где

$$u_0(x) = -f(x),$$
$$v_1(x) = [\varphi_1(x)-u_0(0,x_2)]\exp\left(\lambda_1^{(1)}(0,x_2)\,x_1\right),$$
$$v_2(x) = [\varphi_2(x)-u_0(x_1,0)]\exp\left(\lambda_1^{(2)}(x_1,0)\,x_2\right),$$
$$v_3(x) = [\varphi_3(x)-u_0(1,x_2)]\exp\left(\lambda_2^{(1)}(1,x_2)\,(x_1-1)\right),$$
$$v_4(x) = [\varphi_4(x)-u_0(x_1,1)]\exp\left(\lambda_2^{(2)}(x_1,1)\,(x_2-1)\right),$$
$$\lambda_1^{(i)}(x) = \min_{k=1,2}\lambda_k^{(i)}(x), \qquad \lambda_2^{(i)}(x) = \max_{k=1,2}\lambda_k^{(i)}(x),$$

является первым членом асимптотического разложения решения задачи (2)–(4) в области R^d, когда $\varepsilon_1\to 0$, $\varepsilon_2\to 0$. С помощью барьеров экспоненциального типа можно показать, что разность $Y_0(x)-u^h(x)$ оценивается величиной, стоящей в правой части неравенства (10). Учитывая оценку разности $Y_0(x)-u(x)$ приходим к оценке (10).

Аналогично оцениваются разности $Y_1(x)-u(x)$, $Y_1(x)-u^h(x)$, где $Y_1(x)$ есть первый член асимптотического разложения задачи (2)–(4) при $\varepsilon_1\to 0$ (значение $\varepsilon_2\neq 0$ фиксировано).

В том случае, когда $u(x)\in C_4(\overline{R})$, используя соотношение (12), приходим к неравенству

$$\left|L^h\left(u^h(x)-u(x)\right)\right| \leqslant Q(\varepsilon_1,\varepsilon_2)\,h^2, \qquad x\in\overline{R}.$$

Оценка (8) вытекает из принципа максимума.

Для того, чтобы $u(x)\in C_4(\overline{R})$ необходимо на коэффициенты уравнения, правую часть и краевые условия наложить дополнительные ограничения.

Замечание. Неравенство (10) выполнено во всех точках сетки S^h, если значения функций $f(x)$, $\varphi_j(x)$, $1\leqslant j\leqslant 4$ совпадают в угловых точках области R. В этом случае на сетке S^h справедлива оценка (7).

Литература

[1] А. М. Ильин, *Разностная схема для дифференциального уравнения с малым параметром при старшей производной*, Мат. заметки 6.2 (1969), стр. 237–248.

[2] К. В. Емельянов, *Разностная схема для трехмерного эллиптического уравнения с малым параметром при старших производных*, В сб. *Краевые задачи для уравнений математической физики*, вып. II, Изд-во УНЦ АН СССР. Свердловск 1973, стр. 30–42.

[3] А. Фридман, *Уравнения с частными производными параболического типа*, „Мир", Москва 1968.

Presented to the Semester
Mathematical Models and Numerical Methods
(February 3–June 14, 1975)

BANACH CENTER PUBLICATIONS
VOLUME 3

О СХОДИМОСТИ ОДНОГО РАЗНОСТНОГО МЕТОДА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ БЫСТРОДЕЙСТВИЯ

Ф. П. ВАСИЛЬЕВ

Московский Государственный Университет, Факультет Вычислительной Математики и Кибернетики, Москва, СССР

В работе рассматривается задача о быстрейшем переводе управляемого объекта из одного множества в другое множество при условии, что движение объекта описывается системой нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Для приближённого решения этой задачи применяется обобщённый метод Ньютона из работы [1] в сочетании с разностными аппроксимациями, доказывается сходимость предлагаемого метода.

1. Постановка задачи

Пусть движение управляемого объекта описывается системой уравнений

(1) $$\dot{x}(\tau) = f(x(\tau), u(\tau), \tau),\ \ \tau\geqslant 0; \qquad x(0) = x_0\in X_0,$$

где τ — время, $x=(x^1,\ldots,x^n)$ — фазовые координаты, $u=(u^1,\ldots,u^r)$ — управляющие параметры, $f=(f^1,\ldots,f^n)$ — заданная вектор-функция переменных $(x,u,\tau)\in E_n\times V\times[0,+\infty)$, E_n — евклидово пространство размерности n; X_0, V — заданные множества из E_n и E_r соответственно.

