APPROXIMATION THEORY
BANACH CENTER PUBLICATIONS, VOLUME 4
PWN—POLISH SCIENTIFIC PUBLISHERS
WARSAW 1979

ZUR KONSTRUKTION VON BESTEN LINEAREN APPROXIMATIONEN IN NORMIERTEN RÄUMEN

H. KIESEWETTER

Wilhelm-Pieck-Universität Rostock, Rechenzentrum, Rostock DDR

INHALT

1. Problemstellung

Wir betrachten einen normierten Raum X und einen endlichdimensionalen Unterraum L, der durch n linear unabhängige Elemente

$$\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \tag{1}$$

aufgespannt wird. Zu vorgegebenem Element x_0 aus X suchen wir beste Approximationen p aus L, welche die Gleichung

$$||x_0-p|| = \inf_{y\in L}||x_0-y|| = !\, E \tag{2}$$

erfüllen(¹).

In jedem endlich-dimensionalen Unterraum L gibt es für jede Approximationsaufgabe (2) beste Approximationen p. Bei der Konstruktion von besten Approximationen orientieren wir uns auf die sogenannten *aufsteigenden Verfahren*, die mit stetigen linearen Funktionalen arbeiten. Es besteht folgender Zusammenhang zwischen der Approximationsaufgabe (2) und einer dualen Aufgabe im Raum X^*, dem Raum der stetigen linearen Funktionale auf X.

SATZ 1.1 (Beweis vgl. I. Singer [7], H. Kiesewetter [2]). *Ein Element p aus L ist genau dann eine beste Approximation von x_0 in L, wenn ein nichttriviales, stetiges lineares Funktional $\varphi(x)$ $(||\varphi|| > 0)$ existiert, das die Bedingungen*

$$\varphi(y) = 0 \quad \forall y \in L \tag{3}$$

(¹) $A = !B$ bzw. $B! = A$ bedeutet, daß B durch A definiert wird (Definitionsgleichheit).

und

(4) $$|\varphi(x_0-p)| = \|\varphi\| \, \|x_0-p\|$$

erfüllt.

Wir sagen: $\varphi(x)$ *ist orthogonal auf* L *(Gleichung* (3)) *und maximal auf* x_0-p *(Gleichung* (4)).

Das Funktional $\varphi(x)$ *ist eine Lösung der dualen Aufgabe*

(5) $$\sup_{\substack{\|f\|>0\\ f(y)=0\ \forall y\in L}} \frac{|f(x_0)|}{\|f\|} = \frac{|\varphi(x_0)|}{\|\varphi\|} = E.$$

2. Diskrete Approximationen

Bei vielen praktischen Aufgaben ist die Norm, bezüglich der approximiert werden soll, keineswegs festgelegt. Vielmehr muß man sich je nach den praktischen Zielstellungen, die man mit der Lösung der Aufgabe verbindet, für die eine oder andere Norm entscheiden. Es gibt Fälle, bei denen die gebräuchlichen Normen nicht den praktischen Zielstellungen der Aufgabe entsprechen. Es gibt andere Fälle, bei denen zwar ein linearer Raum vorliegt; dieser kann aber nicht nach den üblichen Methoden mit einer Norm ausgestattet werden (z.B. ein Raum nicht beschränkter linearer Operatoren). Deshalb ist es nützlich, nach allgemeinen Prinzipien für die Einführung von Normen bzw. Pseudonormen in linearen Räumen Ausschau zu halten. Ein sehr weitreichendes Prinzip beruht darauf, daß wir lineare Funktionale einführen und mit ihrer Hilfe einen „Abstand" zwischen den Elementen des linearen Raumes definieren. Mit

(1) $$F = \{f_j(x)\}, \quad j\in J,$$

bezeichnen wir eine beliebige Menge von linearen Funktionalen auf einem linearen Raum X. Die Indexmenge J kann endlich, abzählbar oder überabzählbar sein. Wir definieren die diskrete Norm bezüglich F durch den Ausdruck

(2) $$\|x\|_F \mathrel{!=} \sup_{f_j\in F} |f_j(x)|.$$

Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß die Menge F das triviale Funktional ($f(x) = 0\ \forall x\in X$) nicht enthält. Wir definieren den Nullraum von F durch die Beziehung

(3) $$L_F \mathrel{!=} \{y\colon f_j(y) = 0\ \forall f_j\in F\}.$$

Die *diskrete Norm* $\|x\|_F$ ist eine Norm auf dem Faktorraum X/L_F. Anstelle von (1.2)([2]) kann man die Approximationsaufgabe

(4) $$\|x_0-p\|_F = \inf_{y\in L}\|x_0-y\|_F$$

stellen. Jede Lösung p aus L bezeichnen wir als eine beste diskrete Approximation von x_0 in L bezüglich F. Durch geeignete Auswahl von F kann die Approximationsaufgabe (4) in sehr variabler Weise den Anforderungen bei der Lösung praktischer Aufgaben angepaßt werden. Insbesondere kann man mit diskreten Normen auf Faktorräumen arbeiten, wenn der lineare Raum X mit herkömmlichen Methoden nicht mit einer Norm ausgestattet werden kann.

