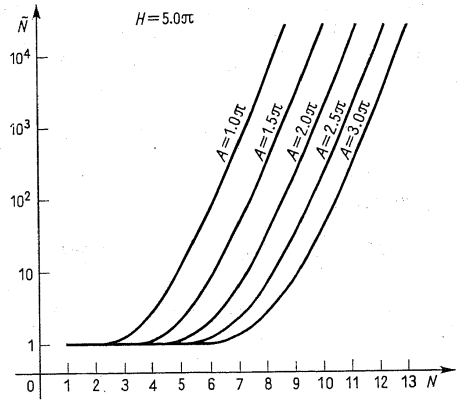

Рис. 3

проводящей земли ($\dot{\varepsilon}_2' = 4+i0$), только незначительно отличаются от приведенных на рисунке 3 в направлении более быстрого возрастания $\tilde{N}$ выше критического значения N.

Предлагаемый метод создает удобный критерий выбора числа N в зависимости от остальных параметров, чем уменьшает степень неопределенности системы и позволяет избежать длительных численных экспериментов.

Литература

[1] Ф. Р. Гантмахер, *Теория матриц*, Изд. II, Москва 1966.
[2] Д. К. Фаддеев, В. Н. Фаддеева, *О плохо обусловленных системах линейных уравнений*, Журн. вычисл. матем. и матем. физики 1.3 (1961), стр. 412.
[3] А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин, *Методы решения некорректных задач*, Москва 1974.
[4] L. A. Węgrowicz, *Inverse electromagnetic problem for line and strip sources over the plane imperfectly conducting ground*, 1974 URSI Symposium on Electromagnetic Wave Theory, London 1974, стр. 145–147.
[5] —, *Zagadnienie odwrotne dla anten elektrycznych umieszczonych nad nieidealnie przewodzącą powierzchnią ziemi*, Prace IPPT PAN, Nr. 17/1975, Warszawa 1975.
[6] —, *Aperture radiation and superdirectivity*, Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Sci. Techn. 16.4 (1968), стр. 27–33.

Presented to the Semester
Mathematical Models and Numerical Methods
(February 3–June 14, 1975)

BANACH CENTER PUBLICATIONS
VOLUME 3

ОБ ИДЕНТИФИКАЦИИ ЛИНЕЙНЫХ МОДЕЛЕЙ

А. М. ФЕДОТОВ

Вычислительный Центр СО АН СССР, Новосибирск, СССР

1

Будем называть модель некоторой системы *линейной*, если в ответ на возмущение $x(s)$, $-\infty \leqslant s \leqslant t$, её фазовое состояние описывается уравнением вида

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} \tilde{w}(t, s)x(s)\,ds, \tag{1}$$

где $\tilde{w}(t,s)$ — кусочно-непрерывная функция, которая называется весовой функцией уравнения (1), или режимом работы рассматриваемой системы. Будем рассматривать системы с однородными во времени режимами работы, т.е.

$$\tilde{w}(t, s) = w(t-s), \qquad t \geqslant s$$

и кроме того

$$\int_0^\infty |w(\tau)|\,d\tau < \infty, \qquad \int_0^\infty |w(\tau)|^2\,d\tau < \infty.$$

2

Будем считать, что мы можем измерять внешнее воздействие $x(t)$ и фазовое состояние $y(t)$ нашей системы. Нашей задачей является определение режима работы системы, описываемой моделью (1), если измерения проводятся с аддитивной ошибкой. Пусть $\xi(t)$ и $\eta(t)$ результаты измерений функций $x(t)$ и $y(t)$ соответственно, тогда

$$\xi(t) = x(t)+\delta_1(t),$$

$$\eta(t) = y(t)+\delta_2(t),$$

где $\delta_1(t)$ и $\delta_2(t)$ — ошибки измерений.

Будем предполагать, что ошибки измерений можно считать реализацией (выборочной функцией) стационарного случайного процесса с нулевым математическим ожиданием, который допускает спектральное представление вида:

$$\delta_k(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t}\, d\Phi_k(\lambda), \quad k = 1, 2,$$

где $\Phi_k(\lambda)$ $(k=1,2)$ — спектральная мера соответствующего случайного процесса (см. [1]): стационарный случайный процесс с независимыми приращениями, с нулевым математическим ожиданием и с корреляционной функцией $f_k(\lambda)$ $(k=1,2)$.

3

Пусть функции $x(t)$, $y(t)$ и $w(t)$ являются элементами гильбертовых пространств X, Y и W соответственно (L_2 для модели (1)). Результаты измерений тогда тоже принадлежат пространствам: $\xi(t)\in X$, $\eta(t)\in Y$.