Пару $(x_0,u(\tau)) = (x_0,u)$ назовём *допустимой* на отрезке $[0,t]$, если $x_0\in X_0$, $u=u(\tau)$ — ограниченная измеримая вектор-функция, принимающая свои значения из множества V почти при всех $\tau\in[0,t]$, а решение (траектория) $x(\tau)=x(\tau,x_0,u)$ системы (1), соответствующее начальному условию $x(0)=x_0$ и управлению $u=u(\tau)$, определено на всём отрезке $[0,t]$. Множество всех допустимых пар (x_0,u) на $[0,t]$ обозначим через U_t.

Пусть X_t — множество достижимости системы (1) в момент t, то есть $X_t=\{x\colon x=x(t,x_0,u),\,(x_0,u)\in U_t\}$, а Y — некоторое заданное множество из E_n. Введём функцию:

(2) $$\varrho(t)\equiv \inf_{(x_0,u)\in U_t}\ \inf_{y\in Y}|x(t,x_0,u)-y| = \inf_{x\in X_t}\ \inf_{y\in Y}|x-y|, \qquad t\geqslant 0,$$

выражающую собой расстояние между множествами X_t и Y. Скажем, что момент времени t является моментом встречи множеств X_t и Y, если $\varrho(t)=0$. Задача быстродействия заключается в том, чтобы найти момент первой встречи этих множеств, то есть найти такое число T^*, чтобы

$$(3)\qquad \varrho(T^*)=0, \quad \varrho(t)>0 \quad \text{при} \quad 0\leqslant t<T^*.$$

Момент T^* назовём оптимальным временем. Будем считать, что

$$\varrho(0)=\inf_{x\in X_0}\inf_{y\in Y}|x-y|>0,$$

ибо в случае $\varrho(0)=0$ остаётся положить $T^*=0$.

2. Описание метода

Заметим, что вычисление производных функции $\varrho(t)$ является весьма трудоёмким делом, и более того, эта функция, вообще говоря, не всегда дифференцируема. Поэтому для определения оптимального времени T^* из условий (3) целесообразно применять методы, использующие лишь значения функции $\varrho(t)$. Однако точное значение $\varrho(t)$ в прикладных задачах, как правило, неизвестно, и на практике мы имеем дело лишь с приближёнными значениями $\varrho(t)$, получающимися в соответствии с (2) с помощью тех или иных методов минимизации функционалов. Наконец, удобное для работы аналитическое выражение точного решения $x(\tau,x_0,u)$ уравнения (1) также бывает неизвестно и для определения приближённого решения приходится прибегать к тем или иным численным методам. В настоящей работе мы воспользуемся разностным методом решения уравнения (1).

Зададим какую-либо последовательность разностных сеток $\{t_{im}\}$:

$$t_{0m}=0<t_{1m}<\ldots<t_{im}<\ldots, \qquad m=1,2,\ldots,$$

$$\lim_{i\to\infty} t_{im}=+\infty, \qquad \lim_{m\to\infty}\sup_{i\geqslant 0}(t_{i+1,m}-t_{im})=0.$$

Зафиксируем одну из сеток $\{t_{im}\}$ и для получения приближённого значения $\varrho_m(t)$ величины $\varrho(t)$ в точке $t>0$ поступим следующим образом. Найдём номер $s\geqslant 0$ такой, чтобы $t_{sm}<t\leqslant t_{s+1,m}$ и добавим точку $t=\overline{t}_{s+1,m}$ к разностной сетке $\{t_{im}\}$ в качестве узловой точки. Далее, на отрезке $[0,t]$ уравнение (1) заменим разностными уравнениями с помощью явной схемы Эйлера:

$$(4)\qquad x_{i+1}=x_i+\Delta t_{im}f(x_i,u_i,t_{im}), \qquad i=0,1,\ldots,s,$$

где $\Delta t_{im}=t_{i+1,m}-t_{im}$, $i=0,1,\ldots,s-1$; $\Delta t_{sm}=t-t_{sm}$; $u_i\in V$, $i=0,1,\ldots,s$; $x_0\in X_0$.

