BANACH CENTER PUBLICATIONS
VOLUME 3

СЛАБЫЕ РЕШЕНИЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ИХ РАСЧЕТА

Н. Н. КУЗНЕЦОВ

Московский Государственный Университет, Факультет Вычислительной Математики и Кибернетики, Москва, СССР

Интерес к слабым (разрывным) решениям квазилинейных дифференциальных уравнений первого порядка обусловлен прежде всего их широким распространением в математических моделях газовой динамики. Проблема обоснования численных методов расчета таких решений является одной из важнейших проблем численного анализа. Трудность этой проблемы обусловлена слабой разработанностью математической теории слабых решений.

Развитие этой теории началось в 50-х годах (см. [1]–[3]), но такие узловые вопросы теории, как теоремы существования и единственности, остаются до сих пор по существу открытыми. В этой статье я почти не буду касаться систем уравнений, а сосредоточу внимание на одном уравнении, для которого в настоящее время развита достаточно полная теория. С предварительными понятиями теории разрывных решений и некоторыми простейшими результатами для систем гиперболических уравнений (главным образом, газовой динамики) читатель может познакомиться по книге [4].

Наиболее существенным результатом, имеющимся в настоящее время в круге вопросов, связанных с системами гиперболических уравнений, является теорема существования решения задачи Коши, близкого к постоянному, доказанная Глиммом [21] для „выпуклых" одномерных систем (в работе [26] она распространена на произвольные одномерные системы). С помощью метода, предложенного Глиммом, удалось получить интересные теоремы существования для некоторых специальных систем также и без предположения близости решения к постоянному (см., например, статьи [22]–[24]).

В первом параграфе статьи обсуждается постановка задачи Коши в классе разрывных функций, второй посвящен теории этой задачи для многомерного квазилинейного уравнения, в третьем доказывается сходимость и получаются оценки точности широкого класса приближенных методов расчета разрывных решений.

1. Постановка задачи Коши для квазилинейных систем уравнений гиперболического типа в классе разрывных функций

1.1. Понятие слабого решения. Рассмотрим в пространстве R^{n+1} систему квазилинейных уравнений

$$D_0 u + \sum_{i=1}^{n} D_i \varphi_i(u, t, x) = \varphi_0(u, t, x), \tag{1}$$

где u, $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ — функции со значениями в R^m, D_0 и D_i обозначают дифференцирование по переменным t и x_i соответственно.

Дивергентная форма уравнения (1) делает возможным непосредственное обобщение понятия решения: достаточно понимать производные $D_0 u$ и $D_i \varphi_i$ как распределения (обобщенные функции). При этом нелинейность уравнения накладывает очевидные ограничения на класс решений. Они не могут быть произвольными распределениями, поскольку для них бессмысленны нелинейные операции $u \to \varphi_i(u,t,x)$. Даже в случае, когда u есть функция, но функции $u(t,x)$, $\varphi_0(u,t,x)$, $\varphi_1(u,t,x), \ldots, \varphi_n(u,t,x)$ не являются локально суммируемыми, как известно, распределения u, $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ определены неоднозначно, и это, как нетрудно сообразить, вообще говоря (но не всегда), исключает и такие функции из класса возможных решений.

В силу изложенных причин мы будем рассматривать в качестве решений лишь такие функции u, которые локально суммируемы и для которых все функции $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ также локально суммируемы. Точная формулировка такова:

Функция u, локально суммируемая на открытом множестве $\Omega \subset R^{n+1}$, называется *решением* уравнения (1) на множестве Ω, если функции $\varphi_j(u(t,x), t, x)$ локально суммируемы на Ω и распределение $D_0 u + \sum_i D_i \varphi_i - \varphi_0 = 0$ на Ω.

Последнее означает, что для любой числовой функции $\omega \in \mathring{C}_1(\Omega)$ (т.е. непрерывно дифференцируемой и финитной на Ω)

$$\int_{R^{n+1}} \Big(u D_0 \omega + \sum_i \varphi_i D_i \omega + \varphi_0 \omega \Big)\, dt dx = 0, \tag{2}$$

т.е. u является решением (1), обобщенным по Соболеву.

Заметим, что имеющие основное прикладное значение системы квазилинейных уравнений гиперболического типа, известные в настоящее время, имеют дивергентную форму (1). С физической точки зрения такая форма связана обычно с тем, что соответствующие уравнения описывают законы сохранения тех или иных физических величин. Поэтому часто уравнения дивергентного вида (1) называют „законами сохранения''. Сказанное, разумеется, не означает, что все реальные процессы моделируются только дивергентными уравнениями. Однако, вопрос о возможности нетривиального обобщения понятия решения в случае недивергентных систем в настоящее время еще не изучен.

Заметим, что в отличие от дифференцируемых (классических) решений решения в указанном выше смысле называют еще *слабыми*, или *обобщенными*. Мы, говоря о решениях, всегда будем подразумевать слабые решения. Очевидно, всякая непрерывно дифференцируемая функция, являющаяся слабым решением, является в то же время классическим решением.

Если решение обладает достаточно хорошими свойствами, можно указать и другие определения решения, эквивалентные (2). Пусть, например, функции u и $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ интегрируемы на всякой ориентируемой гладкой n-мерной поверхности в Ω. Тогда, ввиду формулы Стокса, (2) эквивалентно соотношению:

$$\int_{\partial K} \Big(u N_0 + \sum_{i=1}^{n} \varphi_i N_i \Big)\, d\sigma = \int_K \varphi_0\, dt dx, \tag{3}$$

где K — любая компактная часть Ω с гладкой границей ∂K, $(N_0, N_1, \ldots, N_n) = (N_0, \vec{N})$ — непрерывное поле внешних единичных нормалей на ∂K.

Предположим, в частности, что почти всюду на гладкой ориентируемой поверхности $\Gamma \subset \Omega$ решение u обладает предельными значениями $u^{\pm}$:

$$u^{\pm}(t,x) = u\big(t \pm 0 \cdot N_0(t,x),\ x \pm 0 \cdot \vec{N}(t,x)\big) \quad (t, x \in \Gamma) \tag{4}$$

и эти значения локально суммируемы на Γ. Пусть, далее, φ_i суть непрерывные функции своих аргументов. Тогда на Γ $\varphi_i^{\pm}(t,x) = \varphi_i\big(u^{\pm}(t,x), t, x\big)$ суть предельные значения функций φ_i на Γ. Предположим, что они также локально суммируемы на Γ. Тогда соотношение (3) дает для любой компактной части $K\Gamma \subset \Gamma$:

$$\int_{K\Gamma} \Big\{ [u] N_0 + \sum_{i=1}^{n} [\varphi_i] N_i \Big\}\, d\sigma = 0,$$

где $[u] = u^+ - u^-$, $[\varphi_i] = \varphi_i^+ - \varphi_i^-$, так что почти всюду на Γ

$$N_0 [u] + \sum_{i=1}^{n} N_i [\varphi_i] = 0. \tag{5}$$

Это известные *условия совместности* на поверхности разрыва Γ (*условия Гюгонио*).

Обозначим Γ_t сечение поверхности Γ плоскостью $t = \mathrm{const}$ и предположим, что Γ_t — гладкая поверхность в R^n. Обозначая $\vec{\nu} = \vec{N}/|\vec{N}|$ — единичный вектор нормали к Γ_t и

$$s = -\frac{N_0}{|\vec{N}|}$$

(так называемая *нормальная скорость* поверхности Γ_t), получаем:

$$\sum_{i=1}^{n} \nu_i [\varphi_i] = s[u]. \tag{6}$$

Отсюда непосредственно следует, что система (1) может иметь нетривиальные поверхности разрыва лишь в том случае, если она имеет хотя бы одну характеристику.

Заметим, что особенно простой концепция слабого решения становится в классе функций, являющихся гладкими всюду в Ω, за исключением, быть может, конечного числа гладких n-мерных поверхностей, на которых, однако, определены и локально интегрируемы предельные значения $u^{\pm}$ и $\varphi_i^{\pm}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. В этом классе слабым решением системы (1) являются функции, удовлетворяющие уравнению (1) (в обычном смысле) во всех точках гладкости и условиям совместности (5) — на поверхностях разрыва. Этот класс слабых решений наиболее „популярен" среди специалистов-механиков и других прикладников. С точки же зрения математика он мало полезен. Дело в том, что этот класс слишком узок. Даже для простейших случаев в нем нельзя обосновать существование слабого решения, т.е. доказать теорему существования сколько-нибудь удовлетворительной общности. Например, для уравнения в R^2

$$D_0 u + D_1\left(\frac{u^2}{2}\right) = 0 \tag{7}$$

в этом классе нельзя гарантировать существования решения u, которое бы при $t=0$ принимало значение u^0, даже если функция u^0 бесконечно дифференцируема на R^1.

Поэтому математическая теория слабых решений, состоящая в обосновании разрешимости задачи Коши (как и краевых задач), единственности решения и т.п., а также теория, обосновывающая приближенные методы нахождения таких решений, по крайней мере, в настоящее время должна строиться в более общих классах функций.

1.2. Задача Коши. Возвращаясь к общему определению решения, данному в начале 1.1, можно заметить, что из этого определения следует, что функция

$$u_\omega(t) = \int_{R^n} u(t,x)\,\omega(t,x)\,dx \qquad (\omega \in \mathring{C}(\Omega))$$

эквивалентна абсолютно непрерывной функции. Не ограничивая общности, ее можно считать непрерывной. Это приводит к обычной формулировке задачи Коши в области Ω как задачи о нахождении решения, удовлетворяющего при некотором $t=a$ начальному условию

$$u(a,x) = u^0(x), \tag{8}$$

где u^0 — заданная локально-суммируемая в $\Omega_a = \Omega \cap \{t=a\}$ функция.

Для полосы $\mathfrak{A}_{ab} = \{a<t<b,\ x \in R^n\}$ условие (8) вместе с соотношением (2), определяющим решение уравнения (1) в $\Omega = \mathfrak{A}_{ab}$, приводит к следующей эквивалентной формулировке задачи Коши: найти такую локально-суммируемую в $\mathfrak{A}_{ab}$ функцию u, для которой все функции $\varphi_i(u,t,x)$ также

локально-суммируемы в $\mathfrak{A}_{ab}$, что для любой непрерывно дифференцируемой функции ω, носитель которой принадлежит полупространству $\{x \in R^n,\ t<b\}$, выполнено соотношение

$$\int_{t>a}\left(uD_0\omega + \sum_i \varphi_i D_i\omega + \varphi_0\omega\right)dt\,dx + \int_{R^n} u^0(x)\,\omega(a,x)\,dx = 0, \tag{9}$$

где u^0 — локально-суммируемая в R^n заданная функция ([5]).

Обозначим θ_a^+ (соответственно θ_a^-) характеристическую функцию полупрямой $t>a$ (соответственно $t<a$), а $\theta_{ab} = \theta_a^+\theta_b^-$ — характеристическую функцию интервала $a<t<b$.

Определим пространство U' функций на R^{n+1} (со значениями в R^m) условиями: если $u \in U'$, то u ограничена и $u_\omega(t) = \int_{R^n} u(t,x)\,\omega(x)\,dx$ непрерывна по t всюду на R для любой $\omega \in \mathring{C}(R^n)$. Предположим, что функции $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ дважды непрерывно дифференцируемы всюду на R^{m+n+1}.

Для любого элемента $u \in U'$, в силу сделанных предположений, имеет смысл распределение

$$D_0 u + \sum_i D_i\varphi_i - \varphi_0,$$

а также распределения

$$\theta_a^+\left(D_0u + \sum_i D_i\varphi_i - \varphi_0\right) \quad \text{и} \quad \theta_{ab}\left(D_0u + \sum_i D_i\varphi_i - \varphi_0\right),$$

причем

$$\theta_a^+\left(D_0u + \sum_i D_i\varphi_i - \varphi_0\right) = D_0u_a + \sum_i D_i\varphi_i(u_a,t,x) - \varphi_0(u_a,t,x) - u\delta_a, \tag{10}$$

где $u_a = \theta_a^+ u$, $\delta_a = D_0\theta_a^+$ — дельта-функция, сосредоточенная при $t=a$. Аналогичная формула имеет место и для $\theta_{ab}(D_0u + \sum_i D_i\varphi_i - \varphi_0)$.

