and ω_g is an Olech function ($\Rightarrow$: condition (II) is fulfilled). However, the problem

$$\dot{\tilde{\lambda}} = \tau\omega_g(t, \tilde{\lambda}), \quad \tilde{\lambda}(0) = 0$$

is for $\tau = 2$ not only solved by $\tilde{\lambda}(t) \equiv 0$ but also by $\tilde{\lambda}(t) = \alpha t^2$ $(\forall \alpha \in (0, 1])$, and for $\tau > 2$ we have (besides $\tilde{\lambda}(t) \equiv 0$) the solution $\tilde{\lambda}(t) = \frac{\tau}{2}t^2$. Thus condition (III) of Taubert's theorem is not fulfilled.

Indeed, the solution of the difference equation (17) (applied to our example) has the properties

$$u_{2n} \leqslant 0, \quad u_{2n+1} \geqslant (n+1)^2 h^2,$$

which imply non-convergence!

Condition (III) therefore is an important condition. On the other hand, the conditions of Taubert's theorem are only sufficient for convergence. For certain schemes, condition (III) can be omitted, e.g. for

$$-a_k = a_0 = 1, \quad a_\nu = 0 \ (\nu = 1, \ldots, k-1), \quad b_\nu \geqslant 0.$$

References

[1] R. J. Thompson, *Difference approximations for inhomogeneous and quasi-linear equations*, J. Soc. Indust. Appl. Math. 12 (1964), pp. 189–199.

[2] J. Peetre and V. Thomée, *On the rate of convergence for discrete initial-value problems*, Math. Scand. 21 (1967), pp. 159–176.

[3] R. Ansorge, *Konvergenz von Mehrschrittverfahren zur Lösung halblinearer Anfangswertaufgaben*, Numer. Math. 10 (1967), pp. 209–219.

[4] R. Ansorge, C. Geiger und R. Hass, *Existenz und numerische Erfaßbarkeit verallgemeinerter Lösungen halblinearer Angangswertaufgaben*, ZAMM 52 (1972), pp. 597–605.

[5] P. Lax and R. D. Richtmyer, *Survey of the stability of linear finite difference equations*, Comm. Pure Appl. Math. 9 (1956), pp. 167–293.

[6] G. Dahlquist, *Convergence and stability in the numerical integration of ordinary differential equations*, Math. Scand. 4 (1956), pp. 33–53.

[7] P. Hartmann, *Ordinary differential equations*, John Wiley & Sons, New York–London–Sidney 1964.

[8] K. Taubert, *Differenzenverfahren für gewöhnliche Anfangswertaufgaben mit unstetiger rechter Seite*; in: Lecture Notes in Mathem., vol. 395 (editors: R. Ansorge and W. Törnig), pp. 137–148, Springer, Berlin–Heidelberg–New York 1974.

[9] A. F. Filippov, *Differential equations with discontinuous right-hand side*, Amer. Math. Soc. Transl. 42 (1960), pp. 199–231.

[10] O. Perron, *Eine hinreichende Bedingung für die Unität der Lösungen von Differentialgleichungen erster Ordnung*, Math. Z. 28 (1928), pp. 216–219.

[11] C. Olech, *Remarks concerning criteria for uniqueness of solutions of ordinary differential equations*, Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. sci. math. astr. et phys. 8 (1960), pp. 661–666.

[12] K. Taubert, *Eine Erweiterung der Theorie von G. Dahlquist*, Computing 17 (1976), pp. 177–185.

Presented to the Semester
Mathematical Models and Numerical Methods
(February 3–June 14, 1975)

BANACH CENTER PUBLICATIONS
VOLUME 3

О ТОЧНОСТИ СХЕМ ПЕРЕМЕННЫХ НАПРАВЛЕНИЙ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В ПРОИЗВОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

А. В. ГУЛИН, И. В. ФРЯЗИНОВ

Институт Прикладной Математики АН СССР, Москва, СССР

В работе установлена сходимость схем Дугласа–Рэчфорда (Д.–Р.) [1] и Писмена–Рэчфорда (П.–Р.) [2] для двумерного уравнения теплопроводности в произвольной области в случае первой краевой задачи в сеточной норме L_2 со скоростями $O(\tau + h^{3/2})$. Здесь $h = \max(h_1, h_2)$, h_α — шаг пространственной сетки в направлении оси координат $0x_\alpha$, $\alpha = 1, 2$, τ — шаг сетки по времени.

Схемы [1], [2] рассматриваются здесь как составные схемы, обладающие свойством суммарной аппроксимации [3]. Устойчивость и сходимость их установлена лишь при предположении неотрицательности соответствующих сеточных операторов. Требование перестановочности операторов не используется. В узлах приграничной зоны используется аппроксимация из [4], [5].

Приводятся оценки скорости сходимости схем Д.–Р. и П.–Р. в случае разрывных коэффициентов, полярных и сферических координат.

1. Постановка задач

1.1. Постановка исходной задачи. Пусть G — ограниченная область в плоскости $0x_1x_2$ с границей Γ, $\bar{G} = G \cup \Gamma$. Предположим, что пересечение области G любой прямой, проходящей через точку $x = (x_1, x_2) \in G$ и параллельной оси координат $0x_\alpha$, состоит лишь из одного интервала $\Delta_\alpha(x)$. Пусть $Q_T = G \times (0 < t \leqslant T)$, $\bar{Q}_T = \bar{G} \times (0 \leqslant t \leqslant T)$.