Рассмотрим задачу определения величины

$$(5)\qquad I_m^*(t)=\inf I_m(x_0,[u_i],y,t),$$

где $I_m(x_0,[u_i],y,t)=|x_{s+1}-y|$, нижняя грань берётся по переменным x_0, $[u_i]=(u_0,u_1,\ldots,u_s)$, y при условиях: $x_0\in X_0$, $u_i\in V$, $i=0,1,\ldots,s$; $y\in Y$, а x_{s+1} определяется уравнением (4). Задача (5), (4) является конечномерной задачей минимизации и для её решения могут быть использованы методы математического программирования или динамическое программирование (см., например, [2]–[4]). Разумеется, с их помощью мы найдём, вообще говоря, не точное значение $I_m^*(t)$, а некоторую другую неотрицательную величину $\varrho_m(t)$, которую и примем в качестве приближённого значения $\varrho(t)$ из (2) при $t>0$. При $t=0$ в качестве $\varrho_m(0)$ можно взять величину

$$I_m^*(0)\equiv|x_{0m}-y_m|, \qquad x_{0m}\in X_0,\ y_m\in Y,$$

получаемую при определении $\varrho(0)=\inf\limits_{x\in X_0}\inf\limits_{y\in Y}|x-y|$ с помощью какого-либо метода минимизации функций конечного числа переменных. В ряде случаев $\varrho(0)$ может быть вычислено точно. Например, если X_0 и Y состоят из одной точки x_0 и y соответственно, то $\varrho(0)=|x_0-y|\equiv\varrho_m(0)$.

Итак, мы имеем неотрицательную величину $\varrho_m(t)$, которую при необходимости можно вычислить в любой точке $t\geqslant 0$ и на любой сетке $\{t_{im}\}$, $m=1,2,\ldots$ указанным выше способом и которой будем пользоваться для приближённого определения T^* в соответствии с условиями (3). Однако вряд ли можно описать содержательный метод определения T^*, если не сделать никаких предположений о величинах $\varrho(t)$, $\varrho_m(t)$, в частности, не предполагая сходимости $\varrho_m(t)$ к $\varrho(t)$ при $m\to\infty$ в каком-либо смысле. Далее всюду мы будем предполагать, что на любом конечном отрезке $[0,T]$ выполняются следующие условия (6) и (7):

$$(6)\qquad \varepsilon_m=\varepsilon_m(T)=\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|\varrho_m(t)-\varrho(t)|\to 0 \quad \text{при} \quad m\to\infty,$$

$$(7)\qquad |\varrho(\tau)-\varrho(t)|\leqslant L|t-\tau|, \quad t,\tau\in[0,T], \ L=L(T)=\text{const}>0.$$

Ниже будут сформулированы достаточные условия (теорема 2), при которых условия (6), (7) в самом деле имеют место.

Перейдём к непосредственному описанию метода определения T^* из условий (3). Зададим некоторый отрезок $[0,T]$ и последовательность $\{\delta_m\}$: $\delta_m>0$, $m=1,2,\ldots$, $\lim\limits_{m\to\infty}\delta_m=0$. При каждом фиксированном $m\geqslant 1$ рассмотрим итерационный процесс

$$(8)\qquad t_m^{k+1}=t_m^k+\frac{1}{L}\varrho_m(t_m^k), \qquad k=0,1,\ldots; \quad t_m^0=0,$$

где $L=L(T)$ — постоянная из условия (7). Так как $\varrho_m(t)\geqslant 0$, то последовательность $\{t_m^k\}$, $k=0,1,2,\ldots$монотонно возрастает. Поэтому здесь имеются две возможности: либо $t_m^k\leqslant T$ при всех $k\geqslant 0$, и тогда существует $\lim\limits_{k\to\infty}t_m^k\leqslant T$, что в силу (8) приводит к равенству $\lim\limits_{k\to\infty}\varrho_m(t_m^k)=0$, либо найдётся номер $s\geqslant 0$ такой, что $t_m^s\leqslant T<t_m^{s+1}$. Отсюда вытекает, что за конечное число шагов процесса (8) найдётся номер $k=k_m$, такой, что будет выполнено одно из двух следующих условий:

$$\varrho_m(t_m^k) > \delta_m, \quad k = 0, 1, \ldots, k_m - 1; \quad \varrho_m(t_m^{k_m}) \leqslant \delta_m, \quad t_m^{k_m} \leqslant T, \tag{9}$$