Далее будем считать, что множества допустимых возмущений и режимов рассматриваемой системы являются компактными множествами, т.е.

$$x(t)\in \boldsymbol{C}\subset X,$$
$$w(t)\in \boldsymbol{D}\subset W,$$

причём элементы множеств $\boldsymbol{C}$ и $\boldsymbol{D}$ являются априорно равновероятными (плотности функций распределений постоянны на них).

С учётом ошибки решение уравнения (1) сводится к решению следующей задачи:

$$\xi(t) = x(t)+\delta_1(t), \qquad (2)$$
$$\eta(t) = \int_0^{\infty} w(\tau)\, x(t-\tau)\, d\tau + \delta_2(t).$$

Таким образом пространства X и Y превращаются в измеримые пространства с σ-алгебрами и мерами индуцированными уравнениями системы (2). Тогда спектральные меры на пространствах измерений будут иметь вид:

$$\Phi_\xi(\lambda) = \int_{-\infty}^{\lambda} \tilde{x}(\lambda)\, d\lambda + \Phi_1(\lambda),$$

$$\Phi_\eta(\lambda) = \int_{-\infty}^{\lambda} \tilde{w}(\lambda)\tilde{x}(\lambda)\, d\lambda + \Phi_2(\lambda),$$

где $\tilde{x}(\lambda)$ — преобразование Фурье от функции (возмущения) $x(t)$, $\tilde{w}(\lambda)$ — частотная характеристика весовой функции (режима) $w(t)$.

Следовательно мы можем рассматривать нашу задачу на следующей статистической структуре:

$$(\Omega, B;\ \Phi_{\xi\eta}(w),\ w\in \boldsymbol{D}), \qquad (3)$$

где $\Omega = X\times Y$, B — индуцированная (2) σ-алгебра на Ω,

$$\Phi_{\xi\eta}(w(t))\,(\lambda) = \Phi_\xi \otimes \Phi_\eta(x(t), w(t))\,(\lambda).$$

4

Пусть $\boldsymbol{D} = \{w_1(t), w_2(t), \ldots, w_N(t)\}$. Обозначим через L множество функций (статистик) таких, что:

$$L = \{\varphi\colon\ \Omega \to \langle 1, \ldots, N\rangle\}.$$

Будем называть функцию $\varphi_0\in L$ *наилучшей оценкой неизвестного режима* $w_k(t)$, если вероятность ошибки минимальна, т.е.

$$P\{\varphi_0(\xi,\eta)\neq k\} = \min_{\varphi\in L} P\{\varphi(\xi,\eta)\neq k\}.$$

Способом, примененным в [1] (стр. 278), можно доказать следующую теорему:

Теорема 1. *Для статистической структуры* (3) *наилучшей оценкой неизвестного режима работы системы* (1) *является оценка, полученная по методу наибольшего правдоподобия, т.е.*

$$\varphi_0(\xi,\eta) = \hat{k}\colon\ P\{\hat{k}|\langle\xi,\eta\rangle\} = \max_{1\leqslant k\leqslant N} P\{k|\langle\xi,\eta\rangle\},$$

где $P\{k|\langle\xi,\eta\rangle\}$ *— апостериорная вероятность того, что система работает в* k*-ом режиме, при условии, что результатами измерений были функции* $\xi(t)$ *и* $\eta(t)$.

5

Пусть $\boldsymbol{D} = \{w_1, w_2\}$. Оценим как сильно должны различатся функции w_1 и w_2, чтобы задача (2) была разрешимой. Следуя [2], введём на W информационную метрику

$$\varrho(w_1, w_2) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty} g_{ik}(w_1^i - w_2^i)(w_1^k - w_2^k),$$

где g_{ik} — компоненты информационной матрицы Фишера, а $\{w_1^i\}_{i=0}^{i=\infty}$ и $\{w_2^i\}_{i=0}^{i=\infty}$ — коэффициенты разложения функций w_1 и w_2 по базису в гильбертовом пространстве W. Используя явное представление для коэффициентов информационной матрицы Фишера [2] и оценки спектральных плотностей процессов измерений (см. [3], стр. 162), нетрудно показать, что

$$\varrho(w_1, w_2) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\tilde{\tilde{x}}(\lambda)|^2\, |\tilde{w}_1(\lambda)-\tilde{w}_2(\lambda)|^2}{f_2(\lambda)|\tilde{w}_1(\lambda)-\tilde{w}_2(\lambda)|^2 + f_1(\lambda)}\, d\lambda, \qquad (4)$$

где $\tilde{\tilde{x}}(\lambda)$ — преобразование Фурье от оптимальной оценки (см. [4]) функции возмущения $x(t)$.