Требуется найти непрерывное в $\bar{Q}_T$ решение $u = u(x, t)$ задачи

$$\begin{gathered} \partial u/\partial t = \Delta u + f(x, t), \quad (x, t) \in Q_T, \\ u = \nu(x, t), \quad x \in \Gamma, \quad 0 < t \leqslant T, \quad u(x, 0) = u^0(x), \quad x \in \bar{G}. \end{gathered} \tag{1.1}$$

Относительно гладкости входных данных — функций f, ν, u^0, а также решения задачи — функции $u = u(x,t)$ сделаем те же предположения, что и в [6].

1.2. Сетка. В данной работе будем пользоваться обозначениями из [4], [5]. Построим в $\bar{G}$ сетку $\bar{\omega}_h$. Проведем два семейства равноотстоящих прямых

$$x_\alpha = i_\alpha h_\alpha, \quad i_\alpha = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \quad \alpha = 1, 2.$$

Точки $x = (i_1 h_1, i_2 h_2)$ пересечения этих прямых, принадлежащие G назовем внутренними узлами сетки. Множество внутренних узлов обозначим через ω_h. Множество концов интервалов $\Delta_\alpha(x)$ проведенных через узлы $x \in \omega_h$, назовем множеством граничных узлов по направлению $0x_\alpha$ и обозначим через γ_α, $\gamma_\alpha = \gamma_\alpha^+ \cup \gamma_\alpha^-$, $\gamma_\alpha^+, \gamma_\alpha^-$ — множества правых и левых узлов по направлению $0x_\alpha$, $\gamma_h = \gamma_1 \cup \gamma_2$. Множество внутренних и граничных узлов назовем *сеткой* $\bar{\omega}_h = \omega_h \cup \gamma_h$. Обозначим через $x^{(\pm 1_\alpha)}$ узлы сетки $\bar{\omega}_h$, ближайшие к узлу $x \in \bar{\omega}_h$ справа и слева на $\Delta_\alpha(x)$.

Расстояния между узлом сетки $x \in \bar{\omega}_h$ и соседними узлами $x^{(+1_\alpha)}$ и $x^{(-1_\alpha)}$ назовем шагами сетки $\bar{\omega}_h$ и обозначим через

$$h_\alpha^+ = |x^{(+1_\alpha)} - x|, \quad h_\alpha^- = |x - x^{(-1_\alpha)}|.$$

Шаги h_α^+, h_α^- могут отличаться от h_α лишь в приграничной зоне. Будем говорить, что $x \in \omega_{\alpha, r}$ — регулярный узел по направлению $0x_\alpha$, если расстояния от x до соседних узлов $x^{(\pm 1_\alpha)}$ равны $h_\alpha^+ = h_\alpha^- = h_\alpha$. В противном случае $x \in \omega_{\alpha, ir}$.

Будем рассматривать также потоковые узлы

$$x^{(\pm 0,5_1)} = ((i_1 \pm 0{,}5)h_1, i_2 h_2) \in \tilde{\omega}_1,$$
$$x^{(\pm 0,5_2)} = (i_1 h_1, (i_2 \pm 0{,}5)h_2) \in \tilde{\omega}_2,$$

ближайшие к узлам сетки $\bar{\omega}_h$.

Пусть $x \in \omega_h$. Проведем через узлы $x^{(\pm 0,5_\alpha)}$, соседние с x, прямые ортогональные оси координат $0x_\alpha$, $\alpha = 1, 2$. Каждому узлу $x \in \omega_h$ поставим в соответствие прямоугольник $H(x)$, ограниченный отрезками указанных прямых. Его площадь $h_1 h_2$. Введем множество $\omega_{h\gamma}$ приграничных и множество ω_{h0} строго внутренних узлов: $x \in \omega_{h0}$, если $x \in \omega_h$ и $H(x) \in G$; $x \in \omega_{h\gamma}$, если $x \in \omega_h$ и $H(x) \cap \Gamma$ — непустое множество.

Введем, наконец, сетку ω_τ по времени

$$\omega_\tau = \{t_j = j\tau,\ t_{j+1/2} = (j + 0{,}5)\tau,\ j = 0, 1, \ldots, j_0 = T/\tau\}.$$

Все положительные постоянные, не зависящие от h и τ, будем обозначать одной и той же буквой M.

1.3. Постановка разностных задач. Пусть $y = y(x)$ — сеточная функция, определенная в узлах сетки $\bar{\omega}_h$. Положим

$$y^{(\pm 1_\alpha)} = y(x^{(\pm 1_\alpha)}), \quad y_{x_\alpha}^+ = \frac{y^{(+1_\alpha)} - y}{h_\alpha^+}, \quad y_{\bar{x}_\alpha} = \frac{y - y^{(-1_\alpha)}}{h_\alpha^-}.$$

Функции $y_{x_\alpha}^\pm$ будем относить к потоковым узлам $x^{(\pm 0,5_\alpha)}$. Введем обозначение

$$(\theta_\alpha)_{\hat{x}_\alpha} \equiv (\theta_\alpha^+ - \theta_\alpha^-)/h_\alpha, \quad \theta_\alpha^\pm = \theta_\alpha(x^{(\pm 0,5_\alpha)}).$$

Дифференциальному оператору $L_\alpha = \partial^2/\partial x_\alpha^2$ поставим в соответствие сеточный оператор Λ_α [4], [5]:

$$\Lambda_\alpha y \equiv (y_{x_\alpha})_{\hat{x}_\alpha} = \frac{1}{h_\alpha}\left(\frac{y^{(+1_\alpha)} - y}{h_\alpha^+} - \frac{y - y^{(-1_\alpha)}}{h_\alpha^-}\right). \tag{1.2}$$

