[8] A. M. Olevski, *Fourier series and Lebesgue function*, Uspehi Mat. Nauk 22 (3) (1967), pp. 237–239.
[9] M. B. Petrovskaja, *On Haar series and function classes* H^1_ω, Siberian Math. J. 9 (4) (1968), pp. 863–879.
[10] A. Pełczyński, *Projections in certain Banach spaces*, Studia Math. 19 (1960), pp. 209–228.
[11] G. E. Tkebuchava, *On Haar series*, Soobšč. Acad. Nauk Gruzin. SSR, 69 (2) (1973), pp. 277–280.
[12] —, *On bases of certain nonreflexive spaces*, Mat. Zametki 19 (4) (1976).
[13] P. L. Uljanov, *On certain properties of the Haar series*, Mat. Zametki 1 (1) (1967), pp. 17–24.
[14] —, *The imbedding of certain function classes* H^ω_p, Izv. Acad. Nauk SSSR, Ser. Mat. 32 (1968), pp. 649–686.

Presented to the Semester
Approximation Theory
September 17–December 17, 1975

APPROXIMATION THEORY
BANACH CENTER PUBLICATIONS, VOLUME 4
PWN—POLISH SCIENTIFIC PUBLISHERS
WARSAW 1979

ТЕОРИЯ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ И ТЕОРИЯ ПРИБЛИЖЕНИЙ

В. М. ТИХОМИРОВ

МГУ, Мехмат, Москва 117234, СССР

1. Постановки некоторых экстремальных задач теории приближений

Постановки экстремальных задач сопровождают всю историю теории приближений. Еще в 18 веке Лежандр нашел, выражаясь современным языком, полиномы наименее уклоняющиеся от нуля в метрике пространства $\mathscr{L}_2([-1, 1])$. Точнее говоря, фактически он разрешил следующую проблему минимизации [1]:

$$f_{r2}(x) = \int_{-1}^{1} \Big(t^r + \sum_{k=1}^{r} x_k t^{k-1}\Big)^2 dt = ||t^r + p_r(t)||_{\mathscr{L}_2([-1,1])} \to \inf. \tag{1}$$

Получившиеся в результате решения задачи (1) полиномы имеют вид:

$$T_{r2}(t) = \frac{r!}{(2r)!}\frac{d^r}{dt^r}(t^2-1)^r; \tag{1'}$$

они пропорциональны полиномам $P_r(t)$, названных *полиномами Лежандра*. Чебышев решил аналогичную задачу в двух других метриках: $C([-1, 1])$ и $\mathscr{L}_1([-1, 1])$. Решением задачи

$$f_{r\infty}(x) = \max_{t\in[-1,1]} \Big|t^r + \sum_{k=1}^{r} x_k t^{k-1}\Big| = ||t^r + p_r(t)||_{C([-1,1])} \to \inf \tag{2}$$

являются *полиномы Чебышева*: $T_{r\infty}(t) = 2^{-(r-1)}\cos(r\arccos t)$, а решением задачи

$$f_{r1}(x) = \int_{-1}^{1} \Big|t^r + \sum_{k=1}^{r} x_k t^{k-1}\Big| dt = ||t^r + p_r(t)||_{\mathscr{L}_1([-1,1])} \to \inf \tag{3}$$

[1] Если X — некоторое множество, $f\colon X \to \boldsymbol{R}$ — функционал на нем, а $C \subset X$ — подмножество X, называемое ограничением, то задача отыскания минимума f на C обозначается далее $f \to \inf;\ x \in C$.

являются *полиномы Чебышева второго рода*: $T_{r1}(t) = 2^{-r}\sin(r\arccos t)/\sqrt{1-t^2}$. Чебышевым и его непосредственными продолжателями были установлены многие экстремальные свойства полиномов $T_{r\infty}(t)$. В частности, самим Чебышевым было установлено, что полиномы $T_{r\infty}(t)$ будут экстремальными в такой задаче экстраполяционного типа:

$$(4) \qquad |\tau| > 1 \quad |x(\tau)| \to \sup; \quad ||x(\cdot)||_{\mathscr{L}_\infty([-1,1])} \leqslant 2^{-(r-1)};$$
$$x(t) = \sum_{k=1}^{r+1} x_k t^{k-1} \Leftrightarrow x(\cdot) \in \mathscr{P}_{r+1}.$$

Результат Чебышева означает, что если про функцию $x(\cdot)$ известно, что она является полиномом степени $\leqslant r$ и на отрезке $[-1, 1]$ по норме пространства $\mathscr{L}_\infty([-1, 1])$ или, что то же — пространства $C([-1, 1])$ она не превосходит нормы полинома $T_{r\infty}(\cdot)$, то в любой точке τ, $|\tau| > 1$ она не превзойдет по модулю числа $|T_{r\infty}(\tau)|$. А. А. Марков исследовал вопросы, связанные с неравенствами для производных. В частности, он доказал, что полином $T_{r\infty}(\cdot)$ является экстремальным в следующей задаче:

$$(5) \qquad ||\dot{x}(\cdot)||_{\mathscr{L}_\infty([-1,1])} \to \sup; \quad ||x(\cdot)||_{\mathscr{L}_\infty([-1,1])} \leqslant 2^{-(r-1)}, \quad x(\cdot) \in \mathscr{P}_r.$$

Кроме задачи (5) Марков изучил проблему отыскания максимума производной в фиксированной точке:

$$(6) \qquad |\dot{x}(\tau)| \to \sup; \quad ||x(\cdot)||_{\mathscr{L}_\infty([-1,1])} \leqslant A, \quad x(\cdot) \in \mathscr{P}_r, \ |\tau| \leqslant 1.$$

Здесь решением оказались или полиномы Чебышева или *полиномы Золотарева*, найденные Золотаревым при решении следующей проблемы минимизации:

$$(7) \qquad f_{r\sigma\infty}(x) = \max_{t\in[-1,1]} \left| t^r - \sigma t^r + \sum_{k=1}^{r-1} x_k t^{k-1} \right| \to \inf.$$

Задачи (1)–(3) и (7) относятся к числу тех, когда ищется наилучшее приближение *фиксированного элемента фиксированным аппроксимирующим множеством*. В общей ситуации задача ставится так. Пусть X — банахово пространство, $A \subset X$ — аппроксимирующее множество, $x \notin A$. Требуется найти величину $e(x, A, X)$, являющуюся решением такой экстремальной задачи:

$$(8) \qquad ||x - \xi|| \to \inf; \quad \xi \in A.$$

Таким образом $e(x, A, X) = \inf_{\xi\in A} ||x-\xi||$. Например, в задачах (1)–(3), $x = x(t) = t^r$, $A = \mathscr{P}_r$, $X = \mathscr{L}_q([-1, 1])$, $q = 2, \infty, 1$.