или

$$\varrho_m(t_m^k) > \delta_m, \quad k = 0, 1, \ldots, k_m - 1; \quad t_m^{k_m-1} \leqslant T < t_m^{k_m}. \tag{10}$$

В качестве приближённого значения для оптимального времени T^* возьмём величину

$$t_m = \min\{t_m^{k_m}; T\}, \quad m = 1, 2, \ldots \tag{11}$$

3. Сходимость метода

Описанный метод позволяет определить, принадлежит ли T^* отрезку $[0, T]$, и в случае, если $0 < T^* \leqslant T$, даёт принципиальную возможность найти T^* с нужной точностью. А именно, здесь верна следующая

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (6), (7) *и пусть последовательность* $\{\delta_m\}$ *такова, что*

$$\delta_m \geqslant 2\varepsilon_m, \quad m = 1, 2, \ldots; \quad \lim_{m\to\infty} \delta_m = 0. \tag{12}$$

Тогда последовательность $\{t_m\}$, *определенная согласно условиям* (8)–(11), *при* $0 < T^* \leqslant T$ *сходится к* T^*, *а если же* $T^* > T$ *или* T^* *не существует, то* $\lim\limits_{m\to\infty} t_m = T$.

Доказательство. Сначала рассмотрим случай $0 < T^* < T$. Так как $\lim\limits_{m\to\infty} \varepsilon_m = 0$, то $T^* + \varepsilon_m/L \leqslant T$ при всех $m \geqslant m_0$. Покажем, что при каждом $m \geqslant m_0$ процесс (8)–(11) будет заканчиваться выполнением условий (9) и справедлива оценка:

$$t_m \leqslant T^* + \frac{\varepsilon_m}{L}, \quad m \geqslant m_0. \tag{13}$$

Так как последовательность $\{t_m^k\}$, $k = 0, 1, \ldots$ монотонно возрастает, то либо $t_m^k \leqslant T^*$ при всех $k \geqslant 0$, либо найдётся номер s такой, что $t_m^s \leqslant T^* < t_m^{s+1}$. В первом случае существует $\lim\limits_{k\to\infty} t_m^k \leqslant T^*$ и, переходя к пределу в (8), будем иметь $\lim\limits_{k\to\infty} \varrho_m(t_m^k) = 0$. Это значит, что условия (9) обязательно выполятся при некотором $k = k_m$, причём $t_m = t_m^{k_m} \leqslant T^*$. Оценка (13) в этом случае доказана. Рассмотрим второй случай, когда $t_m^s \leqslant T^* < t_m^{s+1}$ при некотором $s \geqslant 0$. С учётом условий (6), (7), (8) в силу выбора m_0 имеем:

$$\begin{aligned} t_m^{s+1} &= t_m^s + \frac{1}{L}\varrho_m(t_m^s) = t_m^s + \frac{1}{L}\big(\varrho_m(t_m^s) - \varrho(t_m^s) + \varrho(t_m^s) - \varrho(T^*)\big) \leqslant \\ &\leqslant t_m^s + \frac{1}{L}\big(\varepsilon_m + L(T^* - t_m^s)\big) = T^* + \frac{\varepsilon_m}{L} \leqslant T, \quad m \geqslant m_0. \end{aligned} \tag{14}$$

А тогда согласно (12) получим

$$\begin{aligned} \varrho_m(t_m^{s+1}) &= \varrho_m(t_m^{s+1}) - \varrho(t_m^{s+1}) + \varrho(t_m^{s+1}) - \varrho(T^*) \leqslant \\ &\leqslant \varepsilon_m + L(t_m^{s+1} - T^*) \leqslant \varepsilon_m + L\frac{\varepsilon_m}{L} = 2\varepsilon_m \leqslant \delta_m, \quad m \geqslant m_0. \end{aligned} \tag{15}$$

Из (14), (15) вытекает, что условия (9) будут выполнены при некотором $k_m \leqslant s+1$, а оценка (13) следует из $t_m = t_m^{k_m} \leqslant t_m^{s+1}$ и неравенства (14).