Введем пространство $\mathscr{H}$ сеточных функций, определенных на $\bar{\omega}_h$, равных нулю на γ_h, со скалярным произведением и нормой

$$(y, z) = \sum_{\omega_h} y z h_1 h_2, \quad \|y\| = \sqrt{(y, y)}.$$

В [4] показано, что операторы Λ_α, $\alpha = 1, 2$, (1.2) являются самосопряженными и отрицательно-определенными в $\mathscr{H}$

$$(\Lambda_\alpha y, z) = (y, \Lambda_\alpha z), \quad (-\Lambda_\alpha z, z) \geqslant \delta_0 \|z\|^2, \tag{1.3}$$

где $\delta_0 = 4/3D$, D — диаметр области G.

Рассмотрим следующие две разностные схемы для задачи (1.1): схему Д.–Р.

$$\begin{aligned}
&\frac{y^{j+1/2} - y^j}{\tau} = \Lambda_1 y^{j+1/2} + \Lambda_2 y^j + f^{j+1}, \\
&\frac{y^{j+1} - y^{j+1/2}}{\tau} = \tau \Lambda_2 \frac{y^{j+1} - y^j}{\tau}, \qquad x \in \omega_h, \\
&y^{j+1/2} = y^{j+1} = \nu^{j+1}, \quad x \in \gamma_h, \quad j = 0, 1, \ldots, j_0, \\
&y^0 = u^0(x), \quad x \in \bar{\omega}_h,
\end{aligned} \tag{1.4}$$

и схему П.–Р.

$$\begin{aligned}
&\frac{y^{j+1/2} - y^j}{0{,}5\tau} = \Lambda_1 y^{j+1/2} + \Lambda_2 y^j + f^{j+1/2}, \\
&\frac{y^{j+1} - y^{j+1/2}}{0{,}5\tau} = \Lambda_1 y^{j+1/2} + \Lambda_2 y^{j+1} + f^{j+1/2}, \qquad x \in \omega_h, \\
&y^{j+1/2} = \frac{\nu^j + \nu^{j+1}}{2}, \quad y^{j+1} = \nu^{j+1}, \quad x \in \gamma_h, \quad j = 0, 1, \ldots, j_0, \\
&y^0 = u^0(x), \quad x \in \bar{\omega}_h.
\end{aligned} \tag{1.5}$$

Справедлива

Теорема 1. *Решения разностных задач* (1.4), (1.5) *сходятся при* $h \to 0$, $\tau \to 0$ *к решению исходной задачи* (1.1) *в сеточной норме* L_2. *Для задач* (1.4), (1.5) *справедливы оценки*

$$\|y^j - u(x, t_j)\| \leqslant M(h^{3/2} + \tau). \tag{1.6}$$

2. О сходимости и точности схем

2.1. Погрешность аппроксимации. Исследуем погрешность аппроксимации схемы Д.-Р. Введем величины

$$z^{j+1/2} = y^{j+1/2} - u(x, t_{j+1}), \qquad z^{j+1} = y^{j+1} - u(x, t_{j+1}).$$

Подставляя $y = z + u$ в (1.4) приходим к задаче для ошибки z:

$$(2.1)\qquad \begin{aligned} &\frac{z^{j+1/2} - z^j}{\tau} = \Lambda_1 z^{j+1/2} + \Lambda_2 z^j + \psi^{j,j+1/2}, \\ &\frac{z^{j+1} - z^{j+1/2}}{\tau} = \tau \Lambda_2 \frac{z^{j+1} - z^j}{\tau} + \psi^{j+1/2,j+1}, \end{aligned} \quad x \in \omega_h,$$

$$z^{j+1/2} = z^{j+1} = 0, \quad x \in \gamma_h, \quad j = 0, 1, \ldots, j_0,$$

$$z^0 = 0, \quad x \in \bar{\omega}_h.$$

Здесь $\psi^{j,j+1/2}$, $\psi^{j+1/2,j+1}$ — погрешности аппроксимации отдельных уравнений (1.4):

$$(2.2)\qquad \begin{aligned} &\psi^{j+1/2,j+1} = \tau \Lambda_2 \frac{u^{j+1} - u^j}{\tau} \equiv -\overset{0}{\psi}{}^{j+1}, \\ &\psi^{j,j+1/2} = \left(-\frac{u^{j+1} - u^j}{\tau} + \Lambda u^{j+1} + f^{j+1} \right) - \tau \Lambda_2 \frac{u^{j+1} - u^j}{\tau} \equiv \psi_*^{j+1} + \overset{0}{\psi}{}^{j+1}. \end{aligned}$$

Здесь $\Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2$. Как видно из (2.3) погрешность аппроксимации $\psi^{j,j+1/2}$ представлена в виде суммы погрешности ψ_*^{j+1} исходного уравнения при $t = t_{j+1}$ и погрешности $\overset{0}{\psi}{}^{j+1}$. Из (2.2) следует, что

$$(2.3)\qquad \psi^{j,j+1/2} + \psi^{j+1/2,j+1} = \psi_*^{j+1} = -\frac{u^{j+1} - u^j}{\tau} + \Lambda u^{j+1} + f^{j+1}.$$