([2]) (1.2) bedeutet: Paragraph 1, Gleichung (2).

Diskrete Normen können sich aber auch als sinnvoll erweisen, wenn im Raum X bereits eine Norm gegeben ist. Dann verwendet man im allgemeinen stetige lineare Funktionale $f_j(x)$, deren Norm in bekannter Weise nach der Formel

(5) $$\|f_j\| \mathrel{!=} \sup_{\substack{x\neq 0\\ x\in X}} \frac{|f_j(x)|}{\|x\|}$$

berechnet wird. Natürlich ist die Norm für die Funktionale von der Norm für die Elemente abhängig.

In diesem Fall definieren wir die diskrete Norm durch den Ausdruck

(6) $$\|x\|_F \mathrel{!=} \sup_{\substack{\|f_j\|>0\\ f_j\in F}} \frac{|f_j(x)|}{\|f_j\|}.$$

Als Beispiel für die Einführung diskreter Normen betrachten wir den Raum der auf dem Intervall $a\leqslant t\leqslant b$ stetigen Funktionen $x(t)$. Wir legen eine beliebige Menge von Stützstellen fest

(7) $$\{t_j\}, \quad a\leqslant t_j\leqslant b,\ j\in J.$$

Die zugehörige Menge von Punktfunktionalen

(8) $$F \mathrel{!=} \{x(t_j)\}, \quad j\in J$$

definiert eine diskrete Norm

(9) $$\|x\|_F \mathrel{!=} \sup_{j\in J} |x(t_j)|.$$

Wenn die Stützstellen t_j im Intervall $[a, b]$ dicht liegen, stimmt die diskrete Norm (9) mit der Maximumnorm überein. Die aufsteigenden Verfahren zur Konstruktion von besten Approximationen sind eng mit diskreten Normen verbunden und deshalb besonders gut zur Lösung von Approximationsaufgaben der Form (4) geeignet. Bei diesen Verfahren arbeitet man nämlich schrittweise mit einfachen diskreten Approximationsaufgaben, deren Lösung man voll beherrscht. Wir beschreiben jetzt diese Approximationsaufgaben und den zugehörigen Lösungsalgorithmus.

Wir gehen davon aus, daß eine Approximationsaufgabe der Form (1.2) zu lösen ist, d.h. ein zu approximierendes Element x_0, ein Unterraum L mit einem Koordinatensystem $x_1, x_2, \ldots, x_n$ und eine Norm $\|x\|$ sind gegeben. Dabei beziehen wir auch den Fall ein, daß der Raum X als Faktorraum in einen Raum $\tilde{X}$ eingebettet ist und seine Norm $\|x\|$ als diskrete Norm auf $\tilde{X}$ erzeugt wurde:

$$X = \tilde{X}/L_F, \quad \|x\| = \|\tilde{x}\|_F.$$

Mit $\|x\|$ bezeichnen wir immer die Norm im Raum X unabhängig davon, ob sie von vornherein gegeben ist oder bei der Festlegung der Approximationsaufgabe als diskrete Norm eingeführt wurde.

Wir können voraussetzen, daß x_0 dem Unterraum L nicht angehört ($E > 0$), denn für $E = 0$ ist $p = x_0$ die beste Approximation. Alle Überlegungen zur Lösung der Approximationsaufgabe (1.2) beziehen sich auf den $(n+1)$-dimensionalen Unterraum, der durch die Elemente

$$\{x_0;\ x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$

aufgespannt wird. Demzufolge betrachten wir auch Mengen von $n+1$ stetigen linearen Funktionalen auf X

$$R \mathrel{!=} \{f_1(x), f_2(x), \ldots, f_{n+1}(x)\}. \tag{10}$$

Für $j = 1, 2, \ldots, n+1$ definieren wir die Haarschen Determinanten h_j durch die Formeln

$$h_j \mathrel{!=} \det \begin{bmatrix} f_1(x_1) & \ldots & f_1(x_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ f_{j-1}(x) & \ldots & f_{j-1}(x_n) \\ f_{j+1}(x_1) & \ldots & f_{j+1}(x_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ f_{n+1}(x_1) & \ldots & f_{n+1}(x_n) \end{bmatrix}. \tag{11}$$