Функция $u \in U'$ в том и только в том случае является решением уравнения (1) в полупространстве $\mathfrak{A}_a^+ = \{x \in R^n,\ t>a\}$, если

$$\theta_a^+\left(D_0u + \sum_i D_i\varphi_i - \varphi_0\right) = 0, \tag{11}$$

а потому задача Коши в $\mathfrak{A}_a^+$ в пространстве U' сводится к решению уравнения (11) при условии (8). В силу формулы (10), это эквивалентно соотношению (9) (в котором $b>a$ произвольно).

Легко привести примеры, показывающие, что задача Коши в указанной постановке некорректна: она может иметь бесконечно много решений. Рассмотрим простейший случай $m=n=1$, $\varphi_0 = 0$, $\varphi_1(u) = \frac{1}{2}u^2$, $u^0(x) = 0$. Иными словами, рассмотрим задачу Коши

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^2}{2}\right) = 0, \qquad u(0,x) = u^0(x) \tag{12}$$

в полуплоскости $t>0$ при $u^0(x)\equiv 0$. Эта задача имеет тривиальное решение $u(t,x)\equiv 0$, но, кроме того, имеет континуум решений

$$u=u^\alpha(t,x)=\begin{cases}0, & \left|\dfrac{x}{t}\right|>\alpha\\ \alpha\operatorname{sgn}\dfrac{x}{t}, & \left|\dfrac{x}{t}\right|\leqslant\alpha\end{cases}\qquad(\alpha>0),$$

что и доказывает некорректность задачи Коши (12).

В случае систем уравнений газовой динамики неединственность разрывных решений была замечена давно. Она обусловлена тем, что в классе слабых решений законы сохранения массы, импульса и энергии не влекут сохранение энтропии и допускают решения, содержащие разрывы (ударные волны), несовместимые со вторым началом термодинамики.

Некорректность задачи Коши в классе разрывных функций ставит перед нами проблему выделения в множестве всех решений некоторого подмножества — *класса корректности*, в котором задача Коши была бы поставлена корректно. Отбор решений в этот класс должен осуществляться с помощью некоторого условия (аналогичного второму началу термодинамики), причем это условие, как легко понять, в рассматриваемом классе функций не может быть следствием самих уравнений (1).

Проблема выделения достаточно общего класса корректности задачи Коши является фундаментальной проблемой теории слабых решений. В настоящее время она не решена даже для простейших классов квазилинейных гиперболических систем (не исключая и систему уравнений газовой динамики).

2. Задача Коши для скалярного уравнения

2.1. Класс корректности задачи Коши. В случае скалярного уравнения ($m=1$) проблема класса корректности задачи Коши решена, по существу, полностью. В одномерном случае ($n=1$) при условии выпуклости функции φ_1 это было сделано (О. А. Олейник [6]). Ею же были указаны условия, обеспечивающие единственность решения без условия выпуклости [6] (см. также [7]). Существование слабого решения задачи Коши для многомерного уравнения ($n>1$) было впервые доказано в работах [8], [9]. Окончательно вопрос был решен в статьях [10], [11].

Подход, которого я буду придерживаться, существенно отличен от подхода в указанных статьях, поскольку в них явно не фигурировало понятие класса корректности. Для простоты изложения я буду предполагать, что $\varphi_0=0$, а функции $\varphi_1,\dots,\varphi_n$ зависят только от u. Учет функции φ_0 и зависимости φ_i от t,x не представляет труда. Таким образом, уравнение, которое исследуется в этом параграфе, имеет вид:

$$D_0u+\sum_{i=1}^n D_i\varphi_i(u)=0, \tag{13}$$

где u,φ_i — числовые функции, т.е. функции со значениями в R. Функции φ_i я буду предполагать дважды непрерывно дифференцируемыми на всей прямой R.

Пусть U пространство ограниченных и измеримых числовых функций на R^{n+1}, обладающих тем свойством, что, рассматриваемые как функции $t\to u(t)\in L_1^{\mathrm{loc}}(R^n)$, они непрерывны.

Определение. Подпространство $U_a^+\subset U$ назовем *классом корректности уравнения* (13) *относительно полупространства* $\mathfrak{A}_a^+$, если оно содержит все непрерывно дифференцируемые решения этого уравнения в $\mathfrak{A}_a^+$ и для любых двух элементов $u,v\in U_a^+$

$$\theta_a^+\left\{D_0|u-v|+\sum_{i=1}^n D_iF_i(u,v)\right\}\leqslant 0, \tag{14}$$

где $F_i(u,v)=\operatorname{sgn}(u-v)\,(\varphi_i(u)-\varphi_i(v))$.

Замечание. В рассматриваемом случае *a priori* достаточно требовать, чтобы класс корректности содержал не все непрерывно дифференцируемые решения, а лишь постоянные решения уравнения (13).

Изменением знака t можно получить определение класса U_a^-. Неравенство (14) понимается, конечно, в смысле теории распределений: для любой неотрицательной функции $\omega\in\mathring{C}_1(R^{n+1})$

$$\int\limits_{t>a}\left\{|u-v|D_0\omega+\sum_i F_i(u,v)D_i\omega\right\}dt\,dx+\int\limits_{R^n}|u(a,x)-v(a,x)|\,\omega(a,x)\,dx\geqslant 0.$$

Заметим, что в силу формулы (10) неравенство (14) можно записать так:

$$D_0|u_a-v_a|+\sum_i D_iF_i(u_a,v_a)\leqslant|u-v|\delta_a. \tag{15}$$

Лемма 1. *Если $u\in U_a^+$, то и является решением уравнения* (13) *в полупространстве $\mathfrak{A}_a^+$.*

Доказательство. Так как постоянная функция, будучи непрерывно дифференцируемым решением (13), входит в U_a^+, то, полагая $A=\sup\limits_{t,x}|u(t,x)|$, имеем $|u-A|=A-u$ и $|u+A|=A+u$, так что из неравенства (14), в котором $v=\pm A$, получаем $\theta_a^+(D_0u+\sum_i D_i\varphi_i)=0$, что и требовалось доказать.

Теорема 1. *В U_a^+ существует не более одного решения задачи Коши, и это решение непрерывно зависит от начальных данных в том смысле, что для любого шара $K_\varrho\subset R^n$ радиуса ϱ и любого $t>a$*

$$\|u(t)-v(t)\|_{L_1(K_\varrho)}\leqslant\|u(a)-v(a)\|_{L_1(K_{\varrho_t})}, \tag{16}$$

где $\varrho_t=\varrho+A(t-a)$, A — некоторая постоянная.

Доказательство. Так как единственность следует из (16), достаточно доказать лишь это неравенство. Обозначим

$$A = \max\Bigl(\sum_{i=1}^{n} \varphi_i'(z)^2\Bigr)^{1/2}, \tag{17}$$

где maximum берется по промежутку

$$|z| \leqslant \sup_{\mathfrak{A}_a^+} \max\,(|u(t,x)|,\,|v(t,x)|),$$

и положим для фиксированного $t_0 > a$

$$f(t,x) = \theta\Bigl(\sqrt{\sum_i x_i^2} - \varrho - A\,(t_0 - t)\Bigr),$$

где θ — гладкая монотонная функция на R, $\theta(\lambda) = 1$ при $\lambda < -\varepsilon$, $\theta(\lambda) = 0$ при $\lambda > \varepsilon$. Умножая неравенство (15) на f, получаем:

$$D_0 f\,|u_a - v_a| + \sum_i D_i f F_i(u,v) \leqslant$$

$$\leqslant \theta'\,|u_a - v_a|\Bigl\{A + \sum_i \frac{x_i}{\sqrt{\sum_j x_j^2}}\,\frac{\varphi_i(u_a) - \varphi_i(v_a)}{u_a - v_a}\Bigr\} + f\,|u-v|\,\delta_a.$$

Поскольку $\theta' \leqslant 0$, а выражение в фигурной скобке, в силу (17), неотрицательно, то при $t > a$

$$\frac{d}{dt}\int_{R^n} f(t,x)\,|u-v|\,dx \leqslant 0.$$

Таким образом, при $t_0 > a$

$$\int_{R^n} f(t_0,x)\,|u(t_0,x) - v(t_0,x)|\,dx \leqslant \int_{R^n} f(a,x)\,|u(a,x) - v(a,x)|\,dx,$$

и переходя здесь к пределу при $\varepsilon \to 0$, получаем (16). Теорема доказана.

Теорема 2 (принцип максимума). *Если $u \in U_a^+$, то при всех $(t,x) \in \mathfrak{A}_a^+$*

$$\inf_{y \in R^n} u(a,y) \leqslant u(t,x) \leqslant \sup_{y \in R^n} u(a,y). \tag{18}$$

Доказательство. Обозначим $(u-k)^+ = \frac{1}{2}|u-k| + \frac{1}{2}(u-k)$ положительную часть функции $u-k$. В силу леммы 1, u есть решение уравнения (13), так что

$$\theta_a^+\Bigl\{D_0(u-k) + \sum_{i=1}^{n} D_i\bigl(\varphi_i(u) - \varphi_i(k)\bigr)\Bigr\} = 0. \tag{19}$$

Из (14) и (19) получаем:

$$\theta_a^+\Bigl\{D_0(u-k)^+ + \sum_{i=1}^{n} D_i F_i^*(u,k)\Bigr\} \leqslant 0,$$

где $F_i^*(u,k) = \frac{1}{2}\bigl(1 + \operatorname{sgn}(u-k)\bigr)F_i(u,k)$. Из этого неравенства точно так же, как в предыдущей теореме, следует, что для любого $t > a$

$$\|(u-k)^+\|_{L_1(K_\varrho)} \leqslant \|(u(a)-k)^+\|_{L_1(K_{\varrho_1})}.$$

Положим здесь $k = \sup_x u(a,x)$. Тогда $(u(a,x)-k)^+ \equiv 0$, так что и $(u(t,x)-k)^+ \equiv 0$, т.е. $u(t,x) \leqslant k$. Второе из неравенств (18) в отдельном доказательстве не нуждается. Теорема доказана.

Теорема 3. *Если $u \in U_a^+$, то для любой гладкой и выпуклой книзу функции $f(u)$*

$$\theta_a^+\Bigl\{D_0 f(u) + \sum_{i=1}^{n} D_i \Phi_i(u)\Bigr\} \leqslant 0, \tag{20}$$

где $\Phi_i(u) = \int f'(u)\,\varphi_i'(u)\,du$.

Доказательство. Предположим сначала, что f дважды непрерывно дифференцируема, а потому $f''(u) \geqslant 0$. Умножим неравенство

$$\theta_a^+\Bigl\{D_0|u-k| + \sum_{i=1}^{n} D_i F_i(u,k)\Bigr\} \leqslant 0, \tag{21}$$

где k — постоянная, на $f''(k)$ и проинтегрируем результат по k в пределах от $-A$ до A, $A \geqslant \sup_{\mathfrak{A}_a^+} |u(t,x)|$. Так как с точностью до постоянной

$$\int f''(k)\,|u-k|\,dk = 2f(u) - u\bigl(f'(A) + f'(-A)\bigr),$$

$$\int f''(k)\,F_i(u,k)\,dk = 2\Phi_i(u) - \varphi_i(u)\,\bigl(f'(A) + f'(-A)\bigr),$$

то, учитывая, что u есть решение, получаем (20). Для завершения доказательства достаточно теперь в (20) перейти к пределу от дважды гладкой к гладкой функции f. Теорема доказана.

Замечание. Для доказательства теоремы был использован не факт принадлежности u классу корректности U_a^+, а лишь неравенство (21). Для этого заметим, что функция $u \in U$, удовлетворяющая этому неравенству, является в $\mathfrak{A}_a^+$ решением уравнения (13), ибо доказательство леммы 1 также опирается лишь на неравенство (21).

Докажем теперь следующую важную теорему.

Теорема 4. *Функция $u \in U$ в том и только в том случае принадлежит классу корректности U_a^+, если для любой постоянной k выполнено неравенство (21), или, что эквивалентно, для любой гладкой выпуклой книзу функции f выполнено неравенство (20).*

Замечание. Достаточность условия (21) для принадлежности u классу корректности впервые была доказана С. Н. Кружковым [11]. Мы используем идею его доказательства.