Используем свойство (2.3). Сложим уравнения (2.1), из второго уравнения (2.1) найдем $z^{j+1/2}$. Вместо (2.1) получаем эквивалентную систему

$$(2.4)\qquad \begin{aligned} &z_{\bar{t}}^{j+1} \equiv \frac{z^{j+1} - z^j}{\tau} = \Lambda_1 z^{j+1/2} + \Lambda_2 z^{j+1} + \psi_*^{j+1}, \\ &z^{j+1/2} = z^{j+1} - \tau^2 \Lambda_2 z_{\bar{t}}^{j+1} + \tau \overset{0}{\psi}{}^{j+1}. \end{aligned} \quad x \in \omega_h,$$

Оценим погрешности ψ_*, $\overset{0}{\psi}$. При достаточной гладкости решения

$$(2.5)\qquad \|\overset{0}{\psi}{}^{j+1}\| \leqslant M\tau.$$

Продолжим с сохранением гладкости при каждом $0 \leqslant t \leqslant T$ решение исходной задачи, функцию $f(x,t)$ вне области G на полоску ширины h. Рассмотрим функцию

$$(2.6)\qquad \tilde{\psi}_{(x)} = \frac{1}{H} \int\limits_{H(x)} \sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2} dx_1\, dx_2 + \frac{1}{H} \int\limits_{H(x)} \left(-\frac{\partial u}{\partial t} + f \right) dx_1\, dx_2,$$

где $H = h_1 h_2$.

Очевидно, что

$$(2.7)\qquad \tilde{\psi}(x) = 0, \quad x \in \omega_{h0}, \quad \tilde{\psi}(x) = O(h), \quad x \in \omega_{h\gamma}.$$

Интегрируя в (2.6) вторые производные, найдем, что

$$(2.8)\qquad \sum_{\alpha=1}^{2} \left(\overline{\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}} \right)_{\hat{x}_\alpha} + \frac{1}{H} \int\limits_{H(x)} \left(-\frac{\partial u}{\partial t} + f \right) dx_1\, dx_2 - \tilde{\psi} = 0.$$

Здесь

$$\overline{\frac{\partial u^\pm}{\partial x_\alpha}} = \frac{1}{h_\beta} \int\limits_{x(-0,5\beta)}^{x(+0,5\beta)} dx_\beta \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} ((i_\alpha \pm 0{,}5) h_\alpha, x_\beta), \quad \alpha, \beta = 1, 2, \ \alpha \neq \beta.$$

Преобразуем погрешность ψ_*^{j+1}. Вычтем из (2.3) тождество (2.8) при $t = t_{j+1}$. В результате получим

$$(2.9)\qquad \psi_*^{j+1} = \psi_{**}^{j+1} + \sum_{\alpha=1}^{2} (\mu_\alpha^{j+1})_{\hat{x}_\alpha}.$$

Здесь

$$(2.10)\qquad \begin{aligned} &\psi_{**}^{j+1} = -\frac{u^{j+1} - u^j}{\tau} + f^{j+1} - \frac{1}{H} \int\limits_{H(x)} \left(-\frac{\partial u^{j+1}}{\partial t} + f^{j+1} \right) dx_1\, dx_2 + \tilde{\psi}^{j+1}, \\ &\mu_\alpha^{\pm j+1} = u_{\bar{x}_\alpha}^{\pm j+1} - \left(\overline{\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}} \right)^{j+1}. \end{aligned}$$

Отсюда и из (2.7) следует, что $\psi_{**}^{j+1} = O(\tau + h^2)$, $x \in \omega_{h0}$, $\psi_{**}^{j+1} = O(\tau + h)$, $x \in \omega_{h\gamma}$. Поэтому

$$(2.11)\qquad \|\psi_{**}^{j+1}\| \leqslant M(h^{3/2} + \tau).$$

Введем обозначение

$$\|\mu_\alpha\|_\alpha^2 = \sum_{\tilde{\omega}_\alpha} (\mu_\alpha^+)^2 h_\alpha^+ h_\beta, \quad \alpha, \beta = 1, 2, \ \alpha \neq \beta.$$

Из (2.10) следует, что в потоковых узлах вблизи границы $\mu_\alpha^\pm = O(h)$, в прочих узлах $\mu_\alpha^\pm = O(h^2)$, так что

$$(2.12)\qquad \|\mu_\alpha^{j+1}\|_\alpha \leqslant M h^{3/2}.$$

Так как

$$(\mu_\alpha)_{\hat{x}_\alpha} = \Lambda_\alpha u - \frac{1}{H} \int\limits_{H} \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2} dx_1\, dx_2,$$

то в регулярных узлах

$$(\mu_\alpha^{j+1})_{\hat{x}_\alpha} = O(h^2), \quad (\mu_\alpha^{j+1})_{\hat{x}_\alpha \bar{t}} = O(h^2),$$

в нерегулярных узлах

$$(\mu_\alpha^{j+1})_{\hat{x}_\alpha} = O(1), \quad (\mu_\alpha^{j+1})_{\hat{x}_\alpha \bar{t}} = O(1).$$

Отсюда следует, что

$$\left\|\mu^{j+1}_{\alpha\hat{x}_\alpha}\right\| \leqslant Mh^{1/2}, \qquad \left\|\mu^{j+1}_{\alpha\hat{x}_\alpha\bar{t}}\right\| \leqslant Mh^{1/2}. \tag{2.13}$$