Из оценки (13) имеем: $\overline{\lim\limits_{m\to\infty}}\, t_m \leqslant T^*$. Пусть $\underline{\lim\limits_{m\to\infty}}\, t_m = t^* = \lim\limits_{n\to\infty} t_{m_n}$. Поскольку

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \varrho(t^*) &\leqslant |\varrho(t^*) - \varrho(t_{m_n})| + |\varrho(t_{m_n}) - \varrho_{m_n}(t_{m_n})| + \varrho_{m_n}(t_{m_n}) \leqslant \\ &\leqslant L|t^* - t_{m_n}| + \varepsilon_{m_n} + \delta_{m_n} \to 0 \end{aligned}$$

при $n \to \infty$, то $\varrho(t^*) = 0$. Однако $\varrho(t) > 0$ при $0 < t < T^*$, так что $t^* \geqslant T^*$. Тем самым получили цепочку неравенств

$$T^* \leqslant t^* = \underline{\lim_{m\to\infty}}\, t_m \leqslant \overline{\lim_{m\to\infty}}\, t_m \leqslant T^*,$$

из которой следует равенство $\lim\limits_{m\to\infty} t_m = T^*$. Случай $0 < T^* < T$ рассмотрен.

Остаётся рассмотреть случай, когда $T^* \geqslant T$ или T^* не существует. Зададим произвольное число $\varepsilon > 0$. Так как непрерывная функция $\varrho(t)$ положительна при $0 \leqslant t \leqslant T - \varepsilon$, то $\varrho_\varepsilon = \min\limits_{0 \leqslant t \leqslant T-\varepsilon} \varrho(t) > 0$. Тогда найдётся номер m_2 такой, что $\varrho_\varepsilon > \varepsilon_m + \delta_m$ при всех $m \geqslant m_1$. Следовательно,

$$\varrho_m(t) \geqslant \varrho(t) - \varepsilon_m \geqslant \varrho_\varepsilon - \varepsilon_m > \delta_m \quad \text{для любого } t \in [0, T-\varepsilon].$$

Из (9)–(11) тогда имеем:

$$T - \varepsilon < t_m \leqslant T \quad \text{при всех } m \geqslant m_1.$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ это означает, что $\lim\limits_{m\to\infty} t_m = T$. Теорема 1 полностью доказана.

4. Об условиях (6), (7)

Сформулируем достаточные условия для выполнения соотношений (6), (7).

Теорема 2. *Пусть выполнены следующие условия*:

1) *множество* X_0 *ограничено*: $\sup\limits_{x\in X_0} |x| \leqslant A_0 < +\infty$;

2) *множество* V *выпукло, замкнуто и ограничено*;

3) *для любого* $T > 0$ *найдутся положительные константы* $A_1(T)$, $A_2(T)$ *такие, что*

$$|f(x, u, t)| \leqslant A_1(T)|x| + A_2(T), \quad x \in E_n, \quad u \in V, \quad t \in [0, T];$$

4) *для любых* $T > 0$, $R > 0$ *найдутся положительные константы* $A_3(T, R)$, $A_4(T, R)$ *такие, что*

$$|f(x, u, t) - f(y, v, t)| \leqslant A_3(T, R)|x - y| + A_4(T, R)|u - v|,$$

где $|x| \leqslant R$, $|y| \leqslant R$, $u \in V$, $v \in V$, $t \in [0, T]$;

5) *точки разрыва функции* $f(x, u, t)$ *по переменной* t (*при фиксированных* (x, u), $|x| \leqslant R$, $u \in V$) *можно покрыть конечной системой интервалов сколь*

угодно малой суммарной длины, а вне этих интервалов $f(x,u,t)$ непрерывна по t равномерно относительно (x,u), $|x| \leqslant R < +\infty$, $u \in V$;

6) для любого $T>0$ и любой пары $(x_0,u) \in U_t$, $0<t\leqslant T$, управление $u=u(\tau)$ можно продолжить с отрезка $[0,t]$ на $[0,T]$ так, что $(x_0,u)\in U_T$;

7) для любой пары $(x_0,u)\in U_t$ существует такое число $\eta>0$, что $(x_0,v)\in \in U_t$ при всех $v=v(\tau)$, для которых $v(\tau)\in V$, $0\leqslant \tau\leqslant t$, и

$$\int_0^t |u(\tau)-v(\tau)|^2\,d\tau \leqslant \eta;$$

8) последовательность сеток $\{t_{im}\}$, $m=1,2,\ldots$ такова, что

$$t_{0m}=0<t_{1m}<\ldots<t_{im}<\ldots,\qquad \lim_{i\to\infty} t_{im}=+\infty,$$