Доказательство. В доказательстве нуждается лишь утверждение о достаточности сформулированных условий. В силу теоремы 3 эти условия, очевидно, эквивалентны, поэтому докажем лишь достаточность условия (21). Пусть функции u и v при всех k удовлетворяют этому условию. Тогда для каждой фиксированной точки $(t', x') \in \mathfrak{A}_a^+$

$$(22)\qquad \theta_a^+(t')\theta_a^+(t)\Big\{D_0|u(t,x)-v(t',x')|+\sum_i D_i F_i\big(u(t,x),\ v(t',x')\big)\Big\}\leqslant 0,$$

и для каждой фиксированной точки $(t,x)\in\mathfrak{A}_a^+$

$$(23)\qquad \theta_a^+(t')\theta_a^+(t)\Big\{D_0'|u(t,x)-v(t',x')|+\sum_i D_i' F_i\big(u(t,x),\ v(t',x')\big)\Big\}\leqslant 0,$$

где D_0' и D_i' обозначают дифференцирование по t' и x'. Пусть ω и g гладкие финитные в R^{n+1} неотрицательные функции. Применим распределение (22) к функции $(t,x)\to\omega(t,x)g(t-t',\ x-x')$ и результат проинтегрируем по t', x'. Аналогично распределение (23) применим к функции $(t',x')\to \to g(t-t',\ x-x')$, результат умножим на $\omega(t,x)$, после чего проинтегрируем по t,x. Складывая полученные результаты и переходя к пределу при стремлении g к дельта-функции, сосредоточенной в нуле, придем (опуская довольно громоздкие выкладки) к неравенству

$$\theta_a^+\Big(D_a|u-v|+\sum_i D_i F_i(u,v)\Big)(\omega)\leqslant 0,$$

из которого ввиду произвольности ω следует (14). Теорема доказана.

Важность этой теоремы состоит в том, что она указывает явные условия принадлежности решения классу корректности. Читатель без труда убедится в том, что, например, в одномерном случае оно дает следующее условие (условие Олейник) на линии разрыва $x=\psi(t)$:

$$(24)\qquad \frac{\varphi(u)-\varphi(u^+)}{u-u^+}\leqslant s\leqslant\frac{\varphi(u)-\varphi(u^-)}{u-u^-}$$
$$(\min(u^-,u^+)\leqslant u\leqslant\max(u^-,u^+)),$$

где $s=\psi'(t)=(u^+-u^-)^{-1}\big(\varphi(u^+)-\varphi(u^-)\big)$ — скорость точки разрыва.

2.2. Сохранение модуля непрерывности в классе корректности. Решения ограниченной вариации. Теоремы 1 и 2 показывают, что зависимость $u\in U_a^+$ от $u(a)$ имеет локальный характер: значения $u(t)$ в компакте $K\subset R^n$ определяются лишь значениями $u(a)$ в компакте $K_t\subset R^n$. Поэтому при исследовании свойств функций из U_a^+ достаточно ограничиться случаем $u(a)\in L_1(R^n)$, что влечет за собой $u(t)\in L_1(R^n)$ при всех $t\geqslant a$. Оценка (16) в этом случае принимает вид:

$$(25)\qquad \|u(t)-v(t)\|\leqslant\|u(a)-v(a)\|,$$

где $\|\cdot\|=\|\cdot\|_{L_1(R^n)}$.

Обозначим для $u\in L_1(R^n)$

$$\lambda_i(\varepsilon;u)=\sup_{|\delta|\leqslant\varepsilon}\int|u(x+\delta e_i)-u(x)|\,dx$$

(e_i — i-й координатный вектор канонического базиса R^n). Кроме того, положим

$$\lambda(\varepsilon;u)=\sum_i\lambda_i(\varepsilon;u).$$

Теорема 5. *Если $u\in U_a^+$, то для всех $t\geqslant a$*

$$(26)\qquad \lambda_i(\varepsilon;u(t))\leqslant\lambda_i(\varepsilon;u(a))\qquad(\forall\varepsilon,\ i=1,2,\dots,n).$$

Доказательство (см. [8]). Обозначим $\tilde u$ функцию, определяемую функцией $u\in U_a^+$ следующим образом: $\tilde u(t,x)=u(t,\ x+\varepsilon e_i)$. В силу инвариантности неравенства (21) относительно сдвига, $\tilde u$ удовлетворяет ему вместе с u. Поэтому $\tilde u\in U_a^+$, так что (25) дает $\|u(t)-\tilde u(t)\|\leqslant\|u(a)-\tilde u(a)\|$, что равносильно (26). Теорема доказана.

Опишем один важный класс решений задачи Коши — решения, обладающие ограниченной вариацией (по Тонелли-Чезари, см., например, [12], [13]). *Вариацией функции $v\in L_1^{\mathrm{loc}}(R^n)$ по переменному x_i* (i-й вариацией) называется величина

$$(27)\qquad \operatorname{var}_i v=\inf_{z\sim v}\int_{R^{n-1}}\operatorname*{var}_{x_i\in R} z(x_i,x')\,dx'$$
$$(x'=(x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_n))$$

(infimum берется по всем функциям, эквивалентным функции v). *Вариацией* или *полной вариацией*, называется

$$\operatorname{var} v=\sum_{i=1}^n\operatorname{var}_i v.$$

В терминах теории распределений эквивалентным является следующее определение: функция $v\in L_1^{\mathrm{loc}}(R^n)$ называется *функцией ограниченной вариации* по переменному x_i, если распределение $D_i v$ удовлетворяет на пространстве непрерывно дифференцируемых функций, финитных в R^n, оценке

$$(28)\qquad |D_i v(\omega)|=|v(D_i\omega)|\leqslant c_i\sup_{R^n}|\omega|\qquad(\forall\omega\in\mathring{C}_1(R^n)).$$

При этом нижняя грань чисел c_i, для которых оценка (28) имеет место, и есть $\operatorname{var}_i v$. Заметим, что распределения, удовлетворяющие оценке вида (28) называется распределениями *типа меры*.

Если v имеет конечную вариацию $\operatorname{var}_i v$ в смысле определения (27), то для любого $\varepsilon>0$ существует $z\sim v$, для которой

$$\int\operatorname*{var}_{x_i} z(x_i,x')\,dx'\leqslant\varepsilon+\operatorname{var}_i v,$$

а потому $\operatorname*{var}_{x_i} z(x_i,x')$ конечна почти для всех $x'\in R^{n-1}$. Следовательно, согласно теории интеграла Стилтьеса,

$$\left|\int D_i z(x_i,x')\,\omega(x_i,x')\,dx_i\right| \leqslant \operatorname*{var}_{x_i} z(x_i,x')\cdot\sup_{x_i}|\omega(x_i,x')|,$$

откуда следует (28) с $c_i = \mathrm{var}_i v$. Пусть, обратно, выполнено (28). Выберем

$$\omega(x_i,x') = f(x_i)g(x'),\quad f\in \mathring{C}_1(R),\quad g\in\mathring{C}_1(R^{n-1}).$$

Тогда

$$\left|\int g(y)\,dy\int v(x_i,y)f'(x_i)\,dx_i\right| \leqslant c_i\sup|f|\cdot\sup|g|,$$

т.е.

$$\int dy\left|\int v(x_i,y)f'(x_i)\,dx_i\right| \leqslant c_i\sup|f|. \tag{29}$$

Следовательно, для почти всех $y\in R^{n-1}$

$$\frac{1}{\sup|f|}\left|\int v(x_i,y)f'(x_i)\,dx_i\right| < \infty$$

а потому, по теореме Ф. Рисса о линейном функционале на пространстве непрерывных функций, для некоторой эквивалентной v функции z

$$\frac{1}{\sup|f|}\left|\int v(x_i,y)f'(x_i)\,dx\right| \leqslant \operatorname*{var}_{x_i} z(x_i,y),$$

и из (29) получаем:

$$\int \operatorname*{var}_{x_i} z(x_i,y)\,dy \leqslant c_i.$$

Таким образом, эквивалентность приведенных определений установлена.

В следующей лемме устанавливается простая связь между модулем непрерывности λ_i функции v и ее i-й вариацией. Эта лемма показывает, что функции, имеющие ограниченную i-ю вариацию, суть не что иное, как функции, удовлетворяющие относительно переменного x_i условию Липшица в среднем. Я привожу здесь доказательство этого утверждения, потому что мне не приходилось встречать его в литературе (хотя оно несомненно известно).

Лемма 2. *Функция $v\in L_1^{\mathrm{loc}}(R^n)$ в том и только в том случае имеет конечную вариацию $\mathrm{var}_i v$, если $\lambda_i(\varepsilon;v)\leqslant c_i\varepsilon$. При этом*

$$\frac{\lambda_i(\varepsilon;v)}{\varepsilon} \leqslant \mathrm{var}_i v \leqslant \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\lambda_i(\varepsilon;v)}{\varepsilon}. \tag{30}$$

Кроме того, если v_ε — средняя функция с неотрицательным ядром, то имеют место оценки

$$\mathrm{var}_i v_\varepsilon \leqslant d_i\frac{\lambda_i(\varepsilon;v)}{\varepsilon};\qquad \mathrm{var}_i v_\varepsilon \leqslant \mathrm{var}_i v, \tag{31}$$

где d_i зависит только от ядра усреднения.

Доказательство. Пусть $\mathrm{var}_i v<\infty$, т.е.

$$|D_i v(\omega)| \leqslant c_i\sup|\omega|,\quad c_i=\mathrm{var}_i v,\quad \omega\in\mathring{C}_1(R^n).$$

Так как тогда

$$\int\left|\omega(x)\,(v(x+\varepsilon e_i)-v(x))\,dx\right| = \left|\int_0^\varepsilon dt\int D_i\,\omega(x+te_i)v(x)\,dx\right| \leqslant c_i|\varepsilon|\sup|\omega|, \tag{32}$$

то

$$\int|v(x+\varepsilon e_i)-v(x)|\,dx \leqslant c_i|\varepsilon|, \tag{33}$$

что доказывает первое из неравенств (30). Если $v_h=\Omega_h * v$ — средняя функция, $\Omega_h(x)=h^{-n}\Omega(x/h)$, $\Omega\geqslant 0$, то, очевидно,

$$|D_i v_h(\omega)| \leqslant c_i\sup|\omega|\int\Omega_h(x)\,dx = c_i\sup|\omega|,$$

откуда вытекает второе из неравенств (31).

Пусть теперь $\lambda_i(\varepsilon;v)\leqslant c_i\varepsilon$. Рассмотрим опять среднюю функцию v_h. Так как, очевидно,

$$\|D_i v_h\| \leqslant \frac{\lambda_i(h;v)}{h}\int_{R^n}|D_i\,\Omega(x)|\,dx = d_i\frac{\lambda_i(h,v)}{h}, \tag{34}$$

то первое из неравенств (31) доказано. Кроме того, из (34) имеем:

$$|D_i v(\omega)| \leqslant |D_i v_h(\omega)| + |(v_h-v)\,(D_i\omega)| \leqslant$$
$$\leqslant d_i\frac{\lambda_i(h;v)}{h}\sup|\omega| + \|v_h-v\|_{L_1(K)}\sup|D_i\omega|,$$

где компакт $K\supset\mathrm{supp}\,\omega$. Так как $v_h\to v$ при $h\to 0$ в $L_1(K)$, то отсюда ввиду произвольности Ω получаем второе неравенство (30). Лемма доказана.

Следствие. *Если $u\in U_a^+$, то для всех $t\geqslant a$*

$$\mathrm{var}_i u(t) \leqslant \mathrm{var}_i u(a). \tag{35}$$

Действительно, так как, согласно (30), $\mathrm{var}_i u = \lim\dfrac{\lambda_i(\varepsilon;u)}{\varepsilon}$, то (35) следует из теоремы 5.

