Literatur

[1] N. Dunford und J. T. Schwartz, *Linear operators, Part I*, Interscience, New York 1958.

[2] H. Kiesewetter, *Vorlesungen über lineare Approximation*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1973.

[3] —, *Diskrete Approximation von stetigen linearen Operatoren auf* $C[-1, 1]$, Wissenschaftliche Zeitschrift der Universität Rostock, 23. Jahrgang, 1974, Math.-naturw. Reihe, S. 31–35.

[4] P. J. Laurent, *Approximation et optimisation*, Hermann, Paris, 1972.

[5] —, *Exchange algorithm in convex analysis*, Proceedings of an International Symposium Conducted by the University of Texas and the National Science Foundation at Austin, Texas, January 22–24, 1973.

[6] V. Nguyen-mau, *Algorithmen zur numerischen Behandlung linearer Gleichungen*, Dissertation, Universität Rostock, 1974.

[7] I. Singer, *Best approximation in normed linear spaces by elements of linear subspaces*, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York 1970.

[8] —, *The theory of best approximation and functional analysis*, SIAM, CBMS Series, No 13, 1974.

Presented to the Semester
Approximation Theory
September 17–December 17, 1975

APPROXIMATION THEORY
BANACH CENTER PUBLICATIONS, VOLUME 4
PWN—POLISH SCIENTIFIC PUBLISHERS
WARSAW 1979

ТЕОРЕМЫ ДВОЙСТВЕННОСТИ И ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ НАИЛУЧШЕГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

Н. П. КОРНЕЙЧУК

Институт Математики АН УССР, Киев, СССР.

Задачи аппроксимационного содержания, задаваемые на классах функций (или, более общо, на множествах произвольного банахова пространства), во многих случаях являются задачами на экстремум: требуется найти точную верхнюю грань погрешности приближения заданным методом на фиксированном классе функций или указать для этого класса наилучший аппарат приближения.

В решении задач такого характера (их называют экстремальными задачами) в последнее время имеются значительные успехи; в ряде важных случаев получены окончательные результаты, т. е. решение доведено до точных констант. При этом разработаны новые методы исследования экстремальных задач, базирующихся, с одной стороны, на глубоких фактах общей теории банаховых пространств, а с другой — на изучении тонких свойств конкретных классов функций.

В ряде случаев весьма эффективными оказались методы, связанные с использованием соотношений двойственности в линейных нормированных пространствах. В этой статье мы попытаемся проиллюстрировать применение теорем двойственности при решении задач наилучшего приближения в конкретных функциональных пространствах. Основные утверждения, определяющие сущность метода, мы или доказываем или снабжаем указаниями относительно идеи доказательства, а также ссылками на литературу.

1. Теоремы двойственности в линейных нормированных пространствах

Теорема 1.1. *Если F — выпуклое замкнутое множество линейного нормированного пространства X, то для любого элемента $x \in X$ справедливо соотношение*

$$\inf_{u\in F} \|x-u\| = \sup_{\substack{f\in X^* \\ \|f\|\leqslant 1}} [f(x) - \sup_{u\in F} f(u)], \tag{1.1}$$

где X^* — пространство, сопряженное с X. При каждом фиксированном $x \in X \setminus F$ существует функционал $f_0 \in X^*$ с нормой $\|f_0\| = 1$, реализующий верхнюю грань в правой части (1.1).

В более общем виде, — для отделимых локально выпуклых топологических пространств, — теорема 1.1 известна как теорема Фенхеля–Моро и доказана, например, в книге [3] на базе общих фактов теории выпуклых функций. Приводимое ниже простое доказательство равенства (1.1) с помощью теоремы отделимости сообщил автору В. М. Тихомиров.

Считая множество F фиксированным, положим для краткости

$$E(x) = \inf_{u\in F} ||x-u||,$$

$$N(x) = \sup_{f\in \bar{S}^*}[f(x)-\sup_{u\in F} f(u)],$$

где $\bar{S}^*$ — замкнутый единичный шар в X^*, т. е. $\bar{S}^* = \{f\colon f\in X^*, \|f\| \leqslant 1\}$. $E(x)$ и $N(x)$ являются неотрицательными числовыми функциями, заданными на X, причем

$$E(x) = N(x) = 0 \quad \forall x\in F;$$

поэтому надо доказать равенство $E(x) = N(x)$ для всех $x\in X\diagdown F$.

Неравенство $N(x) \leqslant E(x)$ почти тривиально. Действительно, если u_0 есть элемент наилучшего приближения для x в множестве F, т. е. $E(x) = \|x-u_0\|$, то

$$N(x) \leqslant \sup_{f\in \bar{S}^*}[f(x)-f(u_0)] = \sup_{f\in \bar{S}^*} f(x-u_0) \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{f\in \bar{S}^*}||f||\, ||x-u_0|| \leqslant ||x-u_0|| = E(x).$$

Если же элемент наилучшего приближения для x в F отсутствует, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется элемент $u_\varepsilon \in F$ такой, что $\|x-u_\varepsilon\| < E(x)+\varepsilon$. Проводя те же оценки, получим

$$N(x) \leqslant ||x-u_\varepsilon|| < E(x)+\varepsilon,$$

и так как ε произвольно, то $N(x) \leqslant E(x)$.