Весьма большое место в теории приближений занимает проблематика, связанная с аппроксимацией классов функций. Общая постановка задачи здесь такова. Пусть в ситуации задачи (8) $C \subset X$ — некоторый класс элементов. Требуется найти величину $E(C, A, X)$, являющуюся решением такой

экстремальной задачи:

$$(9) \qquad e(x, A, X) \to \sup; \quad x \in C.$$

Приведем пример точного решения задачи (9). Пусть

$$\tilde{W}^r_\infty = \{x(\cdot) |\ x^{(r-1)}(t) \text{ абсолютно непрерывна на } [-\pi, \pi],$$
$$|x^{(r)}(t) - x^{(r)}(t')| \leqslant |t - t'|,\ x^{(j)}(-\pi) = x^{(j)}(\pi),\ j = 0, 1, \ldots, r-1\}.$$

Фавар (и независимо Ахиезер и Крейн) доказали, что

$$E(\tilde{W}^r_\infty, \mathscr{T}_{2n-1}, \mathscr{L}_\infty([-\pi, \pi]) = \frac{K_r}{n^r},$$

где $K_r = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k(r+1)}(2k+1)^{-(r+1)}$ — известные константы, а $\mathscr{T}_{2n-1} = \left\{x(\cdot) \mid x(t) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \cos kt + b_k \sin kt\right\}$ — пространство тригонометрических полиномов порядка $n-1$. Наихудшим образом приближаемыми функциями в классе $\tilde{W}^r_\infty$ оказались функции $\tilde{x}_{nr}(\cdot)$, определяемые условиями периодичности и соотношениями

$$\frac{d^r}{dt^r} \tilde{x}_{nr}(\cdot) = \operatorname{sign}\sin nt, \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{x}_{nr}(t)\,dt = 0.$$

Назовем эти функции *функциями Фавара* (впрочем, функции $x_{1r}(\cdot)$ были известны еще Эйлеру). Отметим, что наилучший метод приближения функций из класса $\tilde{W}^r_\infty$ оказался линейным.

В сравнительно недавнее время теория приближений обогатилась новыми постановками экстремальных задач. К числу их относятся задачи об *N-поперечниках*. Пусть в ситуации задачи (9) $\mathscr{L}_N$ — совокупность всех линейных подпространств размерности $\leqslant N$. Множество C предположим центрально симметричным. Величина $d_N(C, X)$, являющаяся решением экстремальной задачи

$$(10) \qquad E(C, L_n, X) \to \inf, \quad L_n \in \mathscr{L}_N, n \leqslant N$$

называется *N-поперечником по Колмогорову* множества C в X. Эта величина характеризует наилучшую точность приближения класса C, которую можно достичь, рассматривая подпространства заданной размерности. Линейные подпространства L^0_n, $n \leqslant N$ такие, что $E(C, L^0_n, X) = d_N(C, X)$ называются *экстремальными*. Известны и другие поперечники. *Линейным поперечником* $\lambda_N(C, X)$ называется величина $\inf \sup_{x\in C} ||x - \Lambda_{L_n}(x)||$ где inf берется по всем парам (L_n, Λ_{L_n}), $n \leqslant N$, L_n — подпространство размерности $\leqslant N$ а Λ_{L_n} — линейный оператор из X в L_n. Поперечник $\lambda_N(C, X)$ характеризует наилучшие возможности приближения C при помощи линейных конечномерных операторов.

Автором были найдены поперечники d_N и λ_N класса $\tilde{W}^r_\infty$ в пространстве $\mathscr{L}_\infty([-\pi, \pi])$. Оказалось, что

$$d_{2n-1}(\tilde{W}^r_\infty, \mathscr{L}_\infty([-\pi, \pi])) = \lambda_{2n-1} = d_{2n} = \lambda_{2n} = \\ = E(\tilde{W}^r_\infty, \mathscr{T}_{2n-1}, \mathscr{L}_\infty([-\pi, \pi)) = \frac{K_r}{n^r}.$$

При этом подпространство $\mathscr{T}_{2n-1}$ тригонометрических полиномов не является единственным экстремальным подпространством. Наряду с ним экстремальными свойствами обладают также и некоторые пространства сплайнов.

Цель настоящего обзора вскрыть один из источников решения всех перечисленных задач. При этом будут описаны специальные функции, среди которых имеются полиномы Лежандра, Чебышева первого и второго рода, функции Фавара и еще другие специальные функции, которые весьма тесно связаны с вопросами теории аппроксимации. Для всего этого нам надо будет изучить один класс изопериметрических задач.

2. Основная изопериметрическая задача

Далее будут исследоваться два случая — периодический и непериодический. В первом случае функции определены на отрезке $[-\pi, \pi]$, где точки $-\pi$ и π идентифицированы, во втором — на отрезке $[-1, 1]$. Через J далее обозначается или $[-\pi, \pi] = T^1$ или $[-1, 1]$. Рассмотрим функционал

$$J_p(x(\cdot)) = \begin{cases} \|x(\cdot)\|^p_{\mathscr{L}_p(J)}, & 1 \leqslant p < \infty, \\ \|x(\cdot)\|_{\mathscr{L}_\infty(J)}, & p = \infty \end{cases}$$

и будем искать стационарные решения задачи:

$$(1) \qquad J_s(x(\cdot)) \to \sup; \quad J_q(x^{(r)}(\cdot)) \leqslant 1.$$

Очевидно, что максимум в поставленной задаче равен $+\infty$, ибо к любой функции, удовлетворяющей ограничениям можно добавить любую константу. Так что речь идет далее лишь о стационарных решениях, т. е. таких решениях, для которых выполнены необходимые условия экстремума.