Теорема 6. *Если $u\in U_a^+$, то при всех $t\geqslant a$ и $\Delta t\geqslant 0$*

$$\|u(t+\Delta t)-u(t)\| \leqslant \nu(\Delta t;u(a)), \tag{36}$$

где

$$\nu(\varepsilon;u) = \inf_{\delta>0}\{2\lambda(\delta;u(a)) + B\varepsilon\delta^{-1}\lambda(\delta;u(a))\},$$

$$B=\max_i B_i,\qquad B_i=\max_{|u|\leqslant A}|\varphi_i'(u)|,\qquad A=\sup_x|u(a,x)|.$$

Замечание. В случае $\mathrm{var}\,u(a)=V<\infty$

$$\nu(\Delta t;u(a)) = VB\Delta t.$$

В общем случае

$$\nu(\Delta t;u(a)) \leqslant \mathrm{const}\cdot\lambda(\Delta t;u(a)).$$

Доказательство. Если $\operatorname{var} u(a) = V < \infty$, неравенство (36) легко получается интегрированием уравнения (13) сначала по t, а затем по x. Пусть $\operatorname{var} u(a) = \infty$, $u_\varepsilon(a)$ — средняя функция. Пусть $u_\varepsilon(t)$ — соответствующий элемент U_a^+ (он существует в силу теоремы 7, которая доказывается ниже). Тогда, по доказанному выше,

$$\operatorname{var} u_\varepsilon(t) \leqslant \operatorname{var} u_\varepsilon(a) \leqslant d\varepsilon^{-1}\lambda(\varepsilon; u(a))$$

($d = \max_i d_i$), так что, используя оценку (25), имеем:

$$\|u(t+\Delta t) - u(t)\| \leqslant 2\|u_\varepsilon(a) - u(a)\| + B\,\Delta t \operatorname{var} u_\varepsilon(a) \leqslant$$
$$\leqslant 2\lambda(\varepsilon; u(a)) + Bd\,\Delta t\,\varepsilon^{-1}\lambda(\varepsilon; u(a)).$$

Так как d здесь можно положить равным 1 (см. явное выражение для d_i, полученное при доказательстве леммы 2), то оценка (36) доказана.

2.3. Существование решения задачи Коши в классе корректности.

Теорема 7. *Для любой ограниченной функции $\psi \in L_1(R^n)$ в классе корректности U_a^+ существует единственное решение уравнения* (13), *равное ψ при $t = a$.*

Замечание. В силу принципа максимума и оценки (25) отсюда легко следует также существование решения задачи Коши и в случае, когда ограниченная функция ψ принадлежит лишь $L_1^{\mathrm{loc}}(R^n)$.

Доказательство (см. [8], [19]). Обозначим S_i полосу $\{t_i \leqslant t < t_{i+1}\} \times R^n$, где $t_i = i\tau + a$, $i = 0, 1, 2, \ldots$ Пусть $u \in L_1(R^n)$ и удовлетворяет условиям: $|u(x)| \leqslant A$, u непрерывно дифференцируема и $|D_i u(x)| \leqslant d_i\varepsilon^{-1}A$, где d_i и ε — некоторые положительные числа. Выберем τ столь малым, чтобы в $\bar S_i$ существовало непрерывно дифференцируемое решение задачи Коши для уравнения (13) с начальным условием

$$u(t_i, x) = u(x).$$

При фиксированных d_i и A $\tau = O(\varepsilon)$. Пусть $\psi^i \in L_1(R^n)$, $\sup|\psi^i| \leqslant A$, а $\psi_\varepsilon^i = \Omega_\varepsilon * \psi^i$ — средняя функция с неотрицательным ядром Ω. Тогда $\sup|\psi_\varepsilon^i| \leqslant A$, ψ_ε^i непрерывно дифференцируема и

$$|D_j\psi_\varepsilon^i| \leqslant d_j\varepsilon^{-1}A, \quad \text{где} \quad d_j = \int |D_j\Omega(x)|\,dx.$$

Поэтому в полосе S_i существует непрерывно дифференцируемое решение $u^\varepsilon(t) \in L_1(R^n)$ уравнения (13), равное ψ_ε^i при $t = t_i$. В силу полученных выше результатов $\sup_x |u^\varepsilon(t, x)| \leqslant A$ при $t_i \leqslant t < t_{i+1}$. Определим теперь функции ψ^i рекуррентным образом, полагая $\psi^0 = \psi$,

$$\psi^i = u^\varepsilon(t_i - 0) \quad (i \geqslant 1). \tag{37}$$

Это определяет функцию u^ε во всем полупространстве $\mathfrak{A}_a^+$. Внутри каждой полосы u^ε является непрерывно дифференцируемым решением уравнения (13), а при $t = t_i$ эта функция разрывна. Поэтому при $t > a$

$$D_0 u^\varepsilon + \sum_{i=1}^n D_i\varphi_i(u^\varepsilon) = \sum_{j=1}^\infty \{\psi_\varepsilon^j - \psi^j\}\,\delta(t - t_j), \tag{38}$$

и для любого числа k

$$D_0|u^\varepsilon - k| + \sum_{i=1}^n D_i F_i(u^\varepsilon, k) = \sum_{j=1}^\infty \{|\psi_\varepsilon^j - k| - |\psi^j - k|\}\,\delta(t - t_j). \tag{39}$$

В силу (35) внутри каждой полосы S_i $\operatorname{var} u^\varepsilon(t) \leqslant \operatorname{var}\psi^j$, а в силу второго из неравенств (31) $\operatorname{var}\psi^j \leqslant \operatorname{var} u^\varepsilon(t_j - 0)$ $(j \geqslant 1)$. Поэтому при всех $t \geqslant a$

$$\operatorname{var} u^\varepsilon(t) \leqslant \operatorname{var}\psi.$$

Так как

$$|\psi_\varepsilon^j - k| - |\psi^j - k| \leqslant \int \Omega(y)\{|\psi^j(x - \varepsilon y) - k| - |\psi^j(x) - k|\}\,dy,$$

то для любой неотрицательной функции $\omega \in \mathring{C}_1(R^n)$

$$\int\{|\psi_\varepsilon^j - k| - |\psi^j - k|\}\,\omega\,dx \leqslant \iint \Omega(y)\,\{|\psi^j(x - \varepsilon y) - k| - |\psi^j(x) - k|\}\omega(x)\,dx\,dy.$$

Предположим дополнительно, что ядро Ω симметрично: $\Omega(y) = \Omega(-y)$. Тогда последнее неравенство можно записать в виде

$$\int\{|\psi_\varepsilon^j - k| - |\psi^j - k|\}\,\omega\,dx \leqslant$$
$$\leqslant \tfrac{1}{2}\iint \Omega(y)\{\omega(x + \varepsilon y) - \omega(x)\}\{|\psi^j(x) - k| - |\psi^j(x + \varepsilon y) - k|\}\,dx\,dy \leqslant$$
$$\leqslant \tfrac{1}{2}\iint \Omega(y)\,|\omega(x + \varepsilon y) - \omega(x)|\,|\psi^j(x + \varepsilon y) - \psi^j(x)|\,dx\,dy$$

или

$$\int\{|\psi_\varepsilon^j - k| - |\psi^j - k|\}\,\omega\,dx \leqslant d'\|\omega\|_{c_1}\lambda(\varepsilon; \psi^j)\,\varepsilon, \tag{40}$$

где

$$d' = \tfrac{1}{2}\sum_i \int |y_i|\,\Omega(y)\,dy, \qquad \|\omega\|_{c_1} = \max_i \sup_x |D_i\omega(x)|.$$

Поэтому из (39) получаем:

$$\theta_a^+\Big\{D_0|u^\varepsilon - k| + \sum_{i=1}^n D_i F_i(u^\varepsilon, k)\Big\}(\omega) \leqslant d' N_\varepsilon(\omega)\,\|\omega\|_{c_1}\lambda(\varepsilon; \psi)\,\varepsilon,$$

где $N_\varepsilon(\omega)$ — число слоев $t = t_j$, попадающих в носитель функции ω. Т.к. $\tau = O(\varepsilon)$, то $N_\varepsilon\varepsilon$ ограничено равномерно по ε, так что

$$\varlimsup_{\varepsilon \to 0} \theta_a^+\Big\{D_0|u^\varepsilon - k| + \sum_i D_i F_i(u^\varepsilon, k)\Big\}(\omega) \leqslant 0. \tag{41}$$

Обратимся к соотношению (38). Аналогично (36) интегрированием этого соотношения получаем:

$$\|u^\varepsilon(t + \Delta t) - u^\varepsilon(t)\| \leqslant B\,\Delta t \operatorname{var}\psi + \sum_{t < t_j \leqslant t + \Delta t} \|\psi_\varepsilon^j - \psi^j\| \leqslant$$
$$\leqslant B\,\Delta t \operatorname{var}\psi + \lambda(\varepsilon; \psi)\,N_\varepsilon(\Delta t),$$

где $N_\varepsilon(\Delta t)$ число t_j, удовлетворяющих неравенству

$$t < t_j \leqslant t+\Delta t, \quad N_\varepsilon(\Delta t) \leqslant c'(1+\varepsilon^{-1}\Delta t).$$

Итак,

$$\|u^\varepsilon(t+\Delta t)-u^\varepsilon(t)\| \leqslant c(\varepsilon+\Delta t)\operatorname{var}\psi. \tag{42}$$

Пусть $\operatorname{var}\psi = V < \infty$. Тогда $\operatorname{var}u^\varepsilon(t) \leqslant V$ при всех $t \geqslant a$, а потому, по известным теоремам, при каждом фиксированном t семейство $\{u^\varepsilon(t)\}_{\varepsilon>0}$ относительно компактно в $L_1(R^n)$, следовательно содержит сходящуюся последовательность, которая, однако, зависит от t. Выбирая счетное всюду плотное в $\{t \geqslant a\}$ множество $Q = \{t^\alpha\}_{\alpha=1,2,\ldots}$ (например, множество рациональных точек), с помощью диагонального процесса выделим последовательность $\{u^{\varepsilon_l}\}$, сходящуюся всюду на Q:

$$\|u^{\varepsilon_l}(t)-u(t)\| \underset{\varepsilon_l\to 0}{\to} 0 \quad (\forall t\in Q).$$

Так как, в силу (42), $\forall t', t'' \in Q$

$$\|u^\varepsilon(t')-u^\varepsilon(t'')\| \leqslant c(\varepsilon+|t'-t''|)V,$$

то

$$\|u(t')-u(t'')\| \leqslant c|t'-t''|V. \tag{43}$$

Поэтому, полагая для любого t $u(t) = \lim\limits_{Q\ni t'\to t} u(t')$ (limes в $L_1(R^n)$), получаем функцию u, удовлетворяющую для любых t', t'' неравенству (43), т.е. принадлежащую U. Так как, далее,

$$\|u^{\varepsilon_l}(t)-u(t)\| \leqslant \|u^{\varepsilon_l}(t')-u(t')\|+\|u(t)-u(t')\|+\|u^{\varepsilon_l}(t')-u^{\varepsilon_l}(t)\|,$$

где $t' \in Q$, то, согласно (42),

$$\varlimsup_{\varepsilon_l\to 0}\|u^{\varepsilon_l}(t)-u(t)\| \leqslant \|u(t)-u(t')\|+c|t'-t|V,$$

откуда, устремляя $t'\to t$, получаем, что

$$\|u^{\varepsilon_l}(t)-u(t)\| \underset{\varepsilon_l\to 0}{\to} 0 \quad (\forall t \geqslant a).$$

Переходя к пределу при $\varepsilon_l \to 0$ в неравенстве (41), получаем:

$$\theta_a^+\Big\{D_0|u-k|+\sum_i D_iF_i(u,k)\Big\} \leqslant 0, \tag{44}$$

т.е. $u \in U_a^+$. Так как, очевидно, $u(a) = \psi$, то теорема доказана при дополнительном условии ограниченности вариации ψ. Если это условие нарушено, то вновь рассмотрим среднюю функцию ψ_ε и обозначим u_ε элемент U_a^+, равный ψ_ε при $t = a$, существование которого мы доказали (ибо $\operatorname{var}\psi_\varepsilon < \infty$ при $\varepsilon > 0$). Тогда $u_\varepsilon(t) \to u(t)$ в $L_1(R^n)$ равномерно на множестве $\{t \geqslant a\}$ (см. (25)). При этом u^ε удовлетворяет для каждого ε неравенству (44), так что ему удовлетворяет и предельная функция u. Учтя, что $u(a) = \psi$, завершаем доказательство теоремы.

3. Устойчивые приближенные методы решения задачи Коши для скалярного квазилинейного уравнения

В этом параграфе мы докажем сходимость широкого класса приближенных методов решения задачи Коши и оценим скорость этой сходимости. Рассматриваемый здесь класс методов включает „метод вязкости”, ряд известных конечно-разностных методов и некоторые другие методы (например, описанный при доказательстве теоремы 7 „метод сглаживания” и так называемый метод распада разрывов). Эти результаты были получены совсем недавно [14], [15]. Часть результатов § 3 получена совместно с С. А. Волошиным [16]. Ранее были известны некоторые оценки скорости сходимости одного конечно-разностного метода для случая одномерного уравнения ($n = 1$) с выпуклой функцией φ_1 ([17], [18]).