В случае ступенчатой области G и равномерной сетки $\bar{\omega}_h$, согласованной с Γ

$$\begin{gathered} \|\psi^{j+1}_{**}\| \leqslant M(\tau+h^2), \qquad \|\mu^{j+1}_\alpha\|_\alpha \leqslant Mh^2, \\ \left\|\mu^{j+1}_{\alpha\hat{x}_\alpha}\right\| \leqslant Mh^2, \qquad \left\|\mu^{j+1}_{\alpha\hat{x}_\alpha\bar{t}}\right\| \leqslant Mh^2. \end{gathered} \tag{2.14}$$

Аналогично для схемы П.–Р. для ошибки

$$z^{j+1/2} = y^{j+1/2}-(u^{j+1}+u^j)/2, \qquad z^{j+1} = y^{j+1}-u^{j+1}$$

получаем задачу

$$\begin{gathered} z^{j+1}_{\bar{t}} \equiv \frac{z^{j+1}-z^j}{\tau} = \Lambda_1 z^{j+1/2}+\Lambda_2\frac{z^{j+1}+z^j}{2}+\psi^{j+1}_*, \\ z^{j+1/2} = \frac{z^{j+1}+z^j}{2}-\frac{\tau^2}{4}\Lambda_2 z^{j+1}_{\bar{t}}+0{,}5\tau\overset{0}{\psi}{}^{j+1}. \end{gathered} \tag{2.15}$$

Погрешность ψ^{j+1}_* представима в виде (2.9). Справедливы оценки (2.11)–(2.13), для $\overset{0}{\psi}{}^{j+1}$ — оценка (2.5).

2.2. Сходимость и точность. Оценим точность схемы Д.–Р. Умножим скалярно первое уравнение (2.4) на $z^{j+1/2}$. Имеем

$$(z^{j+1}_{\bar{t}}-\Lambda_2 z^{j+1}, z^{j+1/2})+(-\Lambda_1 z^{j+1/2}, z^{j+1/2}) = (\psi^{j+1/2}_*, z^{j+1/2}). \tag{2.16}$$

Преобразуем первое слагаемое в левой части (2.16), пользуясь выражением $z^{j+1/2}$ из (2.14) и тождеством

$$v^{j+1}v^{j+1}_{\bar{t}} = 0{,}5(v^{j+1})^2_{\bar{t}}+0{,}5\tau(v^{j+1}_{\bar{t}})^2.$$

Находим

$$\begin{aligned} (z^{j+1}_{\bar{t}}-\Lambda_2 z^{j+1}, z^{j+1/2}) = {} & 0{,}5\|z^{j+1}\|^2_{\bar{t}}+0{,}5\tau\|z^{j+1}_{\bar{t}}\|^2+ \\ & +\tau^2(z^{j+1}_{\bar{t}}, -\Lambda_2 z^{j+1}_{\bar{t}})+\tau(\overset{0}{\psi}{}^{j+1}, z^{j+1}_{\bar{t}})+ \\ & +(z^{j+1}, -\Lambda_2 z^{j+1})+0{,}5\tau^2\|\Lambda_2 z^{j+1}\|^2_{\bar{t}}+ \\ & +0{,}5\tau^3\|\Lambda_2 z^{j+1}_{\bar{t}}\|^2. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Правую часть (2.17) запишем в виде

$$\begin{aligned} & (z^{j+1/2}, \psi^{j+1}_*) = \\ & = \big(\psi^{j+1}_{**}+(\mu^{j+1}_1)_{\hat{x}_1}, z^{j+1/2}\big)+\big((\mu^{j+1}_2)_{\hat{x}_2}, z^{j+1}-\tau^2\Lambda_2 z^{j+1}_{\bar{t}}+\tau\overset{0}{\psi}{}^{j+1}\big). \end{aligned} \tag{2.18}$$

Используем следующее преобразование

$$\big(\mu^{j+1}_{2\hat{x}_2}, -\tau^2\Lambda_2 z^{j+1}_{\bar{t}}\big) = -\tau^2\big((\mu^{j+1}_2)_{\hat{x}_2}, \Lambda_2 z^{j+1}\big)_{\bar{t}}+\tau^2\big(\Lambda_2 z^j, (\mu^{j+1}_2)_{\hat{x}_2\bar{t}}\big). \tag{2.19}$$

Собирая выражения (2.17)–(2.19), равенство (2.16) запишем в виде

$$0{,}5I^{j+1}_{\bar{t}}+S^{j+1} = F^{j+1}, \tag{2.20}$$

где

$$\begin{aligned} & \|z^j\|^2_{(2)} \equiv \|z^j\|^2+\tau^2\|\Lambda_2 z^j\|^2, \qquad I^j = \|z^j\|^2_{(2)}+2\tau^2\big((\mu^j_2)_{\hat{x}_2}, \Lambda_2 z^j\big), \\ & S^{j+1} = 0{,}5\tau\|z^{j+1}_{\bar{t}}\|^2+\tau^2(z^{j+1}_{\bar{t}}, -\Lambda_2 z^{j+1}_{\bar{t}})+(z^{j+1}, -\Lambda_2 z^{j+1})+ \\ & \qquad +(z^{j+1/2}, -\Lambda_1 z^{j+1/2})+0{,}5\tau^3\|\Lambda_2 z^{j+1}_{\bar{t}}\|^2, \\ & F^{j+1} = \big((\mu^{j+1}_1)_{\hat{x}_1}, z^{j+1/2}\big)+\big((\mu^{j+1}_2)_{\hat{x}_2}, z^{j+1}\big)+(\psi^{j+1}_{**}, z^{j+1/2})- \\ & \qquad -\tau(\overset{0}{\psi}{}^{j+1}, z^{j+1}_{\bar{t}})+\tau\big((\mu^{j+1}_2)_{\hat{x}_2}, \overset{0}{\psi}{}^{j+1}\big)+\tau^2\big(\Lambda_2 z^j, (\mu^{j+1}_2)_{\hat{x}_2\bar{t}}\big). \end{aligned}$$