Wir setzen voraus, daß die Bedingung

$$\sum_{j=1}^{n+1} |h_j|\,\|f_j\| > 0 \tag{12}$$

erfüllt ist. Eine Menge R von stetigen linearen Funktionalen, welche die Bedingung (12) erfüllt, bezeichnen wir als *Referenz*. Die Funktionale $f_j(x)$ nennen wir *Stützfunktionale*. Wir lösen die Approximationsaufgabe

$$\|x_0 - q\|_R = \inf_{y \in L} \|x_0 - y\|_R \tag{13}$$

bezüglich der diskreten Norm

$$\|x\|_R \mathrel{!=} \sup_{f_j \in R} \frac{|f_j(x)|}{\|f_j\|}. \tag{14}$$

Die Vorzeichenfunktion $\operatorname{sign}(c)$ definieren wir für komplexe Zahlen c wie folgt:

$$\operatorname{sign}(c) \mathrel{!=} \begin{cases} \dfrac{c}{|c|} & \text{für} \quad c \neq 0, \\ \sigma & \text{für} \quad c = 0,\ |\sigma| \leqslant 1. \end{cases} \tag{15}$$

Für die folgenden Betrachtungen ist wichtig, daß der Funktionswert

$$\operatorname{sign}(0) = \sigma$$

beliebig im Bereich $|\sigma| \leqslant 1$ festgelegt werden darf und nicht automatisch $\operatorname{sign}(0) = 0$ gesetzt wird.

SATZ 2.1 *Ein Element q aus L ist genau dann eine beste diskrete Approximation von x_0 in L bezüglich der Referenz R, wenn mit dem Parameter*

$$a_0 = \frac{\sum_{j=1}^{n+1} (-1)^j h_j f_j(x_0)}{\sum_{j=1}^{n+1} |h_j|\,\|f_j\|} \tag{16}$$

für $h_j \neq 0$ die Gleichungen

$$f_j(x_0 - q) = a_0 \|f_j\| (-1)^j \operatorname{sign}(h_j) \tag{17'}$$

gelten und für $h_j = 0$ Zahlen σ_j mit $|\sigma_j| \leqslant 1$ existieren, so daß die Gleichungen

$$f_j(x_0 - q) = a_0 \|f_j\| (-1)^j \sigma_j \tag{17''}$$

erfüllt sind.

Grundlegend für den Beweis des Satzes 2.1 ist das stetige lineare Funktional

$$\varphi(x) \mathrel{!=} \frac{\sum_{j=1}^{n+1} (-1)^j h_j f_j(x)}{\sum_{j=1}^{n+1} |h_j|\,\|f_j\|}. \tag{18}$$

Es ist nach Konstruktion auf dem Unterraum L orthogonal, denn der Zähler ergibt sich als Entwicklung der Determinante

$$-\det \begin{bmatrix} f_1(x) & f_1(x_1) & \ldots & f_1(x_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f_{n+1}(x) & f_{n+1}(x_1) & \ldots & f_{n+1}(x_n) \end{bmatrix}$$

nach der ersten Spalte. Aus

$$\varphi(y) = 0 \quad \forall y \in L \tag{19}$$

folgen die Beziehungen

$$|a_0| = |\varphi(x_0)| = |\varphi(x_0 - y)| \tag{20}$$

$$= \frac{\left|\sum_{j=1}^{n+1} (-1)^j h_j f_j(x_0 - y)\right|}{\sum_{j=1}^{n+1} |h_j|\,\|f_j\|} \leqslant \frac{\sum_{j=1}^{n+1} |h_j|\,|f_j(x_0 - y)|}{\sum_{j=1}^{n+1} |h_j|\,\|f_j\|} \leqslant \|x_0 - y\|_R$$

für alle Elemente y aus L.

Außerdem gilt, daß das System der Gleichungen (17′) und (17″) für jede Referenz R eine Lösung q aus L besitzt, wobei der Parameter a_0 der Gleichung (16) genügt. Um das zu zeigen, setzen wir für $h_j \neq 0$

$$\sigma_j \mathrel{!=} \operatorname{sign}(h_j) \tag{21}$$

und schreiben die Gleichungen (17′) und (17″) einheitlich in der Form

$$f_j(x_0 - q) = a_0 \|f_j\| (-1)^j \sigma_j \tag{17}$$

für $j = 1, 2, \ldots, n+1$. Wir gehen mit dem Ansatz

$$q = \sum_{k=1}^{n} a_k x_k \tag{22}$$

in die Gleichungen (17) ein und erhalten ein lineares Gleichungssystem

$$\|f_j\|(-1)^j \sigma_j a_0 + \sum_{k=1}^{n} f_j(x_k) a_k = f_j(x_0) \tag{23}$$

mit $n+1$ Gleichungen zur Bestimmung der Parameter $(a_0; a_1, \ldots, a_n)$. Für die Koeffizientendeterminante dieses Gleichungssystems erhalten wir den Wert