3.1. Устойчивость и погрешность приближенного метода. Пространство U, введенное в § 2, недостаточно удобно для исследования приближенных решений. Мы расширим его, включив в него ограниченные на R^{n+1} функции u: $t \to u(t)$ со значениями в $L_1(R^n)$, которые, не будучи, вообще говоря, непрерывными по t, имеют, однако, в каждой точке $t \in R$ предельные значения $u(t-0)$ и $u(t+0)$. Эти функции будем считать непрерывными справа: $u(t+0) = u(t)$. Пространство функций указанного вида обозначаем $\tilde{U}$. Оно, очевидно, содержит U.

Обозначим $\mathscr{B}(A) = \{u|\ u \in L_1(R^n), |u(x)| \leqslant A\}$. Пусть $\mathscr{B}_\tau(A)$ — некоторое семейство подмножеств $\mathscr{B}(A)$ $(0 < \tau \leqslant \tau_0)$. Функцию S_τ, отображающую $\mathscr{B}_\tau(A)$ в $\tilde{U}$ назовем *методом* решения уравнения (13). S_τ есть отображение $t \to S_\tau(t)$, где $S(t)$ — отображение $u \to u_\tau(t) = S_\tau(t)u \in L_1(R^n)$, $u \in \mathscr{B}_\tau(A)$. Разрешающий оператор задачи Коши (в классе корректности) для уравнения (13) в полупространстве $\mathfrak{A}_a^+$ обозначим S_0: $t \to S_0(t)$ $(t \geqslant a)$.

Определение. Метод S_τ называется *устойчивым в полупространстве* $\mathfrak{A}_a^+$, если для всех $t \geqslant a$

$$S_\tau(t)u \in \mathscr{B}(A) \quad (\forall u \in \mathscr{B}_\tau(A)), \tag{45}$$

$$\|S_\tau(t)u-S_\tau(t)v\| \leqslant \|u-v\| \quad (\forall u, v \in \mathscr{B}_\tau(A)), \tag{46}$$

$$\lambda(\varepsilon; S_\tau(t)u) \leqslant \lambda(\varepsilon; u) \quad (\forall \varepsilon > 0,\ u \in \mathscr{B}_\tau(A)). \tag{47}$$

Замечание. Если метод S_τ, подобно S_0, однороден по пространственным переменным в том смысле, что он коммутирует с оператором сдвига D_i по каждой из этих переменных, то $D_iS_\tau(t)u = S_\tau(t)D_iu$, так что (47) вытекает из (46).

Определим понятие погрешности метода S_τ. Для любого $u \in \tilde{U}$ и любого числа k обозначим

$$h_{ab}^{u;k}(t,x) = \theta_{ab}(t)\Big\{D_0|u(t,x)-k|+\sum_i D_iF_i(u(t,x),k)\Big\}. \tag{48}$$

Эта функция (являющаяся, конечно, не обычной функцией, а распределением) определена для любого $b > a$, не совпадающего с точкой разрыва функции $u = u(t)$ (т.е. для всех b, удовлетворяющих условию $u(b) = u(b-0)$). Положим далее для $u, v \in \tilde{U}$

$$H_{ab}^{u;v}(t,x;t',x') = \theta_{ab}(t')\, h_{ab}^{u;v(t',x')}(t,x) + \theta_{ab}(t)\, h_{ab}^{v;u(t,x)}(t',x') = \tag{49}$$
$$= \theta_{ab}(t)\,\theta_{ab}(t')\Big\{(D_0+D_0')|u(t,x)-v(t',x')| + \sum_i (D_i+D_i')\,F_i\big(u(t,x), v(t',x')\big)\Big\},$$

где D_0' и D_i' — операторы дифференцирования по переменным t', x_i'.

Для наших целей распределение $H_{ab}^{u;v}$ достаточно рассматривать только на пробных функциях специального вида g: $(t,x,t',x') \to \omega(t-t')\,\Omega(x-x')$, где ω и Ω непрерывно дифференцируемы и финитны на пространствах R и R^n соответственно. Множество таких специальных пробных функций обозначим $\mathscr{M}$ и относительно функций из $\mathscr{M}$ будем дополнительно предполагать, что они симметричны: $g(t,x,t',x') = g(t',x',t,x)$. Подмножество неотрицательных функций из $\mathscr{M}$ обозначим $\mathscr{M}^+$.

Определение. Пусть $v(a) \in \mathscr{B}(A)$, $u(a) \in \mathscr{B}_\tau(A)$. *Погрешностью метода* S_τ *в полосе* $\mathfrak{A}_{ab}$, соответствующей элементам $v(a)$ и $u(a)$, называется форма $\mathscr{E}_{ab}^{u;v}$ на пространстве $\mathscr{M}^+$, определяемая соотношением

$$\mathscr{E}_{ab}^{u;v}(g) = \tfrac{1}{2}\{|H_{ab}^{u;v}(g)| + H_{ab}^{u;v}(g)\} \qquad (g \in \mathscr{M}^+), \tag{50}$$

где $u = S_\tau u(a)$, $v = S_0 v(a)$.

Можно, таким образом, сказать, что форма $\mathscr{E}_{ab}^{u;v}$ есть положительная часть формы $H_{ab}^{u;v}$. Отметим, что в случае, если уравнение решается точно, т.е. u является точным решением (13), принадлежащим классу корректности U_a^+, то $H_{ab}^{u;v} \leqslant 0$, так что $\mathscr{E}_{ab}^{u;v} = 0$. Обратно, если для каждого элемента $v(a)$ $\mathscr{E}_{ab}^{u;v} = 0$, то $H_{ab}^{u;v} \leqslant 0$, откуда следует, что $u \in U_a^+$. В самом деле, для непрерывно дифференцируемого решения v $h_{ab}^{v;u(t,x)}(t',x') = 0$, так что из (49) получаем:

$$h_{ab}^{u;k}(t,x) \leqslant 0 \qquad (\forall k),$$

т.е. $u \in U_a^+$ в полосе $\mathfrak{A}_{ab}$.

Важно заметить, что оценка погрешности метода сводится фактически к оценке сверху формы (48), так как в силу неравенства

$$h_{ab}^{v;u(t,x)}(t',x') \leqslant 0 \qquad (v \in U_a^+)$$

$$H_{ab}^{u;v}(t,x,t',x') \leqslant \theta_{ab}(t')\, h_{ab}^{u;v(t',x')}(t,x). \tag{51}$$

Пусть $g \in \mathscr{M}$, так что $g(t,x,t',x') = \omega(t-t')\,\Omega(x-x')$, $\omega \in \mathring{C}_1(R)$, $\Omega \in \mathring{C}_1(R^n)$. Обозначим

$$\varrho_g^{\pm}(t;u,v) = \int_0^\infty \omega(t')\,dt' \iint_{R^n\times R^n} \Omega(x-x')\{|u(t,x)-v(t\pm t',x')| + |v(t,x)-u(t\pm t',x')|\}\,dx\,dx'.$$

Так как для $g \in \mathscr{M}$ $(D_0+D_0')g = (D_i+D_i')g = 0$, то на $\mathscr{M}$ форма $H_{ab}^{u;v}$ равна

$$H_{ab}^{u;v} = -|u(t,x)-v(t',x')|(D_0+D_0')\,\theta_{ab}(t)\,\theta_{ab}(t') =$$
$$= -\theta_{ab}(t')\{|u(t,x)-v(t',x')| + |u(t',x')-v(t,x)|\}\big(\delta_a(t)-\delta_b(t)\big),$$

так что при $\operatorname{supp}\omega \subset [a-b, b-a]$

$$H_{ab}^{u;v}(g) = \varrho_g^-(b;u,v) - \varrho_g^+(a;u,v). \tag{52}$$

Предположим теперь, что функции ω и Ω неотрицательны и

$$\int_R \omega\,dt = \int_{R^n} \Omega\,dx = 1. \tag{53}$$

Тогда, очевидно,

$$\|u(t)-v(t)\| = \int_0^\infty \omega(t')\,dt' \iint_{R^n\times R^n} \Omega(x-x')\{|u(t,x)-v(t,x)| + |u(t,x')-v(t,x')|\}\,dx\,dx',$$

так что

$$|\varrho_g^+(t;u,v) - \|u(t)-v(t)\|| \leqslant$$
$$\leqslant 2\int_0^\infty \omega(t')\,dt' \iint \Omega(x-x')|v(t,x)-v(t,x')|\,dx\,dx' +$$
$$+ \int_0^\infty \omega(t')\,dt' \iint \Omega(x-x')|v(t,x)-v(t+t',x)|\,dx\,dx' +$$
$$+ \int_0^\infty \omega(t')\,dt' \iint \Omega(x-x')|u(t,x)-u(t+t',x)|\,dx\,dx' =$$
$$= \iint \Omega(x-x')|v(t,x)-v(t,x')|\,dx\,dx' +$$
$$+ \int_0^\infty \omega(t')\,\|v(t)-v(t+t')\|\,dt' + \int_0^\infty \omega(t')\,\|u(t)-u(t+t')\|\,dt'.$$

Аналогичная оценка имеет место и для $|\varrho_g^-(t;u,v) - \|u(t)-v(t)\||$. Поэтому, обозначая $2\varepsilon_0$ длину отрезка, содержащего $\operatorname{supp}\omega$, и 2ε — длину стороны куба в R^n, содержащего $\operatorname{supp}\Omega$, и полагая для $u \in \tilde{U}$

$$\lambda_0^{\pm}(\varepsilon;u) = \sup_{t\in R}\ \sup_{0<t'<\varepsilon} \|u(t\pm t') - u(t\pm 0)\|$$

и

$$\lambda_0(\varepsilon;u) = \max\big(\lambda_0^+(\varepsilon;u), \lambda_0^-(\varepsilon;u)\big),$$

получаем при всех $t \in [a,b]$

$$|\varrho_g^+(t;u,v) - \|u(t)-v(t)\|| \leqslant \lambda\big(\varepsilon; v(t)\big) + \frac{\lambda_0^+(\varepsilon_0;v) + \lambda_0^+(\varepsilon_0;u)}{2}$$

и

$$|\varrho_g^-(t;u,v) - \|u(t-0)-v(t-0)\|| \leqslant \lambda\big(\varepsilon; v(t-0)\big) + \frac{\lambda_0^-(\varepsilon_0,v) + \lambda_0^-(\varepsilon_0,u)}{2}.$$

Подставляя эти оценки в формулу (52), получаем:

$$\|u(b)-v(b)\| \leqslant \|u(a)-v(a)\| + \lambda(\varepsilon; v(b)) + \lambda(\varepsilon; v(a)) + \\ + \lambda_0(\varepsilon_0; v) + \lambda_0(\varepsilon_0; u) + H^{u,v}_{ab}(g).$$

Заметим теперь, что здесь можно освободиться от предположения непрерывности в точках a, b функций $u(t)$ и $v(t)$. Для этого достаточно заметить, что распределение $H^{u,v}_{ab}$ не зависит от значений функций u и v при $t>b$ и $t<a$, а потому совпадает с $H^{u',v'}_{ab}$, где $u'(t)=u(t)$ при $a\leqslant t<b$, $u'(t)=u(b-0)$ при $t\geqslant b$ и $u'(t)=u(a)$ при $t\leqslant a$, и функция v' определена аналогично. Поскольку u' и v' непрерывны в точках a, b, то $H^{u',v'}_{ab}$ имеет смысл, так что в случае разрывности u, v в точках a, b равенство

$$H^{u,v}_{ab} = H^{u',v'}_{ab}$$

можно считать определением $H^{u,v}_{ab}$ в этом случае. Применяя поэтому полученное неравенство к функциям u' и v', приходим окончательно к следующему результату.