Оценим правую часть (2.20). Учитывая, что

$$(-\Lambda_\alpha z, z) = \sum_{\bar{\omega}_\alpha}(z^+_{x_\alpha})^2 h^+_\alpha h_\beta, \qquad \alpha, \beta = 1, 2, \ \alpha \neq \beta,$$

находим оценки для первого и второго слагаемого в F^{j+1}

$$|(\mu_{\alpha\hat{x}_\alpha}, z)| = \Big|\sum_{\omega_\alpha} z^+_{x_\alpha}\mu^+_\alpha h^+_\alpha h_\beta\Big| \leqslant \varepsilon(-\Lambda_\alpha z, z)+\frac{1}{4\varepsilon}\|\mu_\alpha\|^2_\alpha, \qquad \varepsilon > 0.$$

Остальные слагаемые оцениваем с помощью неравенства Коши–Буняковского и ε-неравенства ($|ab| \leqslant \varepsilon a^2+b^2/4\varepsilon$, $\varepsilon > 0$). При оценке второго слагаемого в F^{j+1} используем второе уравнение (2.15), записываемое в виде $z^{j+1/2} = z^j+\tau z^{j+1}_{\bar{t}}-\tau^2\Lambda_2 z^{j+1}_{\bar{t}}+\tau\overset{0}{\psi}{}^{j+1}$.

В результате для F^{j+1} получаем оценку

$$|F^{j+1}| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\|z^j\|^2_{(2)}+\varepsilon S^{j+1}+\frac{M}{\varepsilon}(R^{j+1})^2, \qquad \varepsilon > 0.$$

Здесь

$$R^{j+1} = \|\overset{0}{\psi}{}^{j+1}\|+\|\psi^{j+1}_{**}\|+\tau\|(\mu^{j+1}_2)_{\hat{x}_2}\|+\tau\|(\mu^{j+1}_2)_{\hat{x}_2\bar{t}}\|+\sum_{\alpha=1}^{2}\|\mu^{j+1}_\alpha\|_\alpha. \tag{2.21}$$

Суммируя по j равенства (2.20) и принимая во внимание оценку для F^{j+1} при $0 < \varepsilon < 1$, имеем

$$I^{j+1} \leqslant I^0+\tau\varepsilon\sum_{k=0}^{j}\|z^k\|^2_{(2)}+\frac{M}{\varepsilon}\max_{0<k\leqslant j+1}(R^k)^2.$$

Учитывая, что

$$(1-\varepsilon)\|z^j\|^2_{(2)}-\frac{\tau^2}{\varepsilon}\|(\mu^j_2)_{\hat{x}_2}\|^2 \leqslant I^j \leqslant (1+\varepsilon)\|z^j\|^2_{(2)}+\frac{\tau^2}{\varepsilon}\|(\mu^j_2)_{\hat{x}_2}\|^2,$$

получаем

$$\|z^{j+1}\|^2_{(2)} \leqslant M\Big(\|z^0\|^2_{(2)}+\tau\sum_{k=1}^{j}\|z^k\|^2_{(2)}+\max_{0<k\leqslant j+1}(R^k)^2\Big).$$

Отсюда и из леммы Грануола (см. [7], стр. 311) следует

$$\|z^j\|_{(2)} \leqslant M(\|z^0\|_{(2)}+\max_{0<k\leqslant j}R^k). \tag{2.22}$$

Оценка (2.22) устанавливает абсолютную устойчивость схемы Д.–Р. Из (2.21), (2.22) и (2.5), (2.11)–(2.13) при $z^0=0$ следует справедливость утверждения теоремы 1 для схемы Д.–Р. В случае ступенчатой области из (2.21), (2.22), (2.5), (2.14) следует сходимость схемы Д.–Р. со скоростью $O(\tau+h^2)$.

Доказательство сходимости схемы П.–Р. проводится совершенно также, как и схемы Д.–Р. Умножим скалярно первое из уравнений (2.15) на $z^{j+1/2}$. После аналогичных преобразований приходим к оценкам (2.22), (2.21). Из (2.22), (2.21), (2.5), (2.11)–(2.13) следует оценка (1.6) для схемы П.–Р. Теорема 1 доказана.

В [8] для схемы П.–Р. получена оценка

$$\|z^j\| \leqslant M\Big(\max_{0\leqslant k\leqslant j}\Big(\|\psi^k_{**}\|+\sum_{\alpha=1}^{2}\|\mu^k_\alpha\|_\alpha+\|\overset{0}{\psi}{}^k\|\Big)+\tau\|(\mu^0_2)_{\hat{x}_2}\|\Big). \tag{2.23}$$

Для схемы Д.–Р. справедлива также оценка

$$\|z^j\| \leqslant M\max_{0<k\leqslant j}\Big(\|\psi^k_{**}\|+\|\overset{0}{\psi}{}^k\|+\sum_{\alpha=1}^{2}\|\mu^k_\alpha\|_\alpha+\tau^{1/2}\|(\mu^k_2)_{\hat{x}_2}\|\Big). \tag{2.24}$$

3. Обсуждение результатов. Обобщения

Для схем Д.–Р. и П.–Р. не установлена в случае произвольной области устойчивость по граничным условиям. В связи с этим не удается доказать сходимость схем соответственно со скоростями $O(\tau+h^2)$ и $O(\tau^2+h^2)$. Устойчивость по граничным условиям установлена лишь в случае схемы П.–Р., когда область — прямоугольник (см. [9]).