$$-\sum_{j=1}^{n+1} |h_j|\,\|f_j\| < 0,$$

d.h. für jedes feste Tupel von Werten $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n+1})$ erhalten wir eine eindeutig bestimmt Lösung $(a_0; a_1, \ldots, a_n)$. Dabei bestimmen die Parameter $(a_1, \ldots, a_n)$ gemäß (22) ein Element q aus L und der Parameter a_0 genügt der Gleichung (16):

$$\varphi(x_0) = \varphi(x_0 - q) = \frac{\sum_{j=1}^{n+1} (-1)^j h_j f_j(x_0 - q)}{\sum_{j=1}^{n+1} |h_j|\,\|f_j\|} = a_0 .$$

Nach diesen Vorbereitungen läßt sich der Satz 2.1 einfach beweisen. Wir nehmen zuerst an, daß ein Element q aus L die Gleichungen (17) erfüllt, wobei a_0 der Gleichung (16) genügt und die Parameter σ_j für $h_j = 0$ aus dem Bereich $|\sigma_j| \leqslant 1$ gewählt wurden. Wir haben gesehen, daß solche Elemente q existieren. Aus (17) folgt

$$\|x_0 - q\|_R = |a_0| . \tag{24}$$

In Verbindung mit der Ungleichung (20) erhalten wir daraus, daß q eine Lösung der Approximationsaufgabe (13) ist. In der umgekehrten Richtung gehen wir davon aus, daß q eine beste diskrete Approximation ist. Aus den Vorbetrachtungen folgt

$$\inf_{y \in L} \|x_0 - y\|_R = |a_0|,$$

also erfüllt q die Gleichung (24). Wenn $a_0 = 0$ ist erhalten wir daraus die Relationen

$$f_j(x_0 - q) = 0,$$

d.h. die Gleichungen (17) sind trivialerweise erfüllt. Für $a_0 \neq 0$ setzen wir in den Beziehungen (20) $y = q$ und erhalten anstelle der Ungleichungen die Gleichung

$$\frac{\left|\sum_{j=1}^{n+1} (-1)^j h_j f_j(x_0 - q)\right|}{\sum_{j=1}^{n+1} |h_j|\,\|f_j\|} = |a_0| .$$

Für $h_j \neq 0$ führen wir die Abkürzungen

$$\tau_j := \frac{f_j(x_0 - q)}{|a_0|\,\|f_j\|\,(-1)^j \operatorname{sign}(h_j)}$$

ein. Dann gelten für die Größen τ_j (wegen (24) und (14)) die Ungleichungen

$$|\tau_j| \leqslant 1$$

und die Gleichung

$$\left|\sum_{h_j \neq 0} |h_j|\,\|f_j\| \tau_j\right| = \sum_{h_j \neq 0} |h_j|\,\|f_j\| .$$

Diese Gleichung kann nur bestehen, wenn alle Größen τ_j ihren maximalen Betrag annehmen und einander gleich sind.

$$\forall h_j \neq 0 \colon\ \tau_j = \tau \wedge |\tau| = 1 .$$

Mit

$$\tau |a_0| = a_0$$

erhalten wir daraus bereits die Gleichungen (17′). Die Gleichungen (17″) werden in trivialer Weise erfüllt, denn wir benutzen sie zur Festlegung der Parameter σ_j für $h_j = 0$:

$$\sigma_j := \frac{f_j(x_0 - q)}{a_0 \|f_j\| (-1)^j} .$$

Der Parameter a_0 genügt automatisch der Gleichung (16), wenn die Gleichungen (17) erfüllt sind. Damit ist der Beweis für den Satz 2.1 beendet.

Der Satz 2.1 liefert gleichzeitig die Grundlage für den Algorithmus zur Berechnung aller besten diskreten Approximationen q bezüglich einer Referenz R. Es gibt zwei Varianten für den Algorithmus. Entweder berechnen wir alle Parameter $(a_0; a_1, \ldots, a_n)$ aus dem Gleichungssystem (23) oder wir bestimmen a_0 mit Hilfe der Gleichung (16), setzen diesen Wert in n Gleichungen des Systems (23) ein und lösen in diesen Gleichungen nach $a_1, \ldots, a_n$ auf. Die Gleichungen müssen so ausgewählt werden, daß die Koeffizientendeterminante bezüglich $(a_1, \ldots, a_n)$, das ist eine Haarsche Determinante, von null verschieden ist.

Wenn alle Haarschen Determinanten von null verschieden sind, ist die beste diskrete Approximation eindeutig bestimmt. Wenn gewisse Haarsche Determinanten h_j verschwinden, können die zugehörigen Parameter σ_j beliebig im Bereich $|\sigma_j| \leqslant 1$ festgelegt werden. Für jedes feste Tupel $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n+1})$ gibt es genau eine beste diskrete Approximation.