Лемма 3. *Пусть $g\in\mathscr{M}^+$, так что*

$$g(t,x,t',x') = g(t',x',t,x) = \omega(t-t')\,\Omega(x-x'),$$

и пусть функции ω и Ω неотрицательны и удовлетворяют условию (53). *Пусть, далее,*

$$\operatorname{supp}\omega \subset [-\varepsilon_0, \varepsilon_0], \qquad \operatorname{supp}\Omega \subset [-\varepsilon, \varepsilon]^n.$$

Тогда для любых элементов $u, v\in\tilde U$ и любых a, b, удовлетворяющих условию $b-a>\varepsilon_0$, имеет место оценка:

(54) $$\|u(b-0)-v(b-0)\| \leqslant \\ \leqslant \|u(a)-v(a)\| + \lambda(\varepsilon; v(b-0)) + \lambda(\varepsilon; v(a)) + \lambda_0(\varepsilon_0; u) + \lambda_0(\varepsilon_0; v) + \\ + H^{u,v}_{ab}(g).$$

Следствие. *Пусть $v\in U^+_a$ — точное решение уравнения* (13), *а $u=S_\tau u(a)$, где S_τ — некоторый метод решения этого уравнения. Тогда для любой функции $g\in\mathscr{M}^+$, удовлетворяющей условиям леммы* 3, *и любого $b>a+\varepsilon_0$*

(55) $$\|u(b-0)-v(b-0)\| \leqslant \\ \leqslant \|u(a)-v(a)\| + 2\lambda(\varepsilon; v(a)) + \nu(\varepsilon_0; v(a)) + \lambda_0(\varepsilon_0; u) + \mathscr{E}^{u,v}_{ab}(g)$$

(это неравенство получается из (54) с помощью оценок (26), (36) и определения $\mathscr{E}^{u,v}_{ab}$; функция ν введена в (36)).

Оценка (55) выражает погрешность (в $L_1(R^n)$) приближенного решения в момент времени $t=b$ через погрешность задания начальных данных $\|u(a)-v(a)\|$, погрешность метода $\mathscr{E}^{u,v}_{ab}$ в полосе $\mathfrak{A}_{ab}$, а также функцию λ_0, связанную с характером устойчивости метода S_τ.

3.2. Общие теоремы о сходимости приближенных методов. Методы вязкости и сглаживания.

Теорема 8. *Пусть погрешность метода S_τ в любой полосе $\mathfrak{A}_{0t}$ допускает на точном решении $v\in U^+_0$ оценку*

(56) $$\mathscr{E}^{u,v}_{0t}(g) \leqslant \tau t \sum_{i=1}^{n} C_i \|D_i\Omega\| \sup_{0\leqslant t'\leqslant t} \operatorname{var} u(t') \qquad (g=\omega\Omega\in\mathscr{M}^+)$$

где $u=S_\tau u(a)$, C_i — постоянные, зависящие только от $\sup\limits_{\mathfrak{A}_{0t}}|u|$ и $\sup\limits_{R^n}|v(0,x)|$, и пусть метод S_τ устойчив. Тогда для всех $t>0$

(57) $$\|u(t)-v(t)\| \leqslant \|u(0)-v(0)\| + \mu(\tau t),$$

где

$$\mu(\varepsilon) = \inf_{\delta>0}\left\{2\lambda(\delta; v(0)) + \frac{C\varepsilon}{\delta}\operatorname{var} u(0)\right\} \qquad \Bigl(C=\sum_i C_i\Bigr).$$

Доказательство. В силу независимости оценки (56) от ε_0 в неравенстве (55) можно положить $\varepsilon_0=0$. Учитывая, кроме того, устойчивость метода S_τ, в силу которой

$$\sup_{\mathfrak{A}_{0t}}|u| \leqslant \sup|u(0,x)| = A \quad \text{и} \quad \operatorname{var} u(t) \leqslant \operatorname{var} u(0) = V,$$

получаем:

$$\|u(t)-v(t)\| \leqslant \|u(0)-v(0)\| + 2\lambda(\varepsilon; v(0)) + \tau t C V \max_i \|D_i\Omega\|,$$

где, напомним, 2ε — длина стороны куба, содержащего носитель Ω.

Выберем в качестве функции Ω функцию

$$\Omega(x) = \Omega(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \varepsilon^{-n} f\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right) f\left(\frac{x_2}{\varepsilon}\right) \ldots f\left(\frac{x_n}{\varepsilon}\right),$$

где $f(t)$ сосредоточена на отрезке $[-1,1]$, неотрицательна и при $t>0$ монотонно убывает. Кроме того, в силу (53), она должна удовлетворять условию $\int f(t)\,dt=1$. Так как при таком выборе функции Ω

$$\|D_i\Omega\| = \frac{2f(0)}{\varepsilon},$$

то

$$\|u(t)-v(t)\| \leqslant \|u(0)-v(0)\| + 2\lambda(\varepsilon; v(0)) + \frac{2\tau t C V}{\varepsilon} f(0).$$

Здесь, очевидно, можно положить $2f(0)=1$, после чего (57) получается минимизацией правой части по ε. Теорема доказана.

Замечание 1. В случае $\operatorname{var} v(0) = V_0 < \infty$ оценка (57) дает

(58) $$\|u(t)-v(t)\| \leqslant (8VV_0Ct\tau)^{1/2} + \|u(0)-v(0)\|.$$

Замечание 2. При выполнении условий теоремы легко можно получить оценку погрешности и без предположения конечности V_0.

Теорему 8 можно применить для оценки точности метода вязкости, так называемого метода распада разрывов, которого мы здесь касаться не будем (см. [15]), а также описанного при доказательстве теоремы 7 метода сглаживания (см. также [8] и [19]). Ограничимся здесь рассмотрением только метода вязкости.

Пусть S_τ: $t \to S_\tau(t)$ $(t>0)$ есть оператор решения задачи Коши

$$D_0 u + \sum_{i=1}^{n} D_i \varphi_i(u) = \tau \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} D_i D_j u, \quad u(0,x) = \psi_\tau(x), \tag{59}$$

где $\tau>0$ — малый параметр (вязкость), постоянная матрица (a_{ij}) симметрична и положительна. Для любой функции $\psi \in \mathscr{B}(A)$ во всем полупространстве $\mathfrak{A}_0^+$ существует единственное гладкое решение этой задачи, причем, как легко доказывается (см., например, [20]), при всех $t \geqslant 0$ $u(t) \in \mathscr{B}(A)$ и

$$\|u'(t)-u''(t)\| \leqslant \|\psi'_\tau - \psi''_\tau\| \quad (\forall \psi'_\tau, \psi''_\tau \in \mathscr{B}(A)).$$

Отсюда, в частности, в силу инвариантности уравнения (59) относительно сдвига следует, как и для уравнения (13), что $\lambda_i(\varepsilon; u(t)) \leqslant \lambda_i(\varepsilon; \psi)$. Таким образом, метод S_τ устойчив в $\mathfrak{A}_0^+$.

Для любой дважды гладкой выпуклой книзу функции $f=f(u)$, полагая

$$\Phi_i(u) = \int f'(u)\varphi'_i(u)\,du,$$

имеем при $t>0$:

$$D_0 f + \sum_i D_i \Phi_i = \tau \sum_{i,j} a_{ij} D_i D_j f - \tau f'' \sum_{i,j} a_{ij} D_i u \cdot D_j u \leqslant$$

$$\leqslant \tau \sum_{i,j} a_{ij} D_i D_j f,$$

откуда (при $f(u)=|u-k|$) следует, что для любого числа k распределение

$$h_{0b}^{u,k}(t,x) = \theta_{0b}(t)\left\{D_0|u(t,x)-k| + \sum_i D_i F_i(u,k)\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \theta_{0b}(t)\,\tau \sum_{i,j} a_{ij} D_i D_j |u-k|.$$

Поэтому для любого решения $v \in U_a^+$ уравнения (13)

$$H_{0b}^{u,v}(t,x,t',x') \leqslant \theta_{0b}(t')\, h_{0b}^{u,v(t',x')}(t,x) \leqslant$$

$$\leqslant \tau\theta_{0b}(t)\theta_{0b}(t') \sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial^2 |u(t,x)-v(t',x')|}{\partial x_i \partial x_j},$$

т.е.

$$H_{0b}^{u,v}(g) \leqslant \tau \int_0^b\int_0^b \omega(t-t')\,dt\,dt' \iint \sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial \Omega(x-x')}{\partial x'_i} \frac{\partial |u(t,x)-v(t',x')|}{\partial x_j}\,dx\,dx'.$$

Так как

$$\left|\frac{\partial |u(t,x)-k|}{\partial x_i}\right| \leqslant \left|\frac{\partial u(t,x)}{\partial x_i}\right|,$$

то

$$H_{0b}^{u,v}(g) \leqslant \tau \int_0^b\int_0^b \omega(t-t')\,dt\,dt' \iint \sum_{i,j} |a_{ij}| \left|\frac{\partial \Omega(x')}{\partial x'_i}\right| \left|\frac{\partial u(t,x)}{\partial x_j}\right| dx\,dx' \leqslant$$

$$\leqslant \tfrac{1}{2}\tau b \sup_{0\leqslant t\leqslant b} \operatorname{var} u(t) \cdot \sum_i C_i \|D_i \Omega\|,$$

где $C_i = \max_j |a_{ij}|$.

Итак, погрешность метода вязкости удовлетворяет оценке (56), а потому точность этого метода дается оценкой (57). В частности, для решения v с ограниченной вариацией V_0, согласно (58), имеем:

$$\|u(t)-v(t)\| \leqslant \|\psi_\tau - v(0)\| + 2(V_0 V C t\tau)^{1/2}.$$

В случае $v(0)=\psi_\tau$ эта оценка принимает вид:

$$\|u(t)-v(t)\| \leqslant 2 \operatorname{var} v(0)\sqrt{Ct\tau}.$$

Отметим, что аналогичным образом выглядит и оценка методов сглаживания и распада разрыва.

Перейдем теперь к более общему случаю, когда оценка погрешности $\mathscr{E}_{ab}^{u,v}(g)$ зависит не только от пространственных производных функции g, как в теореме 8, но содержит также и норму производной $D_0 g$.

Теорема 9. *Пусть погрешность метода S_τ в любой полосе $\mathfrak{A}_{0t}$ допускает на точном решении $v \in U_a^+$ оценку*

$$\mathscr{E}_{0t}^{u,v}(g) \leqslant \tau t\left(C_0\|D_0\omega\| + \sum_{i=1}^{n} C_i \|D_i \Omega\|\right) \sup_{0\leqslant t'\leqslant t} \operatorname{var} u(t') \tag{60}$$

$$(g = \omega\Omega \in \mathscr{M}^+)$$

где $u = S_\tau u(0)$, C_0, C_i — постоянные, зависящие только от $\sup_{\mathfrak{A}_{0t}} |u|$ и $\sup_{R^n} |v(0)|$. Пусть, далее, метод S_τ устойчив в полосе $\mathfrak{A}_{0t}$ и, кроме того, удовлетворяет в этой полосе дополнительному условию

$$\lambda_0(\varepsilon; u) \leqslant a(\varepsilon+\tau) \sup_{0\leqslant t'\leqslant t} \operatorname{var} u(t'), \tag{61}$$

где a — постоянная, зависящая только от $\sup_{\mathfrak{A}_{0t}} |u|$. Тогда для всех $t>0$

$$\|u(t)-v(t)\| \leqslant \|u(0)-v(0)\| + a\tau V_\tau + (b\tau t)^{1/2}, \tag{62}$$

где $b = 4aC_0V_\tau^2 + 4V_0V_\tau(BC_0 + 2\sum_i C_i)$, $V_\tau = \operatorname{var} u(0)$, $V_0 = \operatorname{var} v(0)$, постоянная B введена в неравенстве (36).

Замечание. Я не привожу здесь оценку в случаях, когда V_τ и V_0 бесконечны. Она легко получается из оценки (62), но довольно громоздка.

Доказательство. В силу условия (60) в точности так же, как при доказательстве предыдущей теоремы, получается следующая оценка для $\mathscr{E}_{0t}^{u,v}$, явно выраженная через размеры ε_0 и ε носителей ω и Ω:

$$\mathscr{E}^{u,v}_{0t}(g) \leqslant \tau t\left(\frac{C_0}{\varepsilon_0}+\frac{\sum\limits_i C_i}{\varepsilon}\right)V_\tau .$$

Учитывая неравенство (36) для функции $v \in U_0^+$ и неравенство (61) для u, получаем из (55):

$$\|u(t)-v(t)\| \leqslant \|u(0)-v(0)\|+a\tau V_\tau+$$
$$+\left(2\varepsilon V_0+\tau t V_\tau \varepsilon^{-1}\sum_i C_i\right)+(BV_0+aV_\tau)\varepsilon_0+\frac{\tau t C_0}{\varepsilon_0}V_\tau .$$

Минимизируя это неравенство по ε_0 и ε, получаем (62). Теорема доказана.