Доказывая справедливость противоположного неравенства $E(x) \leqslant N(x)$, фиксируем $x\in X\diagdown F$ и, заметив, что в силу замкнутости множества F $E(x) > 0$, рассмотрим открытый шар

$$U(x, E(x)) = \{y\colon y\in X, ||y-x|| < E(x)\}.$$

Шар $U(x, E(x))$ не пересекается с множеством F, ибо, если предположить существование элемента $u_1 \in F \cap U(x, E(x))$, то будет $E(x) \leqslant \|x-u_1\| < E(x)$, что абсурдно.

В силу теоремы отделимости выпуклых множеств (см., например, [5], стр. 130) существует ненулевой функционал $f_1 \in X^*$ с нормой $\|f_1\| = 1$, разделяющий множества F и $U(x, E(x))$:

$$\forall u\in F,\ \forall y\in U(x, E(x))\ f_1(u) \leqslant f_1(y);$$

следовательно,

$$\sup_{u\in F} f_1(u) \leqslant \inf_{y\in U(x, E(x))} f_1(y). \tag{1.2}$$

Но

$$\inf_{y\in U(x, E(x))} f_1(y) = \inf_{||z|| < E(x)} f_1(x-z) \tag{1.3}$$
$$= f_1(x) - \sup_{||z||<E(x)} f_1(z) = f_1(x)-E(x).$$

Из (1.2) и (1.3) вытекает, что

$$E(x) \leqslant f_1(x) - \sup_{u\in F} f_1(u) \leqslant N(x).$$

Соотношение (1.1) доказано. Из определения $N(x)$ следует существование при фиксированном $x\in X\diagdown F$ последовательности $\{f_n\}\in \bar{S}^*$ такой, что

$$\lim_{n\to\infty} [f_n(x) - \sup_{u\in F} f_n(u)] = N(x).$$

Ввиду слабой компактности шара $\bar{S}^*$ (см. [5], стр. 188, а также [1], стр. 459), существует предельный функционал $f_0 \in \bar{S}^*$ с нормой $\|f_0\| = 1$, для которого

$$f_0(x) - \sup_{u\in F} f_0(u) = N(x).$$

Замечание. Теорема 1.1 справедлива и без предположения о замкнутости выпуклого множества F.

Важным частным случаем теоремы 1.1 является

Теорема 1.2. *Если F — подпространство линейного нормированного пространства X, то для любого $x\in X\diagdown F$*

$$\inf_{u\in F} ||x-u|| = \sup_{\substack{f\in F^\perp \\ ||f||\leqslant 1}} f(x), \tag{1.4}$$

где $F^\perp$ — множество функционалов $f\in X^*$ таких, что $f(u) = 0$ $\forall u\in F$. Верхнюю грань в правой части (1.4) *реализует некоторый функционал $f_0\in F^\perp$ с нормой $||f_0|| = 1$.*

Теорема 1.2 немедленно вытекает из теоремы 1.1, если учесть, что для $f\notin F^\perp$ будет

$$f(x) - \sup_{u\in F} f(u) = -\infty \quad \forall x\in X.$$

Если аппроксимирующее множество F является конечномерным подпространством, то равенство (1.4) может быть записано в виде

$$\inf_{\lambda_k} \Big\|x - \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k\Big\| = \sup_{\substack{f\in X^*,\ ||f||\leqslant 1 \\ f(x_k)=0\ (k=1,\ldots,n)}} f(x), \tag{1.5}$$

где $x, x_1, \ldots, x_n$ — фиксированные элементы из X.

Двойственным к соотношению (1.5) является равенство

$$\inf_{\lambda_k} \Big\|f - \sum_{k=1}^n \lambda_k f_k\Big\| = \sup_{\substack{x\in X,\ ||x||\leqslant 1 \\ f_k(x)=0\ (k=1,\ldots,n)}} f(x), \tag{1.6}$$

где $f, f_1, \ldots, f_n$ — фиксированные функционалы из X^*. Соотношения (1.5) и (1.6) легко выводятся из теоремы Хана–Банаха о продолжении линейного функционала (см. [12]).

Приведем еще общий критерий ближайшего элемента, непосредственно вытекающий из теорем 1.1 и 1.2.

Теорема 1.3. *Пусть F — выпуклое замкнутое множество линейного нормированного пространства X. Элемент $u_0 \in F$ тогда и только тогда является элементом наилучшего приближения для $x \in X \setminus F$, если существует функционал $f_0 \in X^*$ такой, что*

(1) $\|f_0\| = 1$,

(2) $\|x-u_0\| = f_0(x-u_0)$,

(3) $f_0(u_0) = \sup\limits_{u \in F} f_0(u)$.

Если F — подпространство, то условия (2) *и* (3) *запишутся соответственно в виде*

(2′) $\|x-u_0\| = f_0(x)$,

(3′) $f_0(u) = 0 \ \forall u \in F$.

Не перечисляя всех частных случаев приведенных выше общих теорем применительно к конкретным функциональным пространствам, приведем лишь те, которые нам потребуются в дальнейшем.