Es gelten folgende Abschätzungen:

$$\|x_0 - q\|_R \leqslant \|x_0 - p\|_R \leqslant \|x_0 - p\| = E \leqslant \|x_0 - q\|,$$

d.h.

$$\|x_0 - q\|_R \leqslant E \leqslant \|x_0 - q\| . \tag{25}$$

Wenn die Gleichung

$$\|x_0 - q\|_R = \|x_0 - q\|$$

besteht, ist q eine beste Approximation von x_0 in L $(q = p)$. Für beste Approximationen gilt ein entsprechender Charakterisierungssatz (vgl. I. Singer [7], H. Kiesewetter [2]).

SATZ 2.2 *Ein Element p aus L ist genau dann eine beste Approximation von x_0 in L, wenn eine Referenz R und eine komplexe Zahl τ vom Betrag $|\tau| = 1$ existieren, so daß für $h_j \neq 0$ die Gleichungen*

$$f_j(x_0-p) = \tau\,||x_0-p||\;||f_j||\,(-1)^j \operatorname{sign}(h_j) \tag{26'}$$

gelten und für $h_j = 0$ Zahlen σ_j mit $|\sigma_j| \leqslant 1$ existieren, so daß die Gleichungen

$$f_j(x_0-p) = \tau\,||x_0-p||\;||f_j||\,(-1)^j \sigma_j \tag{26''}$$

erfüllt sind.

Eine Referenz, welche die Gleichungen (26′) und (26″) erfüllt, bezeichnen wir als *optimale Referenz.*

3. Austauschalgorithmus nach Remes

Auf der Grundlage des Satzes 2.1 können wir zu vorgegebener Referenz R beste diskrete Approximationen q berechnen. Wir setzen diesen Algorithmus an, um schrittweise eine Folge von Referenzen

$$R^{(k)} = \{f_1^{(k)}(x), f_2^{(k)}(x), \ldots, f_{n+1}^{(k)}(x)\}, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

und eine Folge von zugehörigen besten diskreten Approximationen $q^{(k)}$ zu konstruieren, die folgende Bedingungen erfüllen:

$$|a_0^{(k)}| < |a_0^{(k+1)}| < \ldots \leqslant E, \tag{2}$$

$$\lim_{k\to\infty}\{||x_0-q^{(k)}|| - ||x_0-q^{(k)}||_{R^{(k)}}\} = 0. \tag{3}$$

Alle Größen, die zur Referenz $R^{(k)}$ gehören, bezeichnen wir mit einem oberen Zeiger k.

Beim Übergang von $R^{(k)}$ nach $R^{(k+1)}$ werden wir ein oder mehrere Funktionale der alten Referenz durch neue Funktionale austauschen. Wenn es gelingt, die Auswahl der neuen Funktionale und den Austausch so vorzunehmen, daß die Bedingungen (2) und (3) erfüllt werden, dann erhalten wir die Beziehung

$$\lim_{k\to\infty}||x_0-q^{(k)}|| = E. \tag{4}$$

Hieraus ergibt sich, daß die Folge $\{q^{(k)}\}$ eine Teilfolge enthält, die gegen eine beste Approximation p konvergiert.

Darin besteht der Grundgedanke der aufsteigenden Verfahren zur Konstruktion von besten Approximationen. Diese Verfahren wurden am Beispiel der gleichmäßigen Approximation von stetigen Funktionen von einer Veränderlichen durch Polynome entwickelt. In diesem Fall kann man einfache Austauschregeln angeben, die zur Konvergenz führen. Diese Austauschregeln bestimmen den *Remes-Algorithmus.* Wir werden in diesem Paragraphen den Austausch von Stützfunktionalen allgemein, d.h. für Approximationsaufgaben in beliebigen normierten Räumen, analysieren

und Bedingungen für die Übertragung des Remes-Algorithmus auf den allgemeinen Fall angeben. Diese Fragen wurden zuerst von P. J. Laurent [4] untersucht.

Bei allen folgenden Betrachtungen beziehen wir uns auf reelle Räume, während die vorangehenden Formeln und Sätze so formuliert wurden, das sie auch für komplexe Räume gelten.