С помощью этой теоремы в следующем пункте будет исследована сходимость конечно-разностных приближенных методов.

3.3. Конечно-разностные методы. Мы докажем здесь сходимость так называемых *монотонных* конечно-разностных аппроксимаций уравнения (13). Чтобы упростить записи, ограничимся одномерным случаем, рассматривая, таким образом, уравнение

(63) $$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial \varphi(u)}{\partial x}=0 .$$

На многомерный случай все рассмотрения переносятся, по существу, автоматически.

Пусть на прямой R введено разбиение на отрезки

$$\Pi_i=\{x|\ x_i-h/2 \leqslant x < x_i+h/2\} \quad (x_i=ih,\ i \text{ целое},\ h>0),$$

порожденное сеткой $\mathfrak{G}_h=\{x_i\}$. Сетку $\mathfrak{G}_h$ будем отождествлять с разбиением $\{\Pi_i\}$, полагая для сеточной функции $u=\{u_i\}$ $(u_i=u(x_i),\ x_i \in \mathfrak{G}_h)$:

$$u(x)=u_i \quad (x \in \Pi_i).$$

Наряду с $\mathfrak{G}_h$ рассмотрим сетку $\mathfrak{G}=\{(t,x)|\ t=t^n=n\tau, x\in\mathfrak{G}_h\}$, где $n=0,1,2,\dots$, в полуплоскости $\mathfrak{A}_0^+$. Ее мы также будем отождествлять с разбиением $\mathfrak{A}_0^+$ на прямоугольники $P_i^n=\{t^n \leqslant t < t^{n+1}, x \in \Pi_i\}$, полагая для любой сеточной функции $u=\{u_i^n\}$ $(u_i^n=u(t^n,x_i))$:

$$u(t,x)=u_i^n \quad ((t,x)\in P_i^n).$$

Шаги сетки $\mathfrak{G}$ будем предполагать связанными соотношениями

$$\sigma=\tau/h .$$

Пусть u — сеточная функция на сетке $\mathfrak{G}_h$. Обозначим $\vec{u}$ векторную сеточную функцию, определяемую следующим образом:

$$\vec{u}_i=(u_{i-l},\dots,u_{i-1},u_i,u_{i+1},\dots,u_{i+l})$$

где l — некоторое натуральное число, и рассмотрим оператор Q в пространстве сеточных функций, действующий по формуле:

(64) $$Q\colon u \to Q(u), \quad (Q(u))_i=f(\vec{u}_i),$$

где f — функция на R^{2l+1}. Относительно этой функции предположим, что она дважды непрерывно дифференцируема на R^{2l+1} и удовлетворяет для любого числа k условию

(65) $$f(k)=k,$$

где $f(k)$ обозначено значение $f(\vec{u})$ на векторе $\vec{u}$, все координаты которого равны k. Обозначим еще f_s $(s=0,\pm1,\pm2,\dots)$ производные функции f, определяемые соотношениями:

(66) $$f_s(\vec{u}_0)=\frac{\partial f(\vec{u}_0)}{\partial u_s} \quad (\forall \vec{u}_0).$$

Рассмотрим на сетке $\mathfrak{G}$ явную конечно-разностную схему

(67) $$u^{n+1}=Q(u^n),$$

или — в более подробной записи —

(68) $$u_i^{n+1}=f(\vec{u}_i^n)=f(u_{i-l}^n,\dots,u_i^n,\dots,u_{i+l}^n).$$

Определение. Разностную схему (68) назовем *монотонной на множестве $\mathscr{B}$ сеточных функций*, если для любой сеточной функции $u\in\mathscr{B}$ и всех $s=0,\pm1,\pm2,\dots$

(69) $$f_s(\vec{u}_i)\geqslant 0 .$$

Монотонную схему назовем *устойчивой на множестве $\mathscr{B}$*, если для любой сеточной функции $u \in \mathscr{B}\cap l_1$ и всех $s=0,\pm1,\pm2,\dots$

(70) $$\sum_{i=-\infty}^{\infty} f_{s-i}(\vec{u}_i)\leqslant 1 .$$

Лемма 3 (принцип максимума). *Пусть схема* (68) *монотонна на* $\mathscr{B}_A=\{u|\ |u_i|\leqslant A\}$. *Тогда для любого* $u^n\in\mathscr{B}_A$

$$\inf_j u_j^n \leqslant u_j^{n+1} \leqslant \sup_j u_j^n .$$

Доказательство. Обозначим

(71) $$f_s(\vec{u},\vec{v})=\int_0^1 f_s(\alpha\vec{u}+(1-\alpha)\vec{v})\,d\alpha .$$

Полагая $m=\inf\limits_j u_j^n$, имеем в силу условий (65) и (69):

$$u_i^{n+1}-m=f(\vec{u}_j^n)-f(m)=\sum_s f_s(\vec{u}_i^n,m)\,(u_{i+s}^n-m)\geqslant 0,$$

и лемма доказана.

Лемма 4. *Если схема* (68) *устойчива на* $\mathscr{B}_A$, *то для любых* $u^0,v^0\in\mathscr{B}_A\cap\cap l_1$ *и* $n,m\geqslant 0$

(72) $$\sum_i |u_i^n-v_i^n| \leqslant \sum_i |u_i^0-v_i^0|,$$

(73) $$\operatorname{var} u(t) \leqslant \operatorname{var} u^0,$$

$$\sum_i |u_i^n - u_i^m| \leqslant a|n-m| \operatorname{var} u^0. \tag{74}$$

Доказательство. Так как

$$u_i^{n+1} - v_i^{n+1} = f(\vec{u}_i^n) - f(\vec{v}_i^n) = \sum_s f_s(\vec{u}_i^n, \vec{v}_i^n)\,(u_{i+s} - v_{i+s})$$

то в силу монотонности схемы и предыдущей леммы

$$|u_i^{n+1} - v_i^{n+1}| \leqslant \sum_s f_s(\vec{u}_i^n, \vec{v}_i^n)\,|u_{i+s} - v_{i+s}|, \tag{75}$$

так что (72) получается суммированием этих неравенств с учетом условия (70). Для получения (73) достаточно положить $v_i^n = u_{i-1}^n$. Для доказательства (74) заметим, что

$$|u_i^{n+1} - u_i^n| = \sum_s f_s(\vec{u}_i^n, u_i^n)\,|u_{i+s}^n - u_i^n|,$$

так что в силу ограниченности $f_s(\vec{u}_i^n, u_i^n)$

$$\sum_i |u_i^{n+1} - u_i^n| \leqslant a \operatorname{var} u^n.$$

Лемма доказана.

В дальнейшем ограничимся рассмотрением схем, для которых f имеет следующий специальный вид:

$$f(\vec{u}_i) = u_i - \sigma\{g(\vec{u}_i) - g(\vec{u}_{i-1})\}, \tag{76}$$

т.е. схем вида

$$\begin{aligned} u_i^{n+1} &= u_i^n - \sigma\{g(\vec{u}_i^n) - g(\vec{u}_{i-1}^n)\} = \\ &= u_i^n - \sigma\{g(u_{i-l}^n, \ldots, u_i^n, \ldots, u_{i+l}^n) - g(u_{i-l-1}^n, \ldots, u_{i+l-1}^n)\}. \end{aligned} \tag{77}$$

Такие схемы будем называть *дивергентными*. Простейшим примером дивергентной схемы может служить схема

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} + \frac{\varphi(u_i^n) - \varphi(u_{i-1}^n)}{h} = 0$$

(для нее $l = 0$, $g(\vec{u}) = g(u) = \varphi(u)$) или схема Лакса

$$u_i^{n+1} - \frac{u_{i+1}^n + u_{i-1}^n}{2} + \frac{\sigma}{2}\left(\varphi(u_{i+1}^n) - \varphi(u_{i-1}^n)\right) = 0. \tag{78}$$

Для этой схемы $l = 1$, а функция g такова:

$$g(a, b, c) = \frac{\varphi(b) + \varphi(c)}{2} - \frac{b-c}{2\sigma}. \tag{79}$$

Лемма 5. *Если дивергентная схема (77) монотонна, то она устойчива.*

Доказательство. Так как для функции f вида (76)

$$f_s(\vec{u}_i) = \delta_s - \sigma\{g_s(\vec{u}_i) - g_{s+1}(\vec{u}_{i-1})\},$$

то

$$\sum_i f_{s-i}(\vec{u}_i) \equiv 1,$$

так что условие (70) тривиально.

Лемма 6. *Если дивергентная схема монотонна на $\mathscr{B}_A$, то для всякого числа k и $u^0 \in \mathscr{B}_A$*

$$\begin{aligned} &|u_i^{n+1} - k| - |u_i^n - k| \leqslant \\ &\qquad \leqslant -\sigma \sum_s g_s(\vec{u}_i^n, k)|u_{i+s}^n - k| + \sigma \sum_s g_s(\vec{u}_{i-1}^n, k)|u_{i+s-1}^n - k|. \end{aligned} \tag{80}$$

Доказательство. Если $|k| \geqslant A$, то неравенство (80) совпадает с уравнением (77), так что тривиально. При $|k| \leqslant A$ оно совпадает с неравенством (75), если в нем положить $v_i^n = k$. Лемма доказана.

Перейдем к исследованию аппроксимаций уравнения (63) дивергентными разностными схемами. Скажем, что схема (77) аппроксимирует уравнение (13), если функция g удовлетворяет условию

$$g(u) = g(u, u, \ldots, u) = \varphi(u).$$

Заметим, что отсюда, в частности, следует, что

$$\sum g_s(u) = \varphi'(u),$$

а также

$$\sum_s g_s(u, v) = \varphi(u, v) = \frac{\varphi(u) - \varphi(v)}{u - v}. \tag{81}$$

Именно это соотношение будет играть роль при оценке погрешности аппроксимации.

Обозначим S_τ метод, сопоставляющий сеточной функции $u^0 \in \mathscr{B}_A$ решение $u(t)$ разностной схемы (77), аппроксимирующей уравнение (13).

Теорема 10. *Если разностная схема (77) монотонна на $\mathscr{B}_A$, то метод S_τ устойчив и удовлетворяет условию (61), а его погрешность удовлетворяет оценке (60). Таким образом, метод S_τ сходится, и его точность характеризуется оценкой (62).*

Доказательство. Устойчивость метода S_τ есть прямое следствие леммы 3 и неравенств (72), (73). Условие (61) вытекает из (74). Оценим погрешность. Для этого нужно оценить форму

$$h_{\text{Об}}^{u;k}(t, x) = \theta_{\text{Об}}(t)\left(\frac{\partial|u-k|}{\partial t} + \frac{\partial F(u,k)}{\partial x}\right)$$

$$(F(u,k) = \varphi(u,k)\,|u-k|).$$

Так как при $t>0$

$$\frac{\partial|u-k|}{\partial t} = \sum_{n=0}^{\infty}\{|u^{n+1}-k|-|u^n-k|\}\,\delta(t-t^{n+1}) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_i\{|u_i^{n+1}-k|-|u_i^n-k|\}\,\delta(t-t^{n+1})\,\theta_{x_{i-1/2}x_{i+1/2}}(x),$$

то в силу (80), обозначая для краткости

$$\theta_i^n(t,x) = \sigma\delta(t-t^{n+1})\,\theta_{x_{i-1/2}x_{i+1/2}}(x),$$

$$\frac{\partial|u-k|}{\partial t} \leqslant -\sum_{n=0}^{\infty}\sum_i\Big\{\sum_s g_s(\vec{u}_i^n,k)|u_{i+s}^n-k|-g_s(\vec{u}_{i-1}^n,k)|u_{i+s-1}^n-k|\Big\}\,\theta_i^n(t,x) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_i\sum_s g_s(\vec{u}_i^n,k)\,|u_{i+s}^n-k|\{\theta_{i+1}^n(t,x)-\theta_i^n(t,x)\}.$$

Выражение, стоящее в правой части этого неравенства, преобразуем следующим образом:

$$\sum_s g_s(\vec{u}_i^n,k)|u_{i+s}^n-k| = \sum_s g_s(u_i^n,k)\,|u_i^n-k| +$$

$$+\sum_s g_s(u_i^n,k)\{|u_{i+s}^n-k|-|u_i^n-k|\}+$$

$$+\sum_s\{g_s(\vec{u}_i^n,k)-g_s(u_i^n,k)\}|u_{i+s}^n-k|.$$

Первая сумма в правой части равна, согласно условию аппроксимации (81),

$$\varphi(u_i^n,k)\,|u_i^n-k| = F(u_i^n,k),$$

а две последних — обозначим их $I_i^n(k)$ — допускают очевидную оценку

$$|I_i^n(k)| \leqslant c'\sum_{|s|\leqslant l}|u_{i+s}^n-u_i^n|. \tag{82}$$

Итак, при $t>0$

$$\frac{\partial|u-k|}{\partial t} \leqslant -\sum_{n=0}^{\infty}\sum_i\{F(u_i^n,k)-F(u_{i-1}^n,k)\}\,\theta_i^n+I_i^n(k)\,(\theta_{i+1}^n-\theta_i^n),$$

где $I_i^n(k)$ допускают оценку (82).