Пусть $C[a, b]$ — пространство непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций $x(t)$ с нормой

$$\|x\|_{C[a,b]} = \max_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t)|,$$

а $L_p(a, b)$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ — пространство суммируемых на (a, b) в p-ой степени (при $1 \leqslant p < \infty$) или существенно ограниченных на (a, b) (при $p = \infty$) функций $x(t)$ с нормой соответственно

$$\|x\|_{L_p(a,b)} = \left(\int_a^b |x(t)|^p dt\right)^{1/p} \qquad (1 \leqslant p < \infty),$$

$$\|x\|_{L_\infty(a,b)} = \sup_{a<t<b} \mathrm{vrai}\, |x(t)|.$$

Предложение 1.4. *Если F — конечномерное подпространство из $L_p(a, b)$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$, то для любой функции $x(t) \in L_p(a, b) \setminus F$*

$$\inf_{u \in F} \|x-u\|_{L_p(a,b)} = \sup_{\substack{\|y\|_{L_{p'}(a,b)} \leqslant 1 \\ y \perp F}} \int_a^b x(t) y(t)\, dt \tag{1.7}$$

$$(1/p + 1/p' = 1),$$

где $y \perp F$ означает, что

$$\int_a^b y(t) u(t)\, dt = 0 \quad \forall u \in F.$$

При $1 \leqslant p < \infty$ равенство (1.7) выводится из (1.4) или (1.5) с учетом структуры сопряженного пространства, при $p = \infty$ (1.7) можно получить с помощью (1.6).

Предложение 1.5. *Если F — выпуклое замкнутое множество пространства $C[a, b]$, то для любой функции $x(t) \in C[a, b] \setminus F$*

$$\inf_{u \in F} \|x-u\|_{C[a,b]} = \sup_{\bigvee_a^b (g) \leqslant 1} \left[\int_a^b x(t)\, dg(t) - \sup_{u \in F} \int_a^b u(t)\, dg(t)\right].$$

Если

$$\inf_{u \in F} \|x-u\|_{C[a,b]} = \|x-u_0\|_{C[a,b]} \qquad (u_0 \in F),$$

то существует функция $g_0(t)$ с ограниченной вариацией на $[a, b]$, удовлетворяющая условиям:

$$\bigvee_a^b (g_0) = 1, \qquad \|x-u_0\|_{C[a,b]} = \int_a^b [x(t) - u_0(t)]\, dg_0(t),$$

$$\int_a^b u_0(t)\, dg_0(t) = \sup_{u \in F} \int_a^b u(t)\, dg_0(t).$$

2. Наилучшее приближение тригонометрическими полиномами на классах периодических функций

В дальнейшем будут рассматриваться экстремальные задачи только на классах 2π-периодических функций; соответствующие пространства $C[0, 2\pi]$ и $L_p(0, 2\pi)$ функций периода 2π мы будем обозначать просто через C и L_p $(1 \leqslant p \leqslant \infty$, $L_1 = L$, $L_\infty = M)$. Введем еще пространство V 2π-периодических функций $f(t)$, имеющих ограниченную вариацию на $[0, 2\pi]$, с нормой $\|f\|_V = \bigvee_0^{2\pi} (f)$. Там, где можно понимать любое из этих пространств, будем писать X. Введем еще обозначения:

X^r $(r = 1, 2, \ldots)$ — множество 2π-периодических функций $f(t)$, у которых $f^{(r-1)}(t)$ локально абсолютно непрерывна и $f^{(r)} \in X$; под X^0 будем понимать X.

W_X^r $(r = 0, 1, 2, \ldots)$ — класс функций $f \in X^r$, у которых $\|f^{(r)}\|_X \leqslant 1$.

$W^r H_X^n$ — множество функций $f \in W_X^r$, ортогональных тригонометрическим полиномам

$$T_n(t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} (\alpha_k \cos kt + \beta_k \sin kt) \tag{2.1}$$

порядка $n-1$, т. е.

$$W^r H_X^n = \left\{f\colon f \in W_X^r,\ \int_0^{2\pi} f(t)^{\sin kt}_{\cos kt}\,dt = 0\ \ (k = 0, 1, \ldots, n-1)\right\}.$$

H^ω — класс функций $f \in C$, у которых

$$\forall t', t''\ \ |f(t')-f(t'')| \leqslant \omega(|t'-t''|),$$

где $\omega(t)$ — заданный модуль непрерывности;

$$W^r H^\omega = \{f\colon f \in C^r, f^{(r)} \in H^\omega\} \qquad (W^0 H^\omega = H^\omega).$$

$E_n(f)_X$ — наилучшее приближение в метрике пространства X функции $f \in X$ тригонометрическими полиномами (2.1) порядка $n-1$, т. е.

$$E_n(f)_X = \inf_{T_n} \|f - T_n\|_X.$$

Если $\mathfrak{M}$ — некоторый класс функций из X, то полагаем еще

$$E_n(\mathfrak{M})_X = \sup_{f \in \mathfrak{M}} E_n(f)_X.$$

Вместо $\|f\|_{L_p}$, $W^r_{L_p}$, $E_n(f)_{L_p}$ в соотношениях общего характера будем писать $\|f\|_p$, W^r_p, $E_n(f)_p$. Числа p и p', q и q' везде ниже связаны равенствами

$$1/p + 1/p' = 1/q + 1q' = 1.$$

В силу предложения 1.4 для любой $f \in L_p$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$

$$E_n(f)_p = \sup_{h \in W^0 H_p^n} \int_0^{2\pi} f(t) h(t)\,dt. \tag{2.2}$$

Если $f \in W_q^r$ $(1 \leqslant q \leqslant \infty)$, то после r-кратного интегрирования по частям (внеинтегральные члены исчезают в силу периодичности) получим

$$E_n(f)_p = \sup_{g \in W^r H_{p'}^n} \int_0^{2\pi} f^{(r)}(t) g(t)\,dt, \tag{2.3}$$

