н. Ю. Нифедова, *О решении обратной задачи гравиметрии для контактной поверхности на основе метода регуляризации*, Изв. АН СССР, сер. физика земли, 2 (1973).
- [26] А. Н. Тихонов, В. Б. Гласко, *О применении метода регуляризации в задачах геофизической интерпретации*, ibid. 1 (1975).
- [27] А. Н. Тихонов, *О вариациях земного электромагнитного поля*, Докл. АН СССР 87.4 (1952).
- [28] L. Cagniard, *Basic theory of the magneto-telluric method of geophysical prospecting*, Geophysics 18.3 (1953).
- [29] В. Б. Гласко, Н. И. Кулик, А. Н. Тихонов, *Об определении геоэлектрического разреза на основе метода регуляризации*, Журн. вычисл. матем. и матем. физики 12.1 (1972).
- [30] А. Н. Тихонов, Д. Н. Шахсуваров, *О возможности использования импеданса естественного поля земли для изучения ее верхних слоев*, Изв. АН СССР, сер. геофиз., 4 (1956).
- [31] А. Н. Тихонов, В. Б. Гласко, Н. И. Кулик, *Регуляризующие алгоритмы для нелинейных задач и обратная задача магнито-теллурического зондирования*, Сб. вычисл. методы и программирование, Вып. XX, под редакцией В. И. Дмитриева, А. С. Ильинского, Изд-во МГУ, 1973.
- [32] А. Н. Тихонов, *К математическому обоснованию теории электромагнитных зондирований*, Журн. вычисл. матем. и матем. физики 5.3 (1965), стр. 545–547.
- [33] В. И. Дмитриев, *Прямая и обратная задача магнито-теллурического зондирования слоистой среды*, Изв. АН СССР, сер. физика земли, 7.1 (1970).
- [34] А. Н. Тихонов, *О решении функциональных уравнений первого рода*, Докл. АН СССР 161.5 (1965).
- [35] Е. Ф. Саваренский, В. Б. Гласко, Я. А. Гранит, *Зависимость фазовой и групповой скоростей волн Релея и Лява от параметров двухслойной земной коры*, Изв. АН СССР, сер. физика земли, 3 (1967).

- [36] В. Б. Гласко, А. Н. Тихонов, А. В. Тихонравов, *О синтезе многослойных покрытий*, Журн. вычисл. матем. и матем. физики 14.1 (1974).
- [37] S. Katz, *Seismic study of crustal structure in Pennsylvania and New York*, Bull. Seism. Soc. Amer. 45 (1955).

*Presented to the Semester
 Mathematical Models and Numerical Methods
 (February 3-June 14, 1975)*

ON THE IDENTIFICATION OF DIFFUSION COEFFICIENTS*

GISBERT STOYAN

Akademie der Wissenschaften der DDR
 Zentralinstitut für Mathematik und Mechanik, Berlin

1. The identification problem

1.1. Let us consider the following problem: Some chemical components are diffusing from outside into a plate of catalytic material, several reactions take place and the reaction products leave the plate by diffusion. Let there be n reactions. Then for n independent components with concentrations c_i , $i = 1, \dots, n$, we have as a mathematical model of the whole process the system of equations:

$$(1) \quad \frac{d}{dr} \left(d_i(r) \frac{dc_i}{dr} \right) = q_i(r, c_1, \dots, c_n), \quad -1 \leq r \leq 1, \quad i = 1, \dots, n,$$

$$(2) \quad c_i(-1) = c_i(1) = c_{i1}.$$

In (1) d_i are the diffusion coefficients, q_i the reaction rates. (2) means that we are considering a process in which the outside concentrations c_{i1} are equal on both sides of the catalytic plate (this is of no importance, of course; there may be different outer concentrations as it is the case for membranes). The process may be temperature dependent. In that case one of the c_i , say c_n , gives the value of the temperature and then d_n represents the heat conduction coefficient.

Let us now suppose that the coefficients $d_i(r)$, $i = 1, \dots, n$, are unknown, but we are given a set of data, consisting, for instance, in the experimentally measured values \tilde{g} of

$$(3) \quad g_{1ik}(d) = c_i(r_k), \quad g_{2i}(d) = d_i \frac{dc_i}{dr} (1), \quad i = 1, \dots, n,$$

$$g_3(d) = \sum_1^n \gamma_i \int_{-1}^1 c_i(r) dr,$$

where $d = (d_1, \dots, d_n)$.

* Revised version of two lectures, held at the Banach Centre in May 1975.