и для любого $T>0$ существует постоянная $C_0(T)>0$ такая, что

$$d_m(T)=\max_{0\leqslant i\leqslant N_m}|t_{i+1,m}-t_{im}|\leqslant \frac{C_0(T)}{N_m}, \tag{16}$$

где N_m — число узлов сетки $\{t_{im}\}$, принадлежащих отрезку $[0,T]$;

9) с увеличением номера m величины $\varrho(0)$ и $I_m^*(t)$ из (5) определяются всё точнее и точнее, то есть при каждом $T>0$

$$\lim_{m\to\infty}\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|I_m^*(t)-\varrho_m(t)|=0,\qquad \lim_{m\to\infty}\varrho_m(0)=\varrho(0). \tag{17}$$

Тогда величины $\varrho_m(t)$, $\varrho(t)$ удовлетворяют условиям (6), (7).

Доказательство. Из условий 1), 3) теоремы при любом $(x_0,u)\in U_T$ следует

$$|x(t,x_0,u)|=\left|\int_0^t f\big(x(\tau,x_0,u),u(\tau),\tau\big)\,d\tau+x_0\right|\leqslant$$
$$\leqslant A_0+TA_2(T)+A_1(T)\int_{t_0}^t|x(\tau,x_0,u)|\,d\tau.$$

Отсюда с помощью известного неравенства Гронуолла имеем

$$|x(t,x_0,u)|\leqslant C(T)\equiv \big(A_0+TA_2(T)\big)e^{TA_1(T)},\qquad t\in[0,T],\ (x_0,u)\in U_T.$$

Тогда

$$|x(t,x_0,u)-x(\tau,x_0,u)|=\left|\int_\tau^t f\big(x(s,x_0,u),u(s),s\big)\,ds\right|\leqslant \tag{18}$$
$$\leqslant [A_1(T)C(T)+A_2(T)]\cdot|t-\tau|\equiv L(T)|t-\tau|,$$
$$t,\tau\in[0,T],\ (x_0,u)\in U_T.$$

Теперь нетрудно показать, что функция $\varrho(t)$ из (2) также удовлетворяет условию Липшица с той же константой $L=L(T)$ из (18). В самом деле, для любого $\varepsilon>0$ найдутся такие $(x_0^t,u^t)\in U_t$, $y^t\in Y$, и $(x_0^\tau,u^\tau)\in U_\tau$, $y^\tau\in Y$, что

$$\varrho(t)\leqslant|x(t,x_0^t,u^t)-y^t|\leqslant\varrho(t)+\varepsilon,\qquad \varrho(\tau)\leqslant|x(\tau,x_0^\tau,u^\tau)-y^\tau|\leqslant\varrho(\tau)+\varepsilon.$$

В соответствии с условием 6) теоремы будем считать, что управления u^t и u^τ продолжены на отрезок $[0,T]$ так, что $(x_0^t,u^t)\in U_T$, $(x_0^\tau,u^\tau)\in U_T$. Тогда

$$\varrho(t)-\varrho(\tau)\leqslant|x(t,x_0^\tau,u^\tau)-y^\tau|-|x(\tau,x_0^\tau,u^\tau)-y^\tau|+\varepsilon\leqslant$$
$$\leqslant|x(t,x_0^\tau,u^\tau)-x(\tau,x_0^\tau,u^\tau)|+\varepsilon\leqslant L(T)\cdot|t-\tau|+\varepsilon.$$

Аналогично,

$$\varrho(t)-\varrho(\tau)\geqslant|x(t,x_0^t,u^t)-y^t|-\varepsilon-|x(\tau,x_0^t,u^t)-y^t|\geqslant -L(T)\cdot|t-\tau|-\varepsilon.$$

Отсюда в силу произвольности $\varepsilon>0$ получаем, что

$$|\varrho(t)-\varrho(\tau)|\leqslant L(T)\cdot|t-\tau|,\qquad t,\tau\in[0,T],\qquad L(T)=\mathrm{const}>0$$

взята из (18). Условие (7) доказано.