и так как (см. (1.7))

$$\sup_{\int_0^{2\pi} \psi\,dt = 0,\ \|\psi\|_q \leqslant 1} \int_0^{2\pi} \psi(t) g(t)\,dt = E_1(g)_{q'},$$

то из (2.3) следует, что

$$E_n(W_q^r)_p = \sup_{g \in W^r H_{p'}^n} E_1(g)_{q'} \leqslant \sup_{g \in W^r H_{p'}^n} \|g\|_{q'}. \tag{2.4}$$

Таким образом, оценка верхней грани наилучших приближений в L_p тригонометрическими полиномами на классе W_q^r свелась к вычислению верхней грани просто норм в $L_{q'}$, но на более тонко задаваемом классе $W^r H_{p'}^n$. В ряде случаев эта последняя задача легче поддается решению, — если удается извлечь нужную информацию о свойствах функций класса $W^r H_{p'}^n$ из условия их ортогональности тригонометрическим полиномам. Например, представив $g(x)$ из $W^r H_{p'}^n$ в виде

$$g(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} D_r(t) g^{(r)}(x-t)\,dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} [D_r(t) - T_n(t)] g^{(r)}(x-t)\,dt,$$

где $D_r(t)$ — известное ядро Бернулли, а $T_n(t)$ — произвольный тригонометрический полином порядка $n-1$, и оценивая последний интеграл в той или иной метрике, можно получить для правой части (2.4) оценки, в отдельных случаях точные.

В 1936 г. Фавар установил [15], что

$$\sup_{f \in W^r H_M^n} \|f\|_C = E_n(D_r)_L = \|\varphi_{nr}\|_C = \mathcal{K}_r/n^r \quad (n, r = 1, 2, \ldots), \tag{2.5}$$

где $\varphi_{nr}(t)$ — r-ый периодический интеграл от $\varphi_{n0}(t) = \operatorname{sign}\sin nt$ с нулевым средним значением на периоде, а

$$\mathcal{K}_r = \frac{4}{\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu(r+1)}}{(2\nu+1)^{r+1}} \qquad \left(\mathcal{K}_1 = \frac{\pi}{2}, \mathcal{K}_2 = \frac{\pi^2}{8}, \ldots\right).$$

С. М. Никольский, впервые использовавший соотношения двойственности (1.5) и (1.6) при решении экстремальных задач теории приближения, в 1946 г. показал [12], что

$$\sup_{f \in W^r H_L^n} \|f\|_L = \sup_{f \in W^{r-1} H_V^n} \|f\|_L = \|g_{n,r-1}\|_L = \mathcal{K}_r/n^r \quad (n, r = 1, 2, \ldots), \tag{2.6}$$

где $g_{nr}(t) = \dfrac{1}{4n} \varphi_{nr}(t)$.

Наконец, Л. В. Тайков, используя теорему сравнения Колмогорова [4], в 1967 г. получил [13] равенство:

$$\sup_{f \in W^r H_M^n} \|f\|_p = \|\varphi_{nr}\|_p \quad (1 \leqslant p < \infty).$$

Приведенные результаты вместе с соотношениями (2.4) дают решение двойственной задачи наилучшего приближения на соответствующем классе функций:

$$E_n(W_M^r)_C = E_n(W_L^r)_L = E_n(W_V^{r-1})_L = \mathcal{K}_r/n^r \quad (n, r = 1, 2, \ldots);$$

$$E_n(W_p^r)_L = \|\varphi_{nr}\|_{p'} \quad (1 < p < \infty),$$

$$E_n(W_M^r)_L = \|\varphi_{nr}\|_L = 4\mathcal{K}_{r+1}/n^r \quad (n, r = 1, 2, \ldots).$$

Другие точные результаты в задачах (2.4) (если не считать тривиального случая $p = q = 2$) нам неизвестны.

Более тонкая ситуация возникает при попытке применить двойственность для вычисления верхней грани наилучших приближений на классах $W^r H^\omega$, задаваемых с помощью модуля непрерывности — характеристики более чувствительной, чем норма функции.

Из (2.2) при $p=\infty$ для $f\in W^rH^\omega$ будем иметь:

$$E_n(f)_C = \sup_{g\in W^0H_L^n} \int_0^{2\pi} f(t)h(t)\,dt = \sup_{g\in W^rH_L^n} \int_0^{2\pi} f^{(r)}(t)g(t)\,dt$$

и, следовательно,

$$E_n(W^rH^\omega)_C = \sup_{g\in W^rH_L^n} F_\omega(g), \tag{2.7}$$

где

$$F_\omega(g) = \sup_{f\in H^\omega} \int_0^{2\pi} f(t)g(t)\,dt. \tag{2.8}$$

Ясно, что информации, содержащейся в соотношениях (2.6), недостаточно для получения точной оценки функционала (2.8) на классе $W^rH_L^n$. Извлечь нужную информацию о функциях этого класса удалось, используя аппарат перестановок. Наметим схему рассуждений, подробное изложение которых содержится в статьях автора [6], [7] и [9].