Предлагаемый здесь метод исследования позволяет доказать сходимость схемы Д.–Р. в ступенчатой области для третьей (и второй) краевых задач со скоростью $O(\tau+h^2)$ (определение операторов Λ_α см. в [5]).

При исследовании схем предполагалась лишь неположительность операторов Λ_α. Удалось отказаться от требования перестановочности операторов Λ_1 и Λ_2. Схемы рассматривались как составные. При этом не возникал вопрос об их эквивалентности соответствующим схемам с факторизованными операторами и, соответственно, об определении поправок к граничным функциям.

Для сеточных двумерных уравнений в полярных (r,φ) и сферических (r,θ) координатах операторы Λ_r, Λ_φ и Λ_r, Λ_θ (см. [10]) не перестановочны $(\Lambda_r,\Lambda_\varphi,\Lambda_\theta\leqslant 0)$. В этом случае погрешности

$$\overset{0}{\psi}=O\Big(\frac{\tau}{r}\Big),\qquad \mu_\alpha=O\Big(\frac{h^2}{r}\Big),\qquad \alpha=r,\varphi,\theta,\qquad \psi_{**}=O\Big(\tau+\frac{h^2}{r}\Big).$$

Из (2.22), (2.21) следует сходимость схем Д.–Р. и П.–Р. в соответствующих нормах L_2 (см. [10]) со скоростями $O\big((\tau+h^2)\sqrt{|\ln 1/h_r|}\big)$ для первой, второй и третьей краевых задач; (h_r — шаг по радиусу).

В случае уравнений с переменными коэффициентами:

$$\partial u/\partial t=\operatorname{div}\big(k(x)\operatorname{grad}u\big)+f(x,t)$$

для схем Д.–Р. и П.–Р. с $\Lambda_\alpha\leqslant 0$ (см. [4], [5]) погрешность также представляется в виде (2.9), имеют место оценки (2.5), (2.11)–(2.14), (2.21), (2.22). Справедлива теорема 1.

Пусть коэффициенты $k(x)$, $f(x,t)$ терпят разрывы на кривой Γ^0. В этом случае (см. [4], [5])

$$\Lambda_\alpha y=(a_\alpha y_{x_\alpha})_{\hat{x}_\alpha},$$

где $a^\pm_\alpha=k(x^{(\pm0,5_\alpha)})$, $x^{(\pm0,5_\alpha)}\notin\Gamma^0$, $a^\pm_\alpha=0{,}5\big(k^{(1)}(x^{(\pm0,5_\alpha)})+k^{(2)}(x^{(\pm0,5_\alpha)})\big)$, $x^{(\pm0,5_\alpha)}\in\Gamma^0$. Здесь и ниже $v^{(1)}$, $v^{(2)}$ — предельные значения функции v на Γ^0. В (1.4), (1.5) функцию $f(x,t)$ следует заменить на $\varphi(x,t)$, где $\varphi(x,t)=f(x,t)$, $x\notin\Gamma^0$, $\varphi(x,t)=0{,}5\,(f^{(1)}(x,t)+f^{(2)}(x,t))$, $x\in\Gamma^0$.

Если Γ^0 — отрезок, $\Gamma^0=\Delta_\alpha(x)$, $x\in\overline{\omega}_h$, то справедливы оценки (2.5), (2.11)–(2.13). Верна теорема 1. В случае, если Γ^0 — кривая, а $\overline{\omega}_h$ — квазиравномерная сетка, согласованная с Γ^0 (пример см. в [4], фиг. 4), то справедливы оценки (2.11), (2.12). Однако в узлах $x\in\Gamma^0$ функции $\overset{0}{\psi}{}^{j+1}$, $(\mu^{j+1}_2)_{\hat{x}_2}$, $(\mu^{j+1}_2)_{\hat{x}_2\bar{t}}$ имеют порядок $1/h_2$, так что их нормы ограничены сверху величиной $M/\sqrt{h_2}$. Тогда из (2.21), (2.22) следует, что

$$\|y^j-u(x,t_j)\|\leqslant M\big(h^{3/2}+\tau+\sqrt{h\tau}\,\sqrt{\overline{\gamma}_2}\big).$$

Здесь $\overline{\gamma}_2=\tau/h_2^2\max\limits_{x\in\Gamma^0}\max\,(k^{(1)}(x),k^{(2)}(x))$. При произвольном положении линии разрыва Γ^0 относительно узлов сетки $\overline{\omega}_h$ вблизи Γ^0, $\mu_\alpha=O(1)$, $\alpha=1,2$, так что $\|\mu_\alpha\|_\alpha\leqslant M\sqrt{h}$. Из (2.21), (2.22) имеем

$$\|y^j-u(x,t_j)\|\leqslant M\big(\sqrt{h}+\tau+\sqrt{h\tau}\,\sqrt{\overline{\gamma}_2}\big). \tag{3.1}$$

Если положение разрыва меняется со временем, то из (2.23), (2.24) следует для схемы П.–Р. оценка (3.1), для схемы Д.–Р. — сходимость со скоростью $O\big(\sqrt{h}\,(1+\sqrt{\overline{\gamma}_2})+\tau\big)$. При большом коэффициенте k для уменьшения ошибки следует выбирать достаточно мелкий шаг τ. Аналогичные оценки, содержащие в правой части величину $\sqrt{\overline{\gamma}_2}$ получаются для соответствующих схем в случае третьей краевой задачи в произвольной области. Отметим, что схемы с уравнениями на графах постоянной $\sqrt{\overline{\gamma}_2}$ в оценках не содержат.