Для того, чтобы легче было понимать постановку задачи и вообще все дальнейшее, разберем простейший пример: $r = 1$, $q = s = 2$. В этом случае задача приобретает вид:

$$(2) \qquad \int_{-1}^{1} x^2 dt \to \sup; \quad \int_{-1}^{1} \dot{x}^2 dt \leqslant 1$$

в непериодическом случае и

$$(2') \qquad \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dt \to \sup; \quad \int_{-\pi}^{\pi} \dot{x}^2 dt \leqslant 1, \quad x(-\pi) = x(\pi)$$

в периодическом. Задачи (2) и (2′) — изопериметрические задачи классического вариационного исчисления. Для нахождения стационарных точек надо составить функцию Лагранжа:

$$\mathscr{L} = \int_J (-\lambda_1 x^2 + \lambda_0 \dot{x}^2) dt = \int_J L dt$$

со множителями Лагранжа $\lambda_0 \geqslant 0$ и $\lambda_1 \geqslant 0$ не равными одновременно нулю, и для простейшей задачи классического вариационного исчисления $\mathscr{L} \to \inf$; написать необходимое условие экстремума. В применении к задаче (2) мы получим *уравнение Эйлера*

$$(3) \qquad -\frac{d}{dt} L_{\dot{x}} + L_x = 0$$

и *условие трансверсальности*

$$(4) \qquad L_{\dot{x}}|_{\pm 1} = 0.$$

В применении к задаче (2′) необходимые условия будут состоять из уравнения Эйлера (3) с периодическими краевыми условиями. Уравнение (3) в нашем случае имеет вид: $\lambda_0 \ddot{x} + \lambda_1 x = 0$. Отбросим тривиальный случай $\lambda_0 = 0$, который приводит к равенству $x \equiv 0$, поделим на λ_0 и, обозначив $\lambda_1/\lambda_0 = \lambda^2$, получим уравнение

$$(5) \qquad \ddot{x} + \lambda^2 x = 0.$$

Общее решение уравнения (5) имеет вид: $x = A \sin(\lambda t + \alpha)$. Если теперь мы добьемся удовлетворения краевых условий в периодическом случае и условий трансверсальности в непериодическом случае, то мы придем к двум системам функций $\tilde{x}_{n122}(\cdot)$ и $x_{n122}(\cdot)$ соответственно, и соответствующим им значениям λ: $\tilde{\lambda}_{n122}$ и λ_{n122}. Приведем эти решения:

$$(5') \qquad \begin{array}{ll} x_{2n122}(t) = \cos n\pi t, \ n \geqslant 0; & \tilde{x}_{2n122}(t) = \cos nt, \ n \geqslant 0; \\ x_{2n-1122}(t) = \sin \dfrac{(2n-1)}{2} t, \ n \geqslant 1; & \tilde{x}_{2n-1122}(t) = \sin nt, \ n \geqslant 1; \\ \lambda_{n122} = \dfrac{\pi}{2} n; & \tilde{\lambda}_{2n-1122} = \tilde{\lambda}_{2n122} = n. \end{array}$$

Теперь, после этого пояснительного примера, сформулируем основные результаты, о которых пойдет речь в этом обзоре.

1. Для любых q, s, $1 \leqslant q, s \leqslant \infty$ и любого натурального r существуют счетные наборы функций $\tilde{x}_{nrqs}(\cdot)$ и x_{nrqs}, $n \geqslant 0$ состоящие из стационарных решений задачи (1) для периодического и непериодического случаев. При этом в непериодическом случае $x_{nrqs}(t) = t^n$, $n = 0, \ldots, r-1$.

Положим

$$\lambda_{nrqs} = \|x_{nrqs}\|^{-1}_{\mathscr{L}_s([-1,1])}, \quad \tilde{\lambda}_{nrqs} = \|x_{nrqs}\|^{-1}_{\mathscr{L}_s([-\pi,\pi])}.$$

Эти числа будем называть *спектром* задачи (1). Обозначим через W^r_q класс функций $x(\cdot)$, для которых $x^{(r-1)}$ — абсолютно непрерывна и $J_q(x^{(r)}(\cdot)) \leqslant 1$, через $\tilde{W}^r_q$ обозначим аналогичный класс функций на $T^1 = [-\pi, \pi]$ с условиями периодичности: $x^{(j)}(-\pi) = x^{(j)}(\pi)$, $0 \leqslant j \leqslant r-1$.

Есть гипотеза, что если $q \geqslant s$, то

$$d_N(W_q^r, \mathscr{L}_s([-1,1])) = \lambda_N(\cdot\cdot) = \lambda_{Nrqs}^{-1}, \quad d_N(\tilde{W}_q^r, \mathscr{L}_s([-\pi,\pi])) = \lambda_N(\cdot\cdot) = \tilde{\lambda}_{Nrqs}.$$

Автор умеет доказывать эти утверждения при $r = 1$ и произвольных $1 \leqslant q, s \leqslant \infty$, $q \geqslant s$, а также при произвольном r, если $q = \infty$, $1 \leqslant s \leqslant \infty$, $s = 1$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$ и, наконец, если $1 \leqslant p = s \leqslant \infty$. Функции $x_{rr\infty s}(\cdot)$ являются полиномами наименее уклоняющимися от нуля в метрике $\mathscr{L}_s([-1,1])$. В частности, $x_{rr\infty s}(\cdot) = T_{rs}(\cdot)$, $s = 2, \infty, 1$ являются решениями задач (1)–(3), т. е. полиномами, пропорциональными полиномам Лежандра и Чебышева первого и второго рода. Функции $\tilde{x}_{nr\infty\infty}(\cdot)$ оказываются функциями Фавара.