Если $f\in V^1$ (т. е. $f(x)$ есть интеграл от 2π-периодической функции с ограниченной на $[0, 2\pi]$ вариацией) и $f(x_0)=0$, то можно получить представление

$$f(x) = \sum_k \varphi_k(x) \qquad (x_0 \leqslant x \leqslant x_0+2\pi),$$

где $\varphi_k(x)$ — непрерывные на всей оси функции, равные нулю вне некоторого интервала $(\alpha_k, \beta_k) \subset (x_0, x_0+2\pi)$, строго монотонные на (α_k, α_k') и (β_k', β_k) $(\alpha_k' \leqslant \beta_k')$ и постоянные на $[\alpha_k', \beta_k']$ (если $\alpha_k' < \beta_k'$); при этом

$$\|f\|_L = \sum_k \int_{\alpha_k}^{\beta_k} |\varphi_k(t)|\,dt,$$

$$\bigvee_0^{2\pi}(f) = \sum_k \bigvee_{\alpha_k}^{\beta_k}(\varphi_k) = 2\sum_k \max_x |\varphi_k(x)|.$$

Обозначив через $\overline{\varphi}_k(x)$ убывающую перестановку функции $|\varphi_k(x)|$, т.е. функцию, обратную к $x=\mu(y)$, где $\mu(y)$ -- мера множества точек x, в которых $|\varphi_k(x)| > y$, положим

$$\Phi(f, x) = \sum_k \overline{\varphi}_k(x) \qquad (0 \leqslant x \leqslant 2\pi).$$

Функция $\Phi(f, x)$ не возрастает на $[0, 2\pi]$ и удовлетворяет соотношениям

$$\|\Phi(f)\|_L \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{2\pi} \Phi(f, x)\,dx = \|f\|_L,$$

$$\Phi(f, 0) = \frac{1}{2}\bigvee_0^{2\pi}(f) = \frac{1}{2}\|f'\|_L.$$

Таким образом, $\Phi(f, x)$ сохраняет информацию о норме в L не только самой функции f, но и ее производной.

Первый шаг в оценке функционала (2.8) дает

Теорема 2.1 ([6], [9]). *Если $g\in V$ и $\int_0^{2\pi} g(t)\,dt = 0$, то каков бы ни был выпуклый вверх модуль непрерывности $\omega(t)$,*

$$F_\omega(g) \leqslant \min_c \int_0^{2\pi} \Phi(G_c, t)\omega'(t)\,dt, \tag{2.9}$$

где $G_c(t) = \int_c^t g(u)\,du$. Неравенство точное.

Чтобы получить оценку правой части (2.9), не зависящую от g, введем, считая $a>0$, последовательность функций

$$\Phi_{a0}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & (0 \leqslant x < a),\\ 0 & (x \geqslant a);\end{cases}$$

$$\Phi_{ar}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{a-x} \Phi_{a,r-1}(t)\,dt & (0 \leqslant x < a),\\ 0 & (x \geqslant a)\end{cases} \qquad (r = 1, 2, \ldots).$$

Легко проверить, что $\Phi_{\pi/n,r}(x) = \Phi(g_{nr}, x)$ $(n, r = 1, 2, \ldots)$. Имеет место

Теорема 2.2 ([6], [9]). *Если $g\in W_V^r$ $(r=1, 2, \ldots)$ и при некотором $a>0$*

$$\|g\|_L \leqslant \|\Phi_{ar}\|_L \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^a \Phi_{ar}(t)\,dt,$$

то

$$|\Phi'(g, x)| \leqslant |\Phi_{ar}'(x)| \qquad (0 < x < a).$$

Пусть теперь $g\in W^rH_L^n$. Положим

$$g_1(x) = \int_c^x g(t)\,dt,$$

где c выбрано из условия $\int_0^{2\pi} g_1(t)\,dt = 0$, и заметим, что $g_1 \in W^{r+1}H_L^n$, так что ввиду (2.6)

$$\|g_1\|_L \leqslant \|g_{nr}\|_L = \|\Phi_{\pi/n,r}\|_L.$$

В силу теоремы 2.2 разность $\Phi_{\pi/n,r}(t) - \Phi(g_1; t)$ или неотрицательна на $(0, 2\pi)$, или меняет знак на этом промежутке с + на − один раз. Эти факты дают возможность, исходя из (2.9), в случае выпуклого вверх $\omega(t)$ получить точную на классе $W^rH_L^n$ оценку:

$$F_\omega(g) \leqslant \int_0^{\pi/n} \Phi_{\pi/n,r}(t)\omega'(t)\,dt = \frac{1}{n^{r+1}}\int_0^{\pi} \Phi_{\pi r}(t)\,\omega'\left(\frac{t}{n}\right)dt.$$

Ввиду (2.7) отсюда следует, что для $f \in W^r H^\omega$

$$E_n(f)_C \leqslant \int_0^{\pi/n} \Phi_{\pi/n,r}(t)\omega'(t)\,dt = \|f_{nr}\|_C = E_n(f_{nr})_C,$$

где $f_{nr}(t) = f_{nr}(\omega, t)$ — функция из класса $W^r H^\omega$ периода $2\pi/n$, являющаяся r-м периодическим интегралом (с нулевым средним значением на периоде) от функции $f_{n0}(t)$, нечетнои, равной $\frac{1}{2}\omega(2t)$ на $[0, \pi/2n]$ и $\frac{1}{2}\omega(2\pi/n-2t)$ на $[\pi/2n, \pi/n]$.