Пусть операторы Λ_α, $\alpha=1,2$, представимы в виде суммы двух операторов: $\Lambda_\alpha=\Lambda^0_\alpha+\Lambda^1_\alpha$, причем операторы Λ^0_α — неположительны, а Λ^1_α $(\alpha=1,2)$ — подчинены операторам Λ^0_α в следующем смысле:

$$\|\Lambda^1_\alpha z\|^2\leqslant c_0(-\Lambda^0_\alpha z,z),$$

где c_0 — постоянная не зависящая от h,τ. В этом случае оценка (2.22) также имеет место при достаточно малом $\tau\leqslant\tau_0(c_0)$. Эти оценки позволяют установить сходимость схем Д.–Р. и П.–Р. для уравнений теплопроводности, оператор которых содержит первые производные. В случае непрерывных коэффициентов, когда первые производные аппроксимируются центрально-разностными отношениями ($\sim \Lambda_{\alpha'}^{1}$), то при $\tau \leqslant \tau_0$ справедливы оценки (1.6) теоремы 1.

Литература

[1] J. Douglas and H. Rachford, *On the numerical solution of heat conduction problems in two and three space variables*, Trans. Amer. Math. Soc. 82.2 (1956), стр. 421–439.

[2] D. Peaceman and H. Rachford, *The numerical solution of parabolic and elliptic differential equations*, J. Soc. Industr. Appl. Math. 3.1 (1955), стр. 28–42.

[3] А. А. Самарский, *Об одном экономичном разностном методе решения многомерного параболического уравнения в произвольной области*, Журн. вычисл. матем. и матем. физики 2.5 (1962), стр. 787–811.

[4] А. А. Самарский, И. В. Фрязинов, *О разностных схемах решения задачи Дирихле в произвольной области для эллиптического уравнения с переменными коэффициентами*, ibid. 11.2 (1971), стр. 385–410.

[5] —, —, *О сходимости локально-одномерной схемы решения многомерного уравнения теплопроводности на неравномерных сетках*, ibid. 11.3 (1971), стр. 642–657.

[6] А. А. Самарский, *Локально-одномерные схемы на неравномерных сетках*, ibid. 3.3 (1963), стр. 431–466.

[7] —, *Введение в теорию разностных схем*, „Наука", Москва 1971.

[8] И. В. Фрязинов, *Априорные оценки для одного семейства экономичных схем*, Журн. вычисл. матем. и матем. физики 9.3 (1969), стр. 595–604.

[9] Г. Штоиан, *К устойчивости аддитивных разностных схем по краевым данным*, ibid. 11.4 (1971), стр. 934–947.

[10] И. В. Фрязинов, *О разностных схемах для уравнения Пуассона в полярной, цилиндрической и сферической системах координат*, ibid. 11.5 (1971), стр. 1219–1228.

Presented to the Semester
Mathematical Models and Numerical Methods
(February 3–June 14, 1975)

BANACH CENTER PUBLICATIONS
VOLUME 3

КОРРЕКТНОСТЬ И СХОДИМОСТЬ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ С РАСЩЕПЛЯЮЩИМСЯ ОПЕРАТОРОМ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В ВЫПУКЛЫХ ОБЛАСТЯХ

М. ДРЫЯ

Институт Информатики, Варшавский Университет, Варшава, Польша

В работе исследуются разностные схемы с расщепляющимся оператором (см. [1], [2]) для квазилинейных параболических уравнений с однородными краевыми условиями 1 рода, рассматриваемых в цилиндре, основанием которого служит двумерная выпуклая область. Для этих схем установлена абсолютная устойчивость и сходимость в сеточных нормах пространств $L_2(\Omega)$ и $W_2^1(\Omega)$ на слое на неравномерных сетках по каждому пространственному переменному. Работа тесно связана с работой [3]. В ней обобщаются результаты, полученные в [3] на случай квазилинейных уравнений, причем получены оценки погрешности (см. теорему 4) лучше чем в [3]. Аналогичные результаты остаются справедливыми для систем параболических и гиперболических уравнений.

Разностные схемы с расщепляющимся оператором для квазилинейного уравнения, рассматриваемого в цилиндре, основанием которого является прямоугольник, рассматривались в [1], [4] и др. (см. библиографию в [1]).

1

В цилиндре $Q_T = \bar{\Omega}\times[0,T]$ основанием которого является двумерная выпуклая ограниченная область Ω с границей Γ рассматривается задача:

(1) $$D_0 u + L(u) = F(x,t),$$

(2) $$u(x,0) = \varphi(x),\ x\in\Omega, \quad u(x,t) = 0,\ x\in\Gamma,\ t\in[0,T],$$

где

$$L(u) = -\sum_{i=1}^{2} D_i a_i(x,t,Du) + a_0(x,t,Du), \quad (x,t) = (x_1,x_2,t),$$

$$D_i = \partial/\partial x_i, \quad D_0 = \partial/\partial t, \quad Du = (u, D_1 u, D_2 u).$$