Обратимся к форме $(F(u,k))_x$. Для нее при $t>0$ имеем:

$$\frac{\partial F(u,k)}{\partial x} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_i\{F(u_i^n,k)-F(u_{i-1}^n,k)\}\,\overline{\theta}_i^n,$$

где $\overline{\theta}_i^n(t,x) = \theta_{t^nt^{n+1}}(t)\,\delta(x-x_{i-1/2})$. Обозначая

$$J_i^n(k) = F(u_i^n,k)-F(u_{i-1}^n,k),$$

получаем, таким образом,

$$\frac{\partial|u-k|}{\partial t}+\frac{\partial F(u,k)}{\partial x} \leqslant \sum_{n=0}^{\infty}\sum_i J_i^n(k)(\overline{\theta}_i^n-\theta_i^n)+I_i^n(k)(\theta_{i+1}^n-\theta_i^n). \tag{83}$$

Заметим, что

$$J_i^n(k) = \varphi(u_i^n,k)|u_i^n-k|-\varphi(u_{i-1}^n,k)\,|u_{i-1}^n-k| =$$

$$= \varphi(u_i^n,k)(|u_i^n-k|-|u_{i-1}^n-k|)+$$

$$+(\varphi(u_i^n,k)-\varphi(u_{i-1}^n,k))|u_{i-1}^n-k|,$$

так что

$$|J_i^n(k)| \leqslant c''\,|u_i^n-u_{i-1}^n|. \tag{84}$$

Рассмотрим теперь гладкую функцию $t,x\to\hat{\omega}(t)\hat{\Omega}(x)$. Так как значение формы $\overline{\theta}_i^n-\theta_i^n$ на этой функции равно, как легко проверить,

$$(\overline{\theta}_i^n-\theta_i^n)(\hat{\omega}\hat{\Omega}) = -\hat{\Omega}(x_{i-1/2})\int_0^{\tau}\xi\hat{\omega}'(t^n+\xi)\,d\xi -$$

$$-\frac{\tau}{h}\,\hat{\omega}(t^{n+1})\int_0^h(h-\xi)\,\hat{\Omega}'(x_{i-1/2}+\xi)\,d\xi,$$

то

$$|(\overline{\theta}_i^n-\theta_i^n)(\hat{\omega}\hat{\Omega})| \leqslant \tau^2|\hat{\Omega}(x_{i-1/2})|\int_0^1|\hat{\omega}'(t^n+\tau\xi)|\,d\xi+ \tag{85}$$

$$+\tau h|\hat{\omega}(t^{n+1})|\int_0^1|\hat{\Omega}'(x_{i-1/2}+h\xi)|\,d\xi.$$

Аналогично

$$|(\theta_{i+1}^n-\theta_i^n)(\hat{\omega}\hat{\Omega})| \leqslant \tau h|\hat{\omega}(t^{n+1})|\int_0^1\int_0^1\big|\hat{\Omega}'(x_{i-1/2}+(\xi+\eta)h)\big|\,d\xi\,d\eta. \tag{86}$$

Теперь нетрудно получить окончательную оценку погрешности в полосе $\mathfrak{A}_{0b}$. Для этого форму $h_{0b}^{u,k}$ с $k=v(t',x')$, умноженную на $\theta_{0b}(t')$, нужно применить к неотрицательной функции вида $\omega(t-t')\,\Omega(x-x')$, где функции ω и Ω финитны и достаточно считать, что их интегралы равны 1. Иными словами, нужно получить оценку величины

$$I_b = \int_0^b dt'\int_R h_{0b}^{u,v(t',x')}(\hat{\omega}(t')\,\hat{\Omega}(x'))\,dx',$$

где $\hat{\omega}(t')$ и $\hat{\Omega}(x')$ суть функции $t\to\omega(t-t')$, $x\to\Omega(x-x')$.

Используя оценку (83) и оценки (82) и (84), имеем:

$$h_{0b}^{u,v(t',x')}(\hat{\omega}(t')\,\hat{\Omega}(x')) \leqslant \sum_{n=0}^{\infty}\sum_i\Big\{c''|u_i^n-u_{i-1}^n||(\overline{\theta}_i^n-\theta_i^n)(\hat{\omega}\hat{\Omega})|+$$

$$+c'\sum_{|s|\leqslant l}|u_{i+s}^n-u_i^n||(\theta_{i+1}^n-\theta_i^n)(\hat{\omega}\hat{\Omega})|\Big\}.$$

Поэтому, интегрируя оценки (85) и (86) по t' и x', получаем:

$$I_b \leqslant \sum_{n=0}^{N} \sum_{i} c''|u_i^n - u_{i-1}^n|(\tau^2\|\omega'\| + \tau h\|\Omega'\|) +$$
$$+ c'\tau h \sum_{n=0}^{N} \sum_{i} \Big(\sum_{|s|\leqslant l} |u_{i+s}^n - u_i^n| \Big) \|\Omega'\|,$$

где N — число слоев сетки, содержащихся в полосе $\mathfrak{A}_{0b}$, $N = O(\tau^{-1})$.

Учитывая теперь, что суммы по i, фигурирующие в этом неравенстве оцениваются через вариацию u^n, окончательно получаем:

$$H_{0t}^{u,v}(\omega\Omega) \leqslant I_t \leqslant \tau t (C_0\|\omega'\| + C_1\|\Omega'\|) \operatorname{var} u^0,$$

что завершает доказательство теоремы.

В заключение сделаем несколько замечаний. Легко видеть, что монотонность схемы является необходимым условием устойчивости метода. Не представляет, однако, труда, несколько ослабляя требования, фигурирующие в определении устойчивости, включить в рассмотрение и схемы, не являющиеся монотонными. Это весьма существенно, так как класс монотонных схем содержит, как легко показать, только схемы, имеющие на гладких решениях первый порядок точности.

Распространение результатов на неявные схемы также возможно. Оно требует рассмотрения схем с функциями f, зависящими от бесконечного числа аргументов.

Весьма интересной является не решенная пока задача исследования сходимости разностных аппроксимаций уравнения (13) в случае „плохой" зависимости функций φ_i от t и x, например, линейного уравнения

$$D_0 u + \sum_{i=1}^{n} D_i(a_i u) = 0$$

с разрывными коэффициентами a_i. Заметим, что на случай, когда функции $\varphi_i(u, t, x)$ зависят от t и x дважды гладким образом, результаты этого параграфа переносятся автоматически.

Литература

[1] E. Hopf, *The partial differential equation $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$*, Comm. Pure Appl. Math. 3 (1950), стр. 201–230.

[2] P. D. Lax, *Weak solutions of nonlinear hyperbolic equations and their numerical computations*, ibid. 7 (1954), стр. 159–193.

[3] О. А. Олейник, *О задаче Коши для нелинейных уравнений в классе разрывных функций*, Докл. АН СССР 95.3 (1954), стр. 451–454.

[4] Б. Л. Рождественский, Н. Н. Яненко, *Системы квазилинейных уравнений и их приложения*, „Наука", Москва 1968.

[5] О. А. Олейник, *О разрывных решениях нелинейных дифференциальных уравнений*, Докл. АН СССР 109.6 (1956), стр. 1098–1101.

[6] —, *Разрывные решения нелинейных дифференциальных уравнений*, Усп. мат. наук 12.3 (1957), стр. 3–73.

[7] Н. Н. Кузнецов, *О слабом решении задачи Коши для уравнения первого порядка с двумя независимыми переменными*, Докл. АН СССР, 177. 2 (1967), стр. 268–271.

[8] —, *О слабом решении задачи Коши для многомерного квазилинейного уравнения*, Матем. заметки 2.4 (1967), стр. 401–410.

[9] E. Conway, I. Smoller, *Global solutions of the Cauchy problem for quasi-linear first order equations in several space variables*, Comm. Pure Appl. Math. 19 (1966), стр. 95–105.

[10] А. И. Вольперт, *Пространства BV и квазилинейные уравнения*, Мат. сб. 2 (1967).

[11] С. Н. Кружков, *Обобщенные решения задачи Коши в целом для нелинейных уравнений первого порядка*, Докл. АН СССР 187.1 (1969), стр. 29–32.

[12] R. Caccioppoli, *Misura e integrazione sugli insiemi dimensionalmente orientati*, Rend. Accad. Naz. Lincei, Cl. sci. fis., mat., nat., Ser. 8, 12.1, стр. 3–11; 2, стр. 137–146 (1952).

[13] E. De Giorgi, *Su una teoria generale della misura $(r-1)$-dimensionale in uno spazio ad r dimensioni*, Ann. mat. pura ed appl., Ser. IV, 36 (1954), стр. 191–213.

[14] Н. Н. Кузнецов, *Об устойчивых методах решения квазилинейного уравнения первого порядка в классе разрывных функций*, Докл. АН СССР 225.5 (1975), стр. 25–28.

[15] —, *Точность некоторых приближенных методов расчета слабых решений квазилинейного уравнения первого порядка I*; *Об одном конечно-разностном методе решения задачи Коши для квазилинейного уравнения первого порядка II*, Журн. вычисл. матем. и матем. физики 16.6 (1976), стр. 1489–1502; 17.3 (1977), стр. 676–689.

[16] Н. Н. Кузнецов, С. А. Волошин, *О монотонных разностных аппроксимациях квазилинейного уравнения первого порядка*, Докл. АН СССР 229.6 (1976), стр. 1317–1320.

[17] Н. С. Бахвалов, *Оценка погрешности численного интегрирования квазилинейного уравнения первого порядка*, Журн. вычисл. матем. и матем. физики 1.5 (1961), стр. 771–783.

[18] Р. В. Разумейко, *Оценка погрешности численного интегрирования квазилинейного уравнения первого порядка*, Матем. заметки 13.2 (1973), стр. 207–215.

[19] Н. Н. Кузнецов, *О применении метода сглаживания к некоторым системам гиперболических квазилинейных уравнений*, Журн. вычисл. матем. и матем. физики 13.1 (1973), стр. 92–102.

[20] С. Н. Кружков, *Результаты о характере непрерывности решений параболических уравнений и некоторые их применения*, Матем. заметки 6.1 (1969), стр. 97–108.

[21] J. G. Glimm, *Solutions in the large for nonlinear hyperbolic systems of equations*, Comm. Pure Appl. Math. 18 (1965), стр. 697–715.

[22] T. Nishida, *Global solution for an initial boundary value problem of a quasilinear hyperbolic system*, Proc. Jap. Acad. 44 (1968), стр. 642–646.

[23] Н. С. Бахвалов, *О существовании в целом регулярного решения квазилинейной гиперболической системы*, Журн. вычисл. матем. и матем. физики 10.4 (1970), стр. 969–980.

[24] R. I. Di Perna, *Existence in the large for quasi-linear hyperbolic conservation laws*, Arch. Rat. Mech. Anal. 52.3 (1973), стр. 244–257; Comm. pure appl. math. 26.1 (1973), стр. 1.

[25] P. D. Lax, *Hyperbolic systems of conservation laws*, Comm. Pure Appl. Math. 10 (1957), стр. 537–566.

[26] Н. Н. Кузнецов, В. А. Тупчиев, *Об одном обобщении теоремы Глимма*, Докл. АН СССР 221.2 (1975).

Presented to the Semester
Mathematical Models and Numerical Methods
(February 3–June 14, 1975)