Wir untersuchen zuerst die Aufstiegsbedingungen (2) und zwar für den Fall, daß ein neues Funktional $e^{(k)}(x)$gegen ein altes Funktional $f_l^{(k)}(x)$ ausgetauscht wird.

$$f_j^{(k+1)}(x) \mathrel{!=} \begin{cases} f_j^{(k)}(x) & \text{für} \quad j \neq l, \\ e^{(k)}(x) & \text{für} \quad j = l. \end{cases} \tag{5}$$

Wir führen folgende Bezeichnungen ein:

$$\frac{|e^{(k)}(x_0-q^{(k)})|}{||e^{(k)}||} = !\,\alpha^{(k)}, \tag{6}$$

$$\operatorname{sign}\left(\frac{f_l^{(k)}(x_0-q^{(k)})}{e^{(k)}(x_0-q^{(k)})}\right) = !\,\tau_l^{(k)}, \tag{7}$$

wobei wir voraussetzen, daß die Ungleichung

$$f_l^{(k)}(x_0-q^{(k)})\,.\,e^{(k)}(x_0-q^{(k)})\,.\,a_0^{(k)} \neq 0 \tag{8}$$

gilt. Ausgehend von der Gleichung

$$a_0^{(k+1)} = \varphi^{(k+1)}(x_0-q^{(k)})$$

erhalten wir folgende Beziehung zwischen $a_0^{(k+1)}$ und $a_0^{(k)}$

$$a_0^{(k+1)} = \frac{\tau_l^{(k)}}{\operatorname{sign}(a_0^{(k)})}\;\frac{\alpha^{(k)}|h_l^{(k)}|\;||e^{(k)}|| + |a_0^{(k)}| \sum\limits_{j\neq l} \sigma_j^{(k)} \dfrac{h_j^{(k+1)}}{\tau_l^{(k)}}\,||f_j^k||}{|h_l^{(k)}|\;||e^{(k)}|| + \sum\limits_{j\neq l} |h_j^{(k+1)}|\;||f_j^{(k)}||}\,. \tag{9}$$

Wir führen drei Indexmengen ein, durch welche die Terme mit gleichen Vorzeichenverhalten im Zähler der Formel (9) zusammengefasst werden.

$$J_0^{(k)} \mathrel{!=} \{j\colon h_j^{(k)} = 0\}, \tag{10}$$

$$\begin{aligned} J_+^{(k)}(l) \mathrel{!=} \{j\colon (j \neq l \wedge h_j^{(k)} \neq 0 \wedge h_j^{(k+1)} = 0) \vee \\ \vee (j \neq l \wedge h_j^{(k)} h_j^{(k+1)} \neq 0 \wedge \sigma_j^{(k)} = \tau_l^{(k)}\sigma_j^{(k+1)})\}, \end{aligned} \tag{10'}$$

$$J_-^{(k)}(l) \mathrel{!=} \{j\colon j \neq l \wedge h_j^{(k)} h_j^{(k+1)} \neq 0 \wedge \sigma_j^{(k)} = -\tau_l^{(k)}\sigma_j^{(k+1)}\}. \tag{10''}$$

Die Terme, die zur Indexmenge $J_+^{(k)}(l)$ gehören, sind günstig für den Aufstieg, die übrigen sind ungünstig. Mit der Abkürzung

$$d^{(k)}(l) \mathrel{!=} \frac{\begin{aligned}(\alpha^{(k)} - |a_0^{(k)}|)\,|h_l^{(k)}|\;||e^{(k)}|| - |a_0^{(k)}| \sum_{j\in J_0^{(k)}} \Bigg(|h_j^{(k+1)}| - \\ - \sigma_j^{(k)} \frac{h_j^{(k+1)}}{\tau_l^{(k)}}\Bigg)||f_j^{(k)}|| - 2|a_0^{(k)}| \sum_{j\in J_-^{(k)}(l)} |h_j^{(k+1)}|\;||f_j^{(k)}||\end{aligned}}{|h_l^{(k)}|\;||e^{(k)}|| + \sum\limits_{j\neq l} |h_j^{(k+1)}|\;||f_j^{(k)}||} \tag{11}$$

erhalten wir aus (9) die Formel

$$|a_0^{(k+1)}| = |a_0^{(k)}| + d^{(k)}(l). \tag{12}$$

Satz 3.1 *Der Austausch* (5) *bewirkt genau dann einen Aufstieg* ($|a_0^{(k+1)}| > |a_0^{(k)}|$), *wenn die Bedingung*

$$d^{(k)}(l) > 0 \tag{13}$$

erfüllt ist.

An dieser Stelle wird zum ersten Mal die Voraussetzung wirksam, daß alle Größen reell sind. Wir bezeichnen die Bedingung (13) als Aufstiegsbedingung. Aus (12) folgt die Abschätzung

$$d^{(k)}(l) \leqslant E - |a_0^{(k)}|. \tag{14}$$

Um die Konvergenz zu sichern, müssen wir die Bedingung (13) verschärfen. Dazu führen wir weitere Bedingungen ein, die insbesondere bei der gleichmäßigen Approximation von stetigen Funktionen einer Veränderlichen durch Polynome erfüllt sind, d.h. im klassischen Fall der Anwendung des Remes-Algorithmus. Wir sagen: *Eine Referenz R erfüllt die Haarsche Bedingung*, wenn alle Haarschen Determinanten von null verschieden sind. Wir formulieren vier Bedingungen:

$$\forall k = 1, 2, \ldots: \ J_0^{(k)} = \emptyset. \tag{15}$$

D.h. alle Referenzen $R^{(k)}$ erfüllen die Haarsche Bedingung.