2. Если несколько усложнить постановку основной изопериметрической задачи, то при $q = s = \infty$ оказывается возможным включить серию функций $x_{nr\infty\infty}(\cdot)$ в семейство, зависящее от параметра β: $x_{nr\beta\infty\infty}(\cdot)$. Функции этого семейства решают, в частности, задачи о неравенствах для производных на конечном отрезке:

$$|\dot{x}(\tau)| \to \sup; \quad ||x(\cdot)||_{\mathscr{L}_\infty([-1,1])} \leqslant a, \quad ||x^{(r)}(\cdot)||_{\mathscr{L}_\infty(R)} \leqslant 1, \quad \tau \in [-1,1]$$

(сравните с (6) из § 1) и

$$||\dot{x}(\cdot)|| \to \sup; \quad ||x(\cdot)||_{\mathscr{L}_\infty([-1,1])} \leqslant a, \; ||x^{(r)}(\cdot)||_{\mathscr{L}_\infty(R)} \leqslant 1$$

(сравните с (5) из § 1). Функции $x_{rr\beta\infty\infty}(\cdot)$ являются полиномами Золотарева (с точностью до множителя). Функции $x_{nr\beta\infty\infty}(\cdot)$ являются решением общей задачи экстраполяции:

$$x(\tau) \to \sup; \quad ||x(\cdot)||_{\mathscr{L}_\infty([-1,1])} \leqslant a, \quad ||x^{(r)}||_{\mathscr{L}_\infty(R)} \leqslant 1, \quad |\tau| > 1$$

(сравните с (4) § 1). По построенным функциям удается определить наилучшие линейные методы приближения классов W_q^r и $\tilde{W}_q^r$ в метрике $\mathscr{L}_s$. Эти методы оказываются *интерполяционными*, а интерполирующие пространствами оказываются *пространства сплайнов*. Можно предложить, что эти и подобные им функции, связанные с задачей (1), но при других граничных условиях, будут экстремальными для многих других задач минимизации, связанных с гладкими функциями.

Далее используются некоторые общие факты теории экстремальных задач. Они изложены в монографии автора [1]. Там же содержатся доказательства некоторых теорем, упомянутых выше.

3. Интегрируемый случай

В этом параграфе будут получены явные выражения для спектра задачи (1) § 2 в случае, когда $r = 1$.

3.1. $1 < q, s < \infty$. Здесь задача (1) § 2 относится к классическому вариационному исчислению. Функция Лагранжа имеет вид:

$$\mathscr{L} = \int_J \left(-\frac{\lambda_1}{s}|x|^s + \frac{\lambda_0}{q}|\dot{x}|^q\right)dt = \int_J L(x, \dot{x})\,dt.$$

При этом множители Лагранжа $\lambda_i \geqslant 0$, $i = 0, 1$, одновременно не равные нулю, причем, если $\lambda_0 \neq 0$ то $\int_J |\dot{x}|^q dt = 1$. Необходимые условия экстремума в задачи состоят из уравнения Эйлера:

$$-\frac{d}{dt}L_{\dot{x}} + L_x = 0 \Leftrightarrow -\frac{d}{dt}(\lambda_0|\dot{x}|^{q-1}\operatorname{sign}\dot{x}) - \lambda_1|x|^{s-1}\operatorname{sign}x = 0 \tag{1}$$

и условий трансверсальности

$$L_{\dot{x}}|_{\pm 1} = 0 \Leftrightarrow \dot{x}(\pm 1) = 0 \tag{1'}$$

в непериодическом или условий периодичности в периодическом варианте. Отбросив тривиальный случай $\lambda_0 = 0$, который приводит к равенству $x \equiv 0$ и, введя обозначения

$$\lambda_0 = 1, \quad \lambda_1 = \lambda^s, \quad |\dot{x}|^{q-1}\operatorname{sign}\dot{x} = p \Leftrightarrow \dot{x} = |p|^{q'-1}\operatorname{sign}p, \quad q'^{-1} + q^{-1} = 1,$$

запишем уравнение Эйлера (1) в виде канонической системы:

$$\begin{aligned} -\dot{p} &= \lambda^s|x|^{s-1}\operatorname{sign}x, \\ \dot{x} &= |p|^{q'-1}\operatorname{sign}p. \end{aligned} \tag{2}$$

При этом условия трансверсальности (1′) будут иметь вид:

$$p(\pm 1) = 0. \tag{2'}$$

Вычтя второе из равенств (2) умноженное на x из первого равенства, умноженного на p и проинтегрировав полученное выражение, использовав (1′) легко прийти к равенству

$$\lambda||x||_{\mathscr{L}_s(J)} = 1. \tag{2''}$$

Уравнения (2) можно записать так:

$$\dot{x} = \frac{\partial\mathscr{H}}{\partial p}, \quad -\dot{p} = \frac{\partial\mathscr{H}}{\partial x} \tag{3}$$

где $\mathscr{H}(x, p) = (|p|^{q'}/q') + \lambda^s|x|^s/s$. Выражение $\mathscr{H}(x,p)$ в вариационном исчислении называется *гамильтонианом*.

$$\frac{d}{dt}\mathscr{H} = 0.$$

Вдоль стационарной траектории $(x(\cdot), u(\cdot))$ выполняется равенство

$$\mathscr{H}(x,p) = H \Leftrightarrow \frac{|p|^{q'}}{q'} + \frac{\lambda^s|x|^s}{s} = H \Leftrightarrow \frac{|\dot{x}|^q}{q'} + \frac{\lambda^s|x|^s}{s} = H \tag{4}$$

известное в классической механике (когда $q = s = 2$) как закон сохранения энергии. Интегрируя соотношение (4) по отрезку I и воспользовавшись (2″), а также равенством $\int_J |\dot{x}|^q dt = 1$, получаем:

$$\frac{1}{q'} + \frac{1}{s} = |J|H, \tag{5}$$

где $|J|$ — длина отрезка J. Среднее из соотношений (4) означает, что на фазовой плоскости (x, p) стационарная траектория описывает замкнутый контур $\Gamma = \Gamma(\lambda)$. В периодическом случае траектория делает целое число полных оборотов, ибо она в конце приходит в ту же точку, а в непериодическом случае она совершает полуцелое число оборотов, ибо в начале и в конце траектории p равно нулю. Рассмотрим пока непериодический вариант задачи. Пусть стационарная траектория совершила n полуоборотов. Тогда

$$(6)\qquad \oint_\Gamma p\,dx - x\,dp = n\cdot S_\Gamma,$$

где S_Γ — площадь ограниченная кривой Γ. Но с другой стороны, и снова вследствие (2)–(2″), мы получаем

$$(6')\qquad \oint_\Gamma p\,dx - x\,dp = \int_{-1}^{1}(p\dot{x} - x\dot{p})\,dt = \int_{-1}^{1}(|\dot{x}|^q + \lambda^s|x|^s)\,dt = 2.$$