Этим установлено, что при условии выпуклости вверх $\omega(t)$ имеет место равенство ([6], [9]):

$$E_n(W^r H^\omega)_C = \frac{1}{n^{r+1}}\int_0^{\pi} \Phi_{\pi r}(t)\,\omega'\left(\frac{t}{n}\right)dt = \|f_{nr}\|_C \quad (n = 1, 2, \ldots;\ r = 0, 1, \ldots).$$

Аналогичным путем получены также ([6], [9]) соотношения (при условии выпуклости вверх $\omega(t)$):

$$E_n(W^r H^\omega)_L = \frac{4}{n^{r+1}}\int_0^{\pi} \Phi_{\pi,r+1}(t)\,\omega'\left(\frac{t}{n}\right)dt = \|f_{nr}\|_L \quad (n = 1, 2, \ldots;\ r = 0, 1, 2, \ldots).$$

3. Наилучшее равномерное приближение класса $W^r H^\omega$ функциями класса $W_M^{r+1}K$

Через $W_M^r K$ ($r = 1, 2, \ldots$) будем обозначать класс функций $f \in M^r$, у которых $\|f^{(r)}\|_M \leqslant K$.

В пространстве C класс $W_M^r K$ является выпуклым замкнутым локально компактным множеством; последние два свойства гарантируют существование в $W_M^r K$ функции наилучшего приближения для любой $f \in C$. Таким образом, рассматривая $W_M^r K$ как аппроксимирующее множество в C, мы можем воспользоваться вытекающим из общей теоремы 1.1 предложением 1.5. Если φ_0 — функция наилучшего приближения в $W_M^{r+1}K$ для $f \in C$, то существует функция $g_0(t)$ такая, что $\bigvee_0^{2\pi}(g_0) = 1$ и

$$\int_0^{2\pi} \varphi_0\,dg_0 = \sup_{\varphi\in W_M^{r+1}K}\int_0^{2\pi}\varphi\,dg_0, \tag{3.1}$$

$$\|f-\varphi_0\|_C = \inf_{\varphi\in W_M^{r+1}K}\|f-\varphi\|_C = \int_0^{2\pi}(f-\varphi_0)\,dg_0. \tag{3.2}$$

Так как класс $W_M^{r+1}K$ содержит любую константу, то правая часть в (3.1) будет конечна лишь при условии, что $g_0(0) = g_0(2\pi)$, поэтому мы можем считать функцию g_0 периодически продолженной на всю ось. Обозначив через $g_r(t)$ r-ый периодический интеграл от $g_0(t)$, удовлетворяющий условию

$$\int_0^{2\pi}|g_r(t)|\,dt = \min_\lambda\int_0^{2\pi}|g_r(t)-\lambda|\,dt,$$

и интегрируя $r+1$ раз по частям, вычислим верхнюю грань в (3.1):

$$\int_0^{2\pi}\varphi_0\,dg_0 = K\int_0^{2\pi}|g_r|\,dt = K\int_0^{2\pi}\Phi(g_r, t)\,dt. \tag{3.3}$$

Если $f \in W^r H^\omega$, то последовательное интегрирование по частям, а затем применение теоремы 2.1 дает (при условии выпуклости вверх $\omega(t)$):

$$\int_0^{2\pi} f\,dg_0 = (-1)^r\int_0^{2\pi} f^{(r)}(t)g_r'(t)\,dt \leqslant \int_0^{2\pi}\Phi(g_r, t)\omega'(t)\,dt, \tag{3.4}$$

и теперь из (3.2), (3.3) и (3.4) находим, что

$$E(f, W_M^{r+1}K)_C \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{\varphi\in W_M^{r+1}K}\|f-\varphi\|_C \leqslant \int_0^{2\pi}[\omega'(t)-K]\Phi(g_r, t)\,dt.$$

Выберем $b > 0$ из условия

$$\|\Phi_{br}\|_L = \|g_r\|_L = \|\Phi(g_r)\|_L,$$

причем можно показать, что $b \leqslant \pi$. Используя теорему 2.2, можно получить неравенство ([7], [9]):

$$E(f, W_M^{r+1}K)_C \leqslant \int_0^{2\pi}[\omega'(t)-K]\Phi_{br}(t)\,dt.$$

Ясно, что число b зависит от функции f, но, во всяком случае, справедлива оценка

$$\sup_{f\in W^r H^\omega} E(f, W_M^{r+1}K)_C \leqslant \max_{0\leqslant a\leqslant\pi}\int_0^{a}[\omega'(t)-K]\Phi_{ar}(t)\,dt. \tag{3.5}$$

При фиксированном $\omega(t)$ знак равенства в (3.5) имеет место для значений $K = K_n$ ($n = 1, 2, \ldots$) таких, что максимум в правой части реализуется для $a = \pi/n$; в этом случае

$$\sup_{f\in W^r H^\omega} E(f, W_M^{r+1}K_n)_C = \|f_{nr}-K_n\eta_{nr}\|_C,$$

где $\eta_{nr}(t) = \varphi_{n,r+1}(t+\pi/2n)$.

4. Приближение сплайнами

Через $S_{2n}^r(n, r = 1, 2, \ldots)$ будем обозначать множество 2π-периодических полиномиальных сплайнов порядка r дефекта 1 по равномерному разбиению $\{k\pi/n\}$, т.е. множество функций $\varphi \in C^{r-1}$, которые на каждом промежутке

$$\Delta_k = \left\{x\colon \frac{k-1}{n}\pi \leqslant x < \frac{k\pi}{n}\right\} \quad (k = 1, 2, \ldots, 2n)$$

совпадают с некоторым алгебраическим многочленом порядка r. Если $\psi_k(t)$ $(k = 1, 2, \ldots, 2n)$ — периодические функции, определенные на $[0, 2\pi)$ равенствами

$$\psi_k(t) = \begin{cases} 1 & (x \in \Delta_k), \\ 0 & (x \in [0, 2\pi)\setminus\Delta_k), \end{cases}$$

то $\varphi \in S_{2n}^r$ тогда и только тогда, когда $f \in C^{r-1}$ и

$$\varphi^{(r)}(t) = \sum_{k=1}^{2n} c_k \psi_k(t) \qquad \Big(\sum_{k=1}^{2n} c_k = 0\Big),$$

где c_k — числовые коэффициенты.