$$\forall k = 1, 2, \ldots: \ \alpha_0^{(k)} = \|x_0 - q^{(k)}\|. \tag{16}$$

D.h. $e^{(k)}(x)$ ist auf $x_0 - q^{(k)}$ maximal.

$$\forall k = 1, 2, \ldots \ \exists l \in \{1, 2, \ldots, n+1\}: \ J_-^{(k)}(l) = \emptyset. \tag{17}$$

D.h. es existiert ein Austauschfunktional $f_l^{(k)}(x)$ mit günstiger Aufstiegsbedingung;

(18) $\forall k = 1, 2, \ldots \ \exists \delta$, unabhängig von k:

$$\frac{|h_l^{(k)}| \, \|e^{(k)}\|}{|h_l^{(k)}| \, \|e^{(k)}\| + \sum_{j \neq l} |h_j^{(k+1)}| \, \|f_j^{(k)}\|} \geqslant \delta > 0.$$

Unter diesen Bedingungen erhalten wir die Konvergenz des Verfahrens.

Satz 3.2 *Unter den Bedingungen* (15), (16), (17) *und* (18) *konvergiert der Austauschalgorithmus* (5).

Der Beweis geht von der Formel (12) aus (vgl. P. J. Laurent [4]). Unter Berücksichtigung von (11), (15), (17) und (18) erhalten wir die Ungleichungen

$$\begin{aligned} E - |a_0^{(k+1)}| &\leqslant \left(1 - \delta \, \frac{\alpha^{(k)} - |a_0^{(k)}|}{E - |a_0^{(k)}|}\right)(E - |a_0^{(k)}|) \\ &\leqslant (1-\delta)(E - |a_0^{(k)}|), \end{aligned} \tag{19}$$

welche sichern, daß die Folge $\{|a_0^{(k)}|\}$ gegen E konvergiert.

$$\lim_{k\to\infty} |a_0^{(k)}| = E. \tag{20}$$

Aus (11), (14) und (18) erhalten wir die Abschätzung

$$(\alpha^{(k)} - |a_0^{(k)}|)\,\delta \leqslant d^{(k)}(l) \leqslant E - |a_0^{(k)}|.$$

Unter Beachtung von (16) ergibt sich daraus die Ungleichung

$$\|x_0 - q^{(k)}\| - E \leqslant \frac{1-\delta}{\delta}(E - |a_0^{(k)}|), \tag{21}$$

d.h. es gilt

$$\lim_{k\to\infty} \|x_0 - q^{(k)}\| = E. \tag{22}$$

Die Folge $\{q^{(k)}\}$ ist eine beschränkte Folge in einem endlich-dimensionalen Raum. Also existiert eine konvergente Teilfolge, deren Grenzwert auf Grund von (22) eine beste Approximation ist.

Wir betrachten als Beispiel die oben erwähnte Aufgabe der gleichmäßigen Approximation von stetigen Funktionen einer Veränderlichen durch Polynome. Dann gelten folgende Beziehungen:

$$X = C[a, b], \quad L = L\{1, t, \ldots, t^{n-1}\}, \tag{23}$$

$$a \leqslant t_1^{(k)} < t_2^{(k)} < \ldots < t_{n+1}^{(k)} \leqslant b, \tag{24}$$

$$R^{(k)} = \{x(t_1^{(k)}), x(t_2^{(k)}), \ldots, x(t_{n+1}^{(k)})\}. \tag{25}$$

Die Haarschen Determinanten sind Vandermondesche Determinanten, die bei der Anordnung (24) alle positiv sind.

$$h_j^{(k)} = \prod_{\substack{1 \leqslant i < l \leqslant n+1 \\ i, l \neq j}} (t_l^{(k)} - t_i^{(k)}) > 0. \tag{26}$$

Die Gleichungen (2.17) nehmen folgende Form an:

$$x_0(t_j^{(k)}) - q^{(k)}(t_j^{(k)}) = a_0^{(k)}(-1)^j, \quad j = 1, 2, \ldots, n+1. \tag{27}$$

Die Bedingung (18) ist erfüllt, wenn ein minimaler Abstand zwischen benachbarten Stützstellen existiert

$$t_{j+1}^{(k)} - t_j^{(k)} \geqslant \Delta. \tag{28}$$

Das muß bewiesen werden. Dann erhalten wir die Abschätzungen

$$\Delta^{n(n-1)/2} \leqslant h_j^{(k)} \leqslant (b-a)^{n(n-1)/2} \tag{29}$$

und

$$\frac{|h_l^{(k)}|}{|h_l^{(k)}| + \sum_{j \neq l} |h_j^{(k+1)}|} \geqslant \frac{1}{n+1}\left(\frac{\Delta}{b-a}\right)^{n(n-1)/2} = \delta > 0. \tag{30}$$