Осталость вычислить S_Γ. Сделав аффинную замену легко перевести контур Γ в контур, задаваемый уравнением $|\xi|^s + |\eta|^{q'} = 1$. При этом получится, что

$$(7)\qquad S_\Gamma = S_{qs}H^{1/q'+1/s}s^{1/s}(q')^{1/q}\cdot\lambda^{-1},$$

где S_{qs} — площадь куска плоскости, ограниченного кривой $|\xi|^s + |\eta|^{q'} = 1$. Выражение для S_{qs} нетрудно записать через Γ-функцию, но для нас это несущественно. Подведем итог. Из (5), (6), (6′) и (7) следует, что

$$(8)\qquad \lambda_{n1qs} = \frac{1}{2}\cdot S_{qs}\left(\frac{1}{q'} + \frac{1}{s}\right)^{1/q'+1/s}\cdot 2^{-(1/q'+1/s)}\cdot s^{1/s}\cdot(q')^{1/q'}\cdot n.$$

В периодическом случае получается следующие:

$$(9)\qquad \tilde{\lambda}_{2n1qs} = \tilde{\lambda}_{2n-11qs} = S_{qs}\left(\frac{1}{q'} + \frac{1}{s}\right)^{1/q'+1/s}(2\pi)^{-(1/q'+1/s)}s^{1/s}\cdot(q')^{1/q'}\cdot n.$$

Нетрудно найти и явные выражения для $x_{n1qs}(\cdot)$. А именно:

$$(10)\qquad x_{2n-11qs}(t) = x_{11qs}((2n-1)t),\qquad x_{2n,1,q,s}(t) = x_{21qs}(n, t),\qquad n = 1, 2, \ldots$$

(кроме того мы полагаем $x_{01qs}(t) = 1$, это соответствует $\lambda_{01qs} = 0$). Функция $x_{11qs}(t)$ на $[0, 1]$ является решением уравнения (см. (4)):

$$\dot{x}(t) = \left(q'H - (q'\lambda^s_{11qs}x^s)/s\right)^{1/q'}$$

т. е. она является обратной функцией к интегралу:

$$t = \int_0^x \frac{d\xi}{(q'H - (q'\lambda^s_{11qs}\xi^s)/s)^{1/q'}}.$$

Аналогично легко выписывается выражение для $x_{21qs}(t)$. В периодическом случае, как легко понять,

$$\tilde{x}_{01qs}(t) = 1,\qquad \tilde{x}_{2n1qs}(t) = x_{21qs}(nt/\pi).$$

Если теперь подставить значения $q = s = 2$, то мы снова получим те соотношения, которые вывели в § 2, когда разбирали элементарный пример.

3.2. Осталось рассмотреть предельные ситуации, когда q или s или оба эти числа равны 1 или ∞. Мы ограничимся одним частным случаем, когда $q = \infty$, $1 < s < \infty$. Этот случай будет обобщаться нами в следующем параграфе, поэтому естественно сначала разобрать простейшую ситуацию. Но, вообще говоря, предельные случаи в нашем интегрируемом случае можно было бы получить просто переходя к пределу по q и s, отправляясь от уже найденных решений. Однако, поучительно посмотреть, как в задачах теории аппроксимации работает теория оптимального управления. Итак, разберем решение задачи (1) § 2, если $q = \infty$, $1 < s < \infty$. Эта задача такова (непериодический вариант):

$$(11)\qquad \int_{-1}^{1}|x|^s dt \to \sup;\qquad \dot{x} = u,\ |u| \leqslant 1.$$

Функция Лагранжа задачи (11) имеет вид:

$$\mathscr{L} = \int_{-1}^{1}\left(-\frac{\lambda_1}{s}|x|^s + p(\dot{x} - u)\right)dt = \int_{-1}^{1}L(x, \dot{x}, u)\,dt.$$

Для получения необходимых условий в соответствии с общим принципом получения необходимых условий (в монографии [1] он называется принципом Лагранжа) надо рассмотреть две элементарные задачи

$$(12)\qquad \mathscr{L} \to \inf;\quad (\text{по } x(\cdot)),$$

$$(13)\qquad \mathscr{L} \to \inf;\quad |u| \leqslant 1\quad (\text{по } u(\cdot)).$$

Необходимое условие экстремума в задаче (12) — это уравнение Эйлера и условие трансверсальности (сравните с (1) и (1′)):

$$(14)\qquad \begin{gathered} -\frac{d}{dt}L_{\dot{x}} + L_x = 0 \Leftrightarrow -\dot{p} - \lambda_1|x|^{s-1}\operatorname{sign}x = 0,\\ L\dot{x}\big|_{\pm 1} = 0 \Leftrightarrow p(\pm 1) = 0.\end{gathered}$$

Необходимое же условие в задаче (13) состоит в том, что для стационарного решения $(x(\cdot), u(\cdot))$ должно удовлетворяться условие минимальности лагранжиана L по u:

$$(15)\qquad \inf_{|v|\leqslant 1} L(t, x(t), v) = L(t, x(t), u(t)) \Leftrightarrow u(t) = \operatorname{sign}p(t).$$

Итак, мы пришли к следующей системе соотношений:

$$(16)\qquad -\dot{p} = \lambda_1|x|^{s-1}\operatorname{sign}x,\qquad \dot{x} = \operatorname{sign}p,\qquad p(\pm 1) = 0.$$

Из (16) сразу вытекает, что вдоль стационарной траектории $(x(\cdot), p(\cdot))$ выполняется „закон сохранения энергии" (сравните с (4); λ_1 обозначено λ^s):

$$(17)\qquad |p| + \frac{\lambda^s|x|^s}{s} = H$$

и при этом $x(\cdot)$ есть ломаная с угловыми показателями ± 1. Проводя далее рассуждения аналогичные рассуждениям п. 3.1 получим, что $x_{n1\infty s}(\cdot)$ есть ломаная, имеющая $n-1$ излом в точках, делящих $[-1, 1]$ на n равных частей.

Спектр вычисляется очень просто:

(18) $$\lambda_{n1\infty s} = \left(2n\int\limits_0^{1/n} t^s dt\right)^{-1/s} = \left(\frac{s+1}{2}\right)^{1/s}\cdot n, \quad n \geqslant 0.$$

Нетрудно проверить, что $\lambda_{n1\infty s} = \lim\limits_{q\to\infty} \lambda_{n1qs}$ где λ_{n1qs} — спектр найденный в п. 3.1.