Степень разрешимости задачи будем характеризовать вероятностью принятия правильного решения. Используя понятие ёмкости множества $\boldsymbol{D}$ в статистической структуре (3), введенное в [5], можно показать, что вероятность правильных решений

$$\mathrm{P}_{\text{пр}} \leqslant \tfrac{1}{2} M(\boldsymbol{D}) \leqslant \tfrac{1}{2}[1+\tfrac{1}{2}\varrho(w_1, w_2)], \tag{5}$$

где $M(\boldsymbol{D})$ — ёмкость множества $\boldsymbol{D}$. Более того, если стационарные случайные процессы, моделирующие ошибку, являются гауссовскими, то вероятность правильных решений равна (см. [4], [6])

$$\mathrm{P}_{\text{пр}} = \tfrac{1}{2}[1+F(\varrho/2)]$$

где $F(u)$ — интеграл ошибок.

Неравенство (5) задаёт оценку разрешимости задачи (2), т.е. задаваясь некоторым уровнем значимости мы получаем величину расстояния между режимами, начиная с которой режимы являются неразличимыми. Например при $\varrho \leqslant 1$ имеем, что вероятность разпознания не больше чем 75%.

6

Отметим, что в первом из неравенств (5) равенство достигается в случае $M(\boldsymbol{D}) = 2$, что соответствует абсолютной различимости режимов. Для произвольного числа режимов первое из неравенств (5) модифицируется в следующее:

$$\mathrm{P}_{\text{пр}} \leqslant (1/N)\, M(\boldsymbol{D}),$$

где N — число режимов (элементов множества $\boldsymbol{D}$).

7

Пусть $\boldsymbol{D}$ — компактное множество. Предположим, что на $\boldsymbol{D}$ задано априорное распределение искомых режимов системы (1) P_w. Пусть задано разбиение множества $\boldsymbol{D}$ на априорно равновероятные подмножества:

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{D}_1 \cup \boldsymbol{D}_2 .$$

Наша задача сводится к определению подмножества $\boldsymbol{D}_i \subset \boldsymbol{D}$, $i = 1, 2$, которому принадлежит неизвестный режим. Аналогично способу введения метрики на множестве режимов, введём метрику на множестве всех подмножеств априорного множества режимов. Пусть:

$$w^{(1)} = \mathrm{E}_w(\boldsymbol{D}_1),$$
$$w^{(2)} = \mathrm{E}_w(\boldsymbol{D}_2),$$

где символом E_w обозначено математическое ожидание по априорному распределению P_w. Тогда

$$\bar{\varrho}(\boldsymbol{D}_1, \boldsymbol{D}_2) = \varrho(w^{(1)}, w^{(2)})$$

и справедлива следующая теорема:

ТЕОРЕМА 2. *Задача о проверке гипотез о принадлежности режима работы системы* (1) *подмножествам* $\boldsymbol{D}_1$ *или* $\boldsymbol{D}_2$ *разрешима с уровнем значимости* h, *если* $\bar{\varrho}(\boldsymbol{D}_1, \boldsymbol{D}_2) > \varrho(h)$, *где* $\varrho(h)$ *расстояние, определённое в* § 5 *для уровня значимости* h.

8

Теорема 2 даёт возможность определения режима работы системы (1) по экспериментальным данным. Последовательными разбиениями априорного множества режимов на подмножества можно решить задачу с точностью, гарантированной метрикой (4).

Литература

[1] Ю. А. Розанов, *Случайные процессы*, „Наука", Москва 1971.
[2] С. Кульбак, *Теория информации и статистика*, „Наука", Москва 1967.
[3] Дж. Бендат, А. Пирсол, *Измерение и анализ случайных процессов*, „Мир", Москва 1974.
[4] И. А. Ибрагимов, Ю. А. Розанов, *Гауссовские случайные процессы*, „Наука", Москва 1970.
[5] В. П. Козлов, *Ёмкость множества в пространстве сигналов и риманова метрика*, Докл. АН СССР 166. 4 (1966), стр. 779–782.
[6] —, *О восстановлении высотного профиля температуры по спектру уходящего излучения*, Изв. АН СССР, Физика атмосферы и океана, 2. 2 (1966), стр. 137–148.

Presented to the Semester
Mathematical Models and Numerical Methods
(February 3–June 14, 1975)