Для удобства будем рассматривать еще множество S_{2n}^0 функций $\varphi \in M$ вида

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^{2n} c_k \psi_k(t)$$

и условно называть их сплайнами нулевого порядка. Ясно, что S_{2n}^r $(r = 0, 1, 2, \ldots)$ являются линейными многообразиями размерности $2n$, содержащими любую константу.

Если $f \in L_p$, то будем полагать

$$E(f, S_{2n}^r)_p = \inf_{\varphi \in S_{2n}^r} \|f - \varphi\|_p$$

и, если $\mathfrak{M}$ — некоторый класс функций из L_p,

$$E(\mathfrak{M}, S_{2n}^r)_p = \sup_{f \in \mathfrak{M}} E(f, S_{2n}^r)_p.$$

Рассматривая приближение класса W_p^r $(r = 1, 2, \ldots;\ 1 \leqslant p \leqslant \infty)$ в L_q подпространством S_{2n}^{r-1}, условимся через $W_p^r(S_{2n}^{r-1})_q$ $(1 \leqslant q \leqslant \infty)$ обозначать множество функций $g \in W_p^r$, удовлетворяющих условиям:

$$\|g\|_q = \min_\lambda \|g - \lambda\|_q,$$

$$\text{(4.1)} \qquad \int_0^{2\pi} g^{(r)}(t)\varphi(t)\,dt = 0 \quad \forall \varphi \in S_{2n}^{r-1}.$$

Пусть $f \in W_p^r$; в силу предложения 1.4

$$E(f, S_{2n}^{r-1})_q = \sup_{\substack{\|h\|_{q'} \leqslant 1 \\ h \perp S_{2n}^{r-1}}} \int_0^{2\pi} f(t)h(t)\,dt,$$

причем, так как S_{2n}^{r-1} содержит константу, то функции $h(t)$, по которым берется верхняя грань, имеют нулевое среднее значение на периоде. Проинтегрировав r раз по частям, а затем воспользовавшись соотношением

$$\sup_{\substack{\|\psi\|_p \leqslant 1 \\ \int_0^{2\pi} \psi(t)dt = 0}} \int_0^{2\pi} \psi(t)g(t)\,dt = \min_\lambda \|g - \lambda\|_{p'} \qquad (g \in L_{p'})$$

(оно получается из (1.7), когда F — одномерное подпространство констант), придем к равенству

$$\text{(4.2)} \qquad E(W_p^r, S_{2n}^{r-1})_q = \sup_{g \in W_{q'}^r(S_{2n}^{r-1})_{p'}} \|g\|_{p'} \qquad (1 \leqslant p, q \leqslant \infty).$$

Экстремальную задачу в правой части (4.2) мы решим при $q' = \infty$, т.е. найдем точное значение верхней грани

$$\sup_{g \in W_\infty^r(S_{2n}^{r-1})_{p'}} \|g\|_{p'} \qquad (1 \leqslant p' \leqslant \infty).$$

Если $g \in W_\infty^r(S_{2n}^{r-1})_{p'}$, то из условия (4.1) следует, что

$$\int_0^{2\pi} g'(t)\varphi(t)\,dt = 0 \qquad \forall \varphi \in S_{2n}^0,$$

а потому

$$\int_{\Delta_k} g'(t)\,dt = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, 2n).$$

Положим

$$g_*(x) = \int_0^x g'(t)\,dt.$$

Тогда $g_*(k\pi/n) = 0$ $(k = 1, \ldots, 2n)$, причем так как $\|g\|_{p'} = \min_\lambda \|g - \lambda\|_{p'}$, то

$$\text{(4.3)} \qquad \|g_*\|_{p'} \geqslant \|g\|_{p'}.$$

Пусть

$$\psi_{nr}(t) = \begin{cases} \varphi_{nr}(t) & (r = 0, 2, 4, \ldots), \\ \varphi_{nr}(t + \pi/2n) & (r = 1, 3, 5, \ldots). \end{cases}$$

Заметив, что $\psi_{nr}(t)$ $(r = 1, 2, \ldots)$ имеет простые нули в точках $k\pi/n$ и только в них, докажем, что для всех t

$$\text{(4.4)} \qquad |g_*(t)| \leqslant |\psi_{nr}(t)|.$$

Рассуждая от противного, предположим, что $|g_*(\bar{t})| > |\psi_{nr}(\bar{t})|$ $(0 < \bar{t} < 2\pi,\ \bar{t} \neq k\pi/n)$. Можно выбрать число λ, $0 < |\lambda| < 1$, так, чтобы выполнялось равенство $\lambda g_*(\bar{t}) = \psi_{nr}(\bar{t})$, и тогда разность $\delta(t) = \psi_{nr}(t) - \lambda g_*(t)$ будет иметь на периоде $[0, 2\pi)$ по меньшей мере $2n+1$ нуль: точки $k\pi/n$ $(k = 0, 1, \ldots, 2n-1)$, а также $\bar{t}$. Но это невозможно, ибо функция $\delta^{(r)}(t) = \psi_{n0}(t) - \lambda g^{(r)}(t)$ меняет знак на $[0, 2\pi)$ ровно $2n$ раз; действительно, $\psi_{n0}(t)$ принимает значения ± 1 везде, кроме $2n$ равноотстоящих точек на периоде, в которых она меняет знак, а $|\lambda g^{(r)}(t)| < 1$ всюду.