Функции $x_{n1\infty s}(\cdot)$ определяются из соотношений

$$\dot{x}_{n1\infty s}(t) = \operatorname{sign} x_{n1qs}(t), \quad q \neq \infty, \quad \int\limits_{-1}^{1} x_{n1\infty s}(t)\,dt = 0.$$

3.3. Осталось разъяснить связь найденных решений и спектральных чисел с вопросами теории приближений. Покажем, что если $q \geqslant s$, то

(19) $$d_N(W_q^1, \mathscr{L}_s([-1, 1])) = \lambda_N(W_q^1, \mathscr{L}_s([-1, 1])) = \lambda_{N1qs}^{-1}.$$

Проще всего соотношения (19) доказываются в случае только что рассмотренном, когда $q = \infty$.

(а) *Оценка сверху поперечника* $\lambda_N(W_\infty^1, \mathscr{L}_s([-1, 1]))$. В качестве аппроксимирующего подпространства размерности N возьмем пространство S_N^0 функций кусочно постоянных на отрезках $\Delta_k = \left[-1+\frac{2(k-1)}{n}, -1+\frac{2k}{n}\right]$, $k = 1, \ldots, n$. В качестве линейного оператора Λ: $W_s^1 \to S_N^0$ возьмем оператор, ставящий в соответствие функции $x(\cdot)$ функцию $y(\cdot) \in S_N^0$ такую, что $y(t)$ при $t \in \Delta_k$ равна значению $x(\cdot)$ в середине отрезка Δ_k. Вследствие того, что $|\dot{x}| \leqslant 1$ получаем:

$$\|x(\cdot)-y(\cdot)\|_s \leqslant \left(2N\int\limits_0^{1/R} t^s dt\right)^{1/s} = \lambda_{N1\infty s}^{-1}.$$

Если же $q < \infty$, то метод приближения остается прежним. Нужная оценка поперечника основывается на том, что функции $Cx_{11qs}\left(\frac{t\Delta}{2}\right)$ являются решениями следующей экстремальной задачи:

$$\int\limits_{-\Delta/2}^{\Delta/2} |x(t)|^s dt \to \sup; \quad \int\limits_{-\Delta/2}^{\Delta/2} |\dot{x}(t)|^q dt; \quad x(0) = 0.$$

То, что они удовлетворяют необходимому условию экстремума, мы показали в п. 3.1. Применив достаточные условия экстремума можно убедиться, что они действительно являются решением поставленной задачи. После этого стандартная выкладка с использованием неравенства для средних приводит к цели.

(б) *Оценка снизу для поперечника* $d_N(W_q^1, \mathscr{L}_s([-1, 1]))$. Поясним метод Ю. И. Маковоза снова на примере $q = \infty$. Оценка основывается на известной теореме Борсука об антиподах. Для нас будет наиболее удобен такой вариант этой теоремы. Пусть F: $S^n \to R^n$ — непрерывное нечетное отображение сферы S^n в R^n: $F(-x) = -F(x)$. Тогда существует точка $x_0 \in S^n$, такая, что $F(x_0) = 0$. Рассмотрим совокупность Y всех ломаных $y(\cdot)$, заданых на отрезке $[-1, 1]$, имеющих изломы в точках $t_1, \ldots, t_n$, $-1 = t_0 \leqslant t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_n \leqslant 1 = t_{n+1}$ с угловыми коэффициентами $\pm(1-\delta_i)$ где δ_i, $i = 1, \ldots, n$ — малые числа. Тогда, как это нетрудно проверить,

(20) $$\Big|\inf_{y(\cdot)\in Y} \|y(\cdot)\|_{\mathscr{L}_s([-1,1])} - \lambda_{n+1\,1\infty s}^{-1}\Big| < \varepsilon(\delta_1, \ldots, \delta_n)$$

где $\varepsilon(\delta_1, \ldots, \delta_n) \to 0$ при $\delta_i \to 0$.

Каждую такую ломаную $y(\cdot) \in Y$ можно охарактеризовать числами $\alpha_1 \geqslant 0, \ldots, \alpha_{n+1} \geqslant 0$, $\sum \alpha_i = 2$, по которым однозначно восстанавливаются точки излома t_i: $t_i = -1+\alpha_1+\ldots+\alpha_i$, $i = 1, \ldots, n+1$, $t_0 = -1$ числами $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_N$, $\varepsilon_i = \pm 1$, указывающими на знак углового коэффициента нашей ломаной и, наконец, числом ξ: $y(-1) = \xi$. Итак, $y(\cdot) = y(\cdot, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n+1}, \xi)$. Таким образом описано отображение F: $(\Sigma^n \times R^1) \to W_\infty^1$, где Σ^n — n-мерный симплекс: $\Sigma^n = \left\{\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_{n+1}), \sum |\beta_i| = 2\right\}$, $F(\beta, \xi) = y(\cdot, |\beta_1|, \ldots, |\beta_{n+1}|, \operatorname{sign}\beta_1, \ldots, \operatorname{sign}\beta_{n+1}, \xi)$.

Отображение F очевидно, нечетное. Возьмем теперь любое $n+1$-мерное подпространство L_{n+1}. Если $E(W_\infty^1, L_n, \mathscr{L}_s([-1, 1])) < \infty$, то это подпространство содержит все константы (ибо W_∞^1 содержит константы). Профакторизуем все пространство $\mathscr{L}_s$ по подпространству констант, обозначим через $\overline{W_\infty^1}$ образ W_∞^1 при этой факторизации и через $\overline{F} = \pi\circ F$, где π — каноническая проекция данной факторизации. Теперь можно применить теорему Борсука. Пусть $P_{\overline{L_n}}x$ — проекция элемента x на подпространство $\overline{L_n}$, являющееся факторизацией выбранного нами пространства L_{n+1}: $\overline{L_n} = \pi L_{n+1}$. Суперпозиция $P_{\overline{L_n}}\circ\overline{F}$ является непрерывным нечетным отображением. Значит, имеется точка, которая при проектировании отображается в нуль, ибо $\pi F(\Sigma^n \times R^1)$ гомеоморфно S^n. Сопоставив это с соотношением (20) приходим к нужной оценке

$$d_{n+1}(W_\infty^1, \mathscr{L}_s([-1, 1])) = \lambda_{n+1\,1\infty s}^{-1}.$$

4. Заключение

4.1. Скажем несколько слов о том, как доказывается теорема о поперечниках в случае, когда r — произвольно, $q = \infty$. Будем для простоты считать, что $s < \infty$. Задача (1) § 2 приобретает здесь вид:

(1) $$\int\limits_{-1}^{1} |x_1|^s dt \to \sup; \quad x_1 = x_2, \ldots, x_{q-1} = x_q, \quad \dot{x}_r = u, \quad u \in [-1, 1],$$

где x обозначен через x_1. Напишем для задачи (1) принцип максимума Понтрягина. Для этого составим функцию Лагранжа:

$$\mathscr{L} = \int_{-1}^{1} \left(-\frac{\lambda_1}{s}|x_1|^s + \sum_{i=1}^{r-1} p_i(\dot{x}_i - x_{i+1}) + p_r(\dot{x}_r - u) \right) dt =$$

$$= \int_{-1}^{1} L(x_1, \ldots, x_r, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_r, u)\, dt$$

и выпишем, как и в п. 3.2. уравнение Эйлера, условия трансверсальности и условие минимума по u. Уравнения Эйлера примут вид:

$$(2) \qquad -\frac{d}{dt}L_{\dot{x}_i} + L_{x_i} = 0, \; i = 1, \ldots, r \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\dot{p}_1 - \lambda_1 |x_1|^{s-1} \operatorname{sign} x_1 = 0, \quad -p_i - p_{i-1} = 0, \; i = 1, \ldots, r,$$

условия трансверсальности здесь таковы:

$$(2') \qquad L_{\dot{x}_i}\big|_{\pm 1} = 0 \Leftrightarrow p_i(\pm 1) = 0, \quad i = 1, \ldots, r.$$

Наконец, условие минимума по u приводит к соотношению:

$$(2'') \qquad u = \operatorname{sign} p_r.$$

Возвращаясь к обозначению $x_1 = x$ и обозначив p_r через p а λ_1 через λ^s (тривиальный случай $\lambda_1 = 0$ мы отбрасываем), из (2)–(2'') получаем, что x и p удовлетворяют следующей канонической системе уравнений:

$$(3) \qquad \begin{aligned} -p^{(r)} &= (-1)^{r+1}\lambda^s |x|^{s-1} \operatorname{sign} x, \\ x^{(r)} &= \operatorname{sign} p, \end{aligned} \qquad p(\pm 1) = \ldots = p^{(r-1)}(\pm 1) = 0.$$

Из (3) можно предположить, что $|x^{(r)}| \equiv 1$; это соответствует тому, что $p(t)$ не может в стационарном случае обращаться в нуль на целом отрезке. Это предположение наталкивает на идею подойти к задаче по-другому. Будем решать другую экстремальную задачу, которую назовем вспомогательной задачей Z_n: среди функций $x(\cdot)$, у которых $|x^{(r)}| \equiv 1$ и при этом имеется не более n перескоков от $+1$ к -1 и наоборот, найти функцию, имеющую минимальную норму в $\mathscr{L}_s([-1, 1])$. Нетрудно показать, что решение поставленной задачи существует. Действительно, задача Z_n — конечнопараметрическая задача, которую, как легко усмотреть из ее постановки, можно рассматривать как задачу минимизации непрерывного функционала на компактном множестве. Далее, если применить простейшие необходимые условия минимума для задачи Z_n, то обнаружится, что они будут совпадать с уравнениями (2)–(2''). Это и позволяет идентифицировать функции $x_{n+rr\infty s}$ получающиеся как решения задачи Z_n со стационарными решениями системы (3). Доказывается, что они имеют ровно n перескоков от $+1$ на -1 и наоборот. Отметим, что функции $x_{rr\infty s}(\cdot)$ рассматриваемые, как решения задачи Z_0, являются полиномами наименее уклоняющимися от нуля. В частности, функция $x_{rr\infty 2}(\cdot)$

пропорциональна полиномам Лежандра, функция $x_{rr\infty\infty}(\cdot)$ пропорциональна полиномам Чебышева, функция $x_{rr\infty 1}(\cdot)$ пропорциональна полиномам Чебышева второго рода. Если же теперь посмотреть на эти решения, как на решения задач (2)–(2''), то получается интересная информация о полиномах наименее уклоняющихся от нуля. Например, из соотношений (3) можно сразу получить формулу Родрига, дающую явное выражение для полиномов Лежандра:

$$-p^{(r)} = (-1)^{r+1}\lambda^2 x, \; x^{(r)} \equiv 1, \; p^{(j)}(\pm 1) = 0, \; j = 0, \ldots, r-1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p^{(2r)} = (-1)^{r+1}\lambda^2, \; p^{(j)}(\pm 1) = 0, \; j = 0, \ldots, r-1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p(t) = \frac{\lambda^2}{(2r)!}(-1)^r (t^2 - 1)^r \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{rr\infty 2}(t) = \frac{p^{(r)}}{(-1)^r \lambda^2} = \frac{1}{(2r)!} \frac{d^r}{dt^r}(t^2 - 1)^r.$$

Наконец, скажем про наилучший способ аппроксимации функций классов W_∞^r. Наилучшее пространство размерности $n+r$ для класса W_∞^r в пространстве $\mathscr{L}_s$ состоит из сплайнов S_{n+r}^{r-1}, имеющих изломы $r-2$ производных в нулях функции $p_{n+rr\infty s}$, соответствующей $x_{n+rr\infty s}$ в уравнениях (3), а сами функции пространства S_{n+r}^{r-1} имеют гладкость $r-3$. Оценка сверху идейно близка к аналогичной оценке в случае $s = \infty$, описанной в монографии автора [1]. Оценка снизу проходит по той же схеме, что и аналогичная оценка из п. 3.3.

4.2. Поставим некоторые проблемы.

1. Как это видно из предыдущего, основная гипотеза (см. п. 1 на стр. 277 § 2) еще не доказана.