Далее, из условий 1)–8) теоремы и результатов работы [5] следует, что $\lim_{m\to\infty} I_m^*(t)=\varrho(t)$ при любом $t\in[0,T]$. С другой стороны, действуя по аналогии с предыдущими рассуждениями, нетрудно показать, что

$$|I_m^*(t)-I_m^*(\tau)|\leqslant L_1(T)|t-\tau|,\qquad t,\tau\in[0,T],\ m=1,2,\ldots,$$
$$L_1(T)=\mathrm{const}>0.$$

Тогда

$$0\leqslant I_m^*(t)\leqslant \sup_{m\geqslant 1}\varrho_m(0)+TL_1(T),\qquad t\in[0,T].$$

Таким образом, семейство функций $\{I_m^*(t)\}$ равномерно ограничено и равностепенно непрерывно на $[0,T]$. По теореме Арцела тогда $\{I_m^*(t)\}$ сходится к $\varrho(t)$ равномерно на $[0,T]$. С учётом условий (17) тогда

$$\varepsilon_m=\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|\varrho_m(t)-\varrho(t)|\to 0\quad\text{при}\quad m\to\infty.$$

Теорема 2 доказана.

Заметим, что примером системы (1), удовлетворяющей условиям 3)–7) доказанной теоремы, может служить линейная система $\dot x=A(\tau)x+B(\tau)u+ +f(\tau)$ с кусочно-непрерывными на каждом конечном отрезке $[0,T]$ матрицами $A(\tau)$, $B(\tau)$, $f(\tau)$.

5. Обсуждение

При описании метода поиска оптимального времени T^* в §§ 2 и 3 все рассмотрения велись на некотором конечном отрезке $[0,T]$. Возникает вопрос, как выбрать T? Здесь в первую очередь нужно сказать, что в практических задачах из геометрических, физических или других соображений часто удаётся получить верхнюю оценку для оптимального времени T^*, которую можно принять в качестве T. Если же такой оценки для T^* не имеется, то можно задать некоторую последовательность $\{T_i\}$:

$$T_0=0<T_1<\ldots<T_p<\ldots,\qquad \lim_{p\to\infty}T_p=+\infty,$$

и на отрезках $[T_p, T_{p+1}]$ последовательно при $p = 0, 1, \ldots$ применять описанный выше метод до тех пор, пока не будет найдено T^* с нужной точностью, или не обнаружится, что $\varrho(t) > 0$ на отрезке $[0, T_{\max}]$, где $T_{\max}$ может определяться, например, разрядной сеткой используемых вычислительных средств. Разумеется, на каждом из отрезков $[T_p, T_{p+1}]$ нужно проверять выполнения условий (6), (7), а в процессе (8) полагать $t_m^0 = T_p$ и использовать константу L, соответствующую данному отрезку.

Следует сказать, что теоретически получаемые оценки для L (см. оценку (18)) обычно бывают довольно грубыми, что влечёт за собой малость разности $t_m^{k+1} - t_m^k$ и медленную сходимость процесса (8). Кроме того разумно требовать, чтобы разности $t_m^{k+1} - t_m^k$ при $k = 0, 1, \ldots, k_m - 1$ (определение k_m см. в (9), (10)) были не меньше шага разностной сетки, что с учётом условия (16) приводит к неравенству: $\dfrac{C_0(T)}{N_m} \leqslant \dfrac{\delta_m}{L}$. Согласованное изменение шага сетки, величин ε_m, δ_m (см. условие (12)), разумный выбор величин T, L не всегда является простым делом и может потребовать от вычислителя немалого искусства.

При описании метода в процессе (8) полагалось $t_m^0 = 0$. Однако если из каких-либо соображений известно, что $\varrho(t) > 0$ при $0 \leqslant t \leqslant \Delta$, то в (8) для ускорения сходимости вместо $t_m^0 = 0$ лучше взять $t_m^0 = \Delta$.