Из (4.3) и (4.4) вытекает, что

$$\|g\|_{p'} \leqslant \|\psi_{nr}\|_{p'} = \|\varphi_{nr}\|_{p'}.$$

Так как это справедливо для любой функции g из $W_\infty^r(S_{2n}^{r-1})_{p'}$, а функция $\psi_{nr} \in W_\infty^r(S_{2n}^{r-1})_{p'}$, то с учетом (4.2) приходим к соотношениям

$$E(W_p^r, S_{2n}^{r-1})_L = \sup_{g \in W_\infty^r(S_{2n}^{r-1})_{p'}} \|g\|_{p'} = \|\varphi_{nr}\|_{p'} \quad (n, r = 1, 2, \ldots;\ 1 \leqslant p \leqslant \infty).$$

В частности, при $p = 1$,

$$E(W_L^r, S_{2n}^{r-1})_L = \|\varphi_{nr}\|_C = \mathcal{K}_r/n^r \quad (n, r = 1, 2, \ldots). \tag{4.5}$$

Равенства (4.5) получены (несколько иным путем) в диссертации А. А. Лигуна [11].

Таким образом, подпространство S_{2n}^{r-1} (размерности $2n$) дает на классе W_L^r в метрике L то же наилучшее приближение, что и подпространство тригонометрических полиномов порядка $n-1$. Этот факт имеет место также и в ряде других случаев. На некоторых из них мы бегло остановимся.

Рассматривая приближение функций класса W_M^r интерполяционными сплайнами из S_{2n}^{r-1}, В. М. Тихомиров [14] в 1969 г. установил, в частности, что

$$E(W_M^r, S_{2n}^{r-1})_C = \|\varphi_{nr}\|_C = \mathcal{K}_r/n^r \quad (n, r = 1, 2, \ldots).$$

Затем, несколько позже, А. А. Женсыкбаев показал [2], что

$$E(W_M^r, S_{2n}^{r-1})_L = \|\varphi_{nr}\|_L = 4\mathcal{K}_{r+1}/n^r \quad (n, r = 1, 2, \ldots).$$

Что касается приближения сплайнами классов W^rH^ω, то в работах автора [8] и [10] доказано, что, каков бы ни был выпуклый вверх модуль непрерывности $\omega(t)$, имеет место соотношение

$$E(W^rH^\omega, S_{2n}^r)_C = \|f_{nr}\|_C \quad (n = 1, 2, \ldots;\ r = 0, 1, \ldots).$$

При получении этого результата использовались факты, базирующиеся на общих теоремах двойственности.

Литература

[1] Н. Данфорд, Дж. Т. Шварц, *Линейные операторы. Общая теория*, ИЛ, Москва 1964.

[2] А. А. Женсыкбаев, *Приближение дифференцируемых периодических функций сплайнами по равномерному разбиению*, Матем. заметки 13 6 (1973), стр. 807–816.

[3] А. Д. Иоффе, В. М. Тихомиров, *Теория экстремальных задач*, Наука, Москва 1974.

[4] А. Н. Колмогоров, *О неравенствах между верхними гранями последовательных производных функций на бесконечном интервале*, Ученые записки МГУ, вып. 30, 3 (1939), „Математика", стр. 3–13.

[5] А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, *Элементы теории функций и функционального анализа*, Наука, Москва 1972.

[6] Н. П. Корнейчук, *Экстремальные значения функционалов и наилучшее приближение на классах периодических функций*, Известия АН СССР, серия матем. 35 (1971), стр. 93–124.

[7] —, *Неравенства для дифференцируемых периодических функций и наилучшее приближение одного класса функций другим*, Известия АН СССР, серия матем. 36 (1972), стр. 423–434.

[8] —, *О равномерном приближении периодических функций подпространствами конечной размерности*, Доклады АН СССР 213 3 (1973), стр. 525–528.

[9] —, *О методах исследования экстремальных задач теории наилучшего приближения*, Успехи матем. наук, 29 вып. 3 (1974), стр. 9–42.

[10] —, *On extremal subspaces and approximation of periodic functions by splines of minimal defect*, Analysis Mathematica, 1 (1975), стр. 91–101.

[11] А. А. Лигун, *Точные константы в неравенствах Джексона и Колмогорова*, Кандидатская диссертация, Днепропетровский госуниверситет, 1974.

[12] С. М. Никольский, *Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем*, Известия АН СССР, серия матем. 10 (1946), стр. 207–256.

[13] Л. В. Тайков, *О приближении в среднем некоторых классов периодических функций*, Труды МИАН 88 (1967), стр. 61–70.

[14] В. М. Тихомиров, *Наилучшие методы приближения и интерполирования дифференцируемых функций в пространстве* $C[-1, 1]$, Матем. сборник 80 2 (1969), стр. 290–304.

[15] [Ж. Фавар] J. Favard, *Application de la formule sommatoire d'Euler á la demonstration de quelques proprietes extremales des integrals des fonctions periodiques*, Math. Tidskrift 4 (1936), стр. 81–94.

Presented to the Semester
Approximation Theory
September 17–December 17, 1975