2. Возникает множество вопросов, касающихся качественной теории нелинейных дифференциальных уравнений типа:

$$((x^{(r)})^{2k-1})^{(r)} + \lambda x^{2n-1} = 0.$$

Эти уравнения возникают не только при решении поставленных задач аппроксимации классов функций, но, скажем, в задачах о неравенствах для производных на прямой и полупрямой. Там накопился уже довольно богатый эмпирический материал, получены многие интересные точные решения (Колмогоров, Штейн, Харди–Литтльвуд–Полиа, Тайков, Арестов, Габушин и др.). Но большинство качественных вопросов не выяснены, скажем, когда решения на полупрямой существуют, когда они периодичны, когда они „ассимптотически периодичны'', когда финитны и т. п. Очень много качественных вопросов нужно уметь решать при описании функций типа x_{nrqs}.

3. Следует подчеркнуть, что задача о поперечниках d_n и λ_n классов W_q^r в пространстве $\mathscr{L}_s$ еще не решена даже в ассимптотическом смысле при $q < s$ (см. об этом цикл работ 1974–1975 гг. Исмагилова, Кашина и Глускина). (*)

(*) В настоящее время эта задача решена Б. С. Кашинюм.

4. Можно думать, что при $q < s$ величины d_N и λ_N связаны с какой-то новой интересной экстремальной проблемой. Но какой? Достоверно, что не с основной изопериметрической задачей из § 2, ибо d_n и λ_n имеет другую асимптотику в сравнении с λ_{nrqs}^{-1}.

5. Можно поставить задачи для многих переменных, подобные решенным нами выше в одновременном случае. Возникают изопериметрические задачи похожие на задачу из § 2. Имеет ли она прямое отношение к теории приближений? Что заменит сплайны в этом случае?

6. Ограничения на градиенты типа включений требуют разработки многомерной теории оптимального управления. Как будет выглядеть здесь принцип максимума?

7. Выше были решены задачи аппроксимации гладких функций. Можно получить аналогичные результаты для гармонических функций заданных в круге. При этом возникают подпространства, подобные сплайнам, но не являющиеся сплайнами. Хотелось бы разработать единую теорию, где сплайны выступали бы как нечто единое для гладких, гармонических, аналитических и т. д. функций

8. Следовало бы дать аналогичную теорию аппроксимации гладких комплексных функций.

9. Нет достаточно содержательной точной теории приближения классов аналитических функций в достаточно общих областях.

10. Совершенно не ясны ответы на простейшие вопросы, касающиеся приближения функций многих комплексных переменных.

Этот обзор составлен на базе четырех лекций, прочитанных автором в Центре им. С. Банаха на семестре по теории аппроксимации в декабре 1975 года. Мне хотелось бы в заключение выразить мою глубокую благодарность организаторам этого семестра и в особенности проф. Ч. Олеху и проф. З. Чисельскому за предоставленную мне возможность принять участие в работе семестра и за дружескую поддержку.

Примечание при корректуре. За истекшее время появилось много работ по этой тематике, в частности Ю. Н. Субботина, Х. Мичелли, А. Пинкуса, Т. Ривлина, С. Винограда и др. Особенно отметим замечательные работы: Ch. Miccelli, A. Pinkus, *On n-widths in* L^∞, Trans. Amer. Math. Soc. 234 (1) (1977), *Total positivity and the exact n-width on certain sets in* L^1, Pacific J. Math. 71 (2) (1977).

Литература

[1] В. М. Тихомиров, *Некоторые вопросы теории приближений*, Изд. МГУ, 1975.

Presented to the Semester
Approximation Theory
September 17–December 17, 1975

APPROXIMATION THEORY
BANACH CENTER PUBLICATIONS, VOLUME 4
PWN—POLISH SCIENTIFIC PUBLISHERS
WARSAW 1979

A MULTIPLIER IN BESOV SPACES WHICH IS NOT A MULTIPLIER IN LEBESGUE SPACES

HANS TRIEBEL

Friedrich Schiller University, Department of Mathematics, 69 Jena, G.D.R.

1. Introduction

If $1 < p < \infty$, then M_p denotes the set of all multipliers in the Lebesgue space L_p, i.e. the set of all essentially bounded Lebesgue-measurable functions $m(x)$ in the n-dimensional Euclidean space such that $F^{-1}mF$ is a bounded operator from L_p into L_p (here F and F^{-1} are the Fourier transform and its inverse, respectively). In the same way one defines $\mathcal{M}_p$, the set of all multipliers in the isotropic Besov spaces $B^s_{p,q}$ (= Lipschitz spaces $\Lambda^s_{p,q}$), where $-\infty < s < \infty$, and $1 \leqslant q \leqslant \infty$ ($\mathcal{M}_p$ does not depend on s or q; [5]). In [5] it was proved that $M_p \subset \mathcal{M}_p$. In [6] we introduced the subclass $\mathcal{M}^H_p$ of $\mathcal{M}_p$ consisting of all multipliers $m(x) \in \mathcal{M}_p$ such that the norms of the multiplier-operators belonging to the multipliers $m(ax)$, where $0 < a < \infty$, are uniformly bounded. We have $M_p = \mathcal{M}^H_p$; [6]. But in the two above-cited papers we did not clarify whether $\mathcal{M}^H_p$ is strictly contained in $\mathcal{M}_p$ or not (or, in other words, whether M_p and $\mathcal{M}_p$ coincide or not). The aim of this paper is to give an explicit example of a multiplier $m(x)$ belonging to $\mathcal{M}_p$ but not to M_p.

2. Definitions

$\boldsymbol{R}_n$ is the n-dimensional real Euclidean space; its general point is denoted by $x = (x_1, \ldots, x_n)$. As usual, S is the Schwartz space of all complex-valued infinitely differentiable rapidly decreasing functions in $\boldsymbol{R}_n$; its dual space S' is the space of tempered distributions. F and F^{-1} are the Fourier transform and its inverse, respectively. If $f \in S$, then

$$(Ff)(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{R_n} e^{-ix\xi} f(x)\,dx; \qquad x\xi = \sum_{j=1}^{n} x_j \xi_j.$$

A corresponding formula holds for F^{-1}; one must replace $-i$ by i in the last formula.

If $1 \leqslant p \leqslant \infty$, then L_p is the usual space of all complex-valued Lebesgue-measur-