Далее заметим, что при рассмотрении задачи быстродействия мы не предполагали, что в выражении (2) нижняя грань достигается. В тех случаях, когда существует допустимая пара $(x_0^*, u^*) \in U_{T^*}$ и $y^* \in Y$, для которых

$$\varrho(T^*) = |x(T^*, x_0^*, u^*) - y^*| = 0,$$

наряду с задачей построения последовательности $\{t_m\} \to T^*$, возникает интересная проблема построения последовательности $\{u_m(\tau)\}$, сходящейся к оптимальному управлению в некоторой топологии. Надо сказать, что эта проблема в общем случае является некорректно поставленной по А. Н. Тихонову, и для её решения нужно привлечь те или иные способы регуляризации [6], [7].

Описанный выше метод поиска минимального нуля функции $\varrho(t)$ предполагает, что значения этой функции известны приближённо и выполняются условия (6), (7), а в остальном, как нетрудно видеть, природа функции $\varrho(t)$ может быть совершенно произвольной, в частности, она даже может быть и не связана с рассмотренной задачей быстродействия. Это обстоятельство говорит о том, что описанный метод может быть применён и в других ситуациях, требующих определения минимального нуля функции. Например, его можно применять для решения других классов задач быстродействия, связанных с системами с запаздыванием, с уравнениями математической физики, при наличии фазовых ограничений, подвижных концов [8] и т.д. Конечно, эффективность изложенного метода в таких задачах во многом будет зависеть от наличия достаточно простых и удобных способов вычисления $\varrho_m(t)$. Кстати, для вычисления $\varrho_m(t)$ мы выше предложили разностный метод, хотя понятно, что здесь могут быть использованы и другие, возможно, более удобные методы, лишь бы при этом соблюдались условия (6).

Описанный выше метод нетрудно модифицировать и применять для поиска минимального нуля функций, удовлетворяющих обобщённому условию Липшица:

$$|\varrho(t) - \varrho(\tau)| \leqslant \omega(|t - \tau|), \qquad t, \tau \in [0, T],$$

где $\omega(s)$ — некоторая функция, $\omega(s) > 0$ при $s > 0$ и $\lim\limits_{s \to +0} \omega(s) = \omega(0) = 0$. Например, если $\omega(s) \equiv L s^\gamma$, $L = L(T) = \text{const} > 0$, $0 < \gamma = \text{const} \leqslant 1$, то процесс (8) следует заменить на такой:

$$(8') \qquad t_m^{k+1} = t_m^k + \left(\frac{\varrho_m(t_m^k)}{L}\right)^{1/\gamma}, \qquad k = 0, 1, \ldots; \ t_m^0 = 0,$$

а первое условие (12) будет иметь вид:

$$\frac{1}{\gamma^\gamma} (L T^\gamma + \varepsilon_m)^{1-\gamma} \cdot \varepsilon_m^\gamma + \varepsilon_m \leqslant \delta_m;$$

все утверждения теоремы 1 при этом сохраняют силу. Заметим, что процессы вида (8), (8′) использовались в работе [1] в предположении, что значения функции вычислялись точно (тогда $\varepsilon_m = 0$ и, тем более, $\delta_m = 0$, $m = 1, 2, \ldots$); однако в задачах быстродействия такое предположение вряд ли оправдано.

Литература

[1] Г. С. Ганшин, *Расширение области сходимости метода Ньютона*, Журн. вычисл. матем. и матем. физики 11.5 (1971), стр. 1294–1296.

[2] Ф. П. Васильев, *Лекции по методам решения экстремальных задач*, Изд-во МГУ, 1974.

[3] В. Г. Карманов, *Математическое программирование*, „Наука”, Москва 1975.

[4] Э. Полак, *Численные методы оптимизации. Единый подход*, „Мир”, Москва 1974.

[5] Б. М. Будак, Е. М. Беркович, *Об аппроксимации экстремальных задач, I, II*, Журн. вычисл. матем. и матем. физики 11.3 (1971), стр. 580–596; 11.4 (1971), стр. 870–884.

[6] А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин, *Методы решения некорректных задач*, „Наука”, Москва 1974.

[7] А. Н. Тихонов, Ф. П. Васильев, *Методы решения некорректных экстремальных задач*, Настоящий сборник, стр. 297–342.

[8] Ф. П. Васильев, Р. П. Иванов, *О приближенном решении задачи быстродействия в банаховых пространствах при наличии ограничений на фазовые координаты*, Журн. вычисл. матем. и матем. физики 11.2 (1971), стр. 328–347.

Presented to the Semester
Mathematical Models and Numerical Methods
(February 3–June 14, 1975)