Das Austauschfunktional $e^{(k)}(x)$ wird durch eine Maximalstelle von $x_0(t) - q^{(k)}(t)$ bestimmt;

$$|x_0(t_e^{(k)}) - q^{(k)}(t_e^{(k)})| = \|x_0 - q^{(k)}\|, \tag{31}$$

$$e^{(k)}(x) = x(t_e^{(k)}). \tag{31'}$$

Die Bedingung (17) ist erfüllt, wenn wir folgende Austauschbedingungen festlegen:

$$(32)\quad l=\begin{cases} j & \text{für}\quad t_j^{(k)}<t_e^{(k)}<t_{j+1}^{(k)}\wedge \operatorname{sign}\big(x_0(t_e^{(k)})-q^{(k)}(t_e^{(k)})\big)\\ & \qquad = \operatorname{sign}\big(x_0(t_j^{(k)})-q^{(k)}(t_j^{(k)})\big),\\ j+1 & \text{für}\quad t_j^{(k)}<t_e^{(k)}<t_{j+1}^{(k)}\wedge \operatorname{sign}\big(x_0(t_e^{(k)})-q^{(k)}(t_e^{(k)})\big)\\ & \qquad = -\operatorname{sign}\big(x_0(t_j^{(k)})-q^{(k)}(t_j^{(k)})\big),\\ 1 & \text{für}\quad a\leqslant t_e^{(k)}<t_1^{(k)}\wedge \operatorname{sign}\big(x_0(t_e^{(k)})-q^{(k)}(t_e^{(k)})\big)\\ & \qquad = \operatorname{sign}\big(x_0(t_1^{(k)})-q^{(k)}(t_1^{(k)})\big),\\ n+1 & \text{für}\quad a\leqslant t_e^{(k)}<t_1^{(k)}\wedge \operatorname{sign}\big(x_0(t_e^{(k)})-q^{(k)}(t_e^{(k)})\big)\\ & \qquad = -\operatorname{sign}\big(x_0(t_1^{(k)})-q^{(k)}(t_1^{(k)})\big),\\ n+1 & \text{für}\quad t_{n+1}^{(k)}<t_e^{(k)}\leqslant b\wedge \operatorname{sign}\big(x_0(t_e^{(k)})-q^{(k)}(t_e^{(k)})\big)\\ & \qquad = \operatorname{sign}\big(x_0(t_{n+1}^{(k)})-q^{(k)}(t_{n+1}^{(k)})\big),\\ 1 & \text{für}\quad t_{n+1}^{(k)}<t_e^{(k)}\leqslant b\wedge \operatorname{sign}\big(x_0(t_e^{(k)})-q^{(k)}(t_e^{(k)})\big)\\ & \qquad = -\operatorname{sign}\big(x_0(t_{n+1}^{(k)})-q^{(k)}(t_{n+1}^{(k)})\big).\end{cases}$$

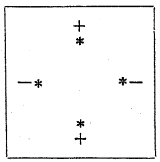
Das sind die Austauschbedingungen des Remes-Algorithmus. Sie entsprechen einem Austausch mit der „nächstgelegenen vorzeichengleichen Stützstelle". Bereits bei der gleichmäßigen Approximation von stetigen Funktionen von zwei Veränderlichen versagt diese Austauschregel, weil für mehrdimensionale Gebiete keine Anordnung der Stützstellen festgelegt ist und kein Koordinatensystem existiert, für welches alle Referenzen mit paarweise verschiedenen Stützstellen die Haarsche Bedingung erfüllen. Beispielsweise gibt es bei der gleichmäßigen Approximation von stetigen Funktionen $x(s,t)$ auf dem Quadrat

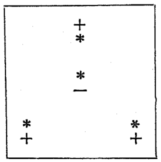
$$0\leqslant s\leqslant 1,\quad 0\leqslant t\leqslant 1$$

durch lineare Funktionen

$$a_1+a_2 s+a_3 t$$

zwei Vorzeichenklassen von Referenzen, die durch folgende Lagebeziehungen und Vorzeichenverteilungen charakterisiert werden können:





Die Vorzeichenklassen können durch Vertauschung der Stützstellen nicht ineinander übergeführt werden. Wenn die Ausgangsreferenz in einer anderen Vorzeichenklasse liegt als die optimale Referenz, muß im Laufe der Berechnung die Vorzeichenklasse gewechselt werden. Dabei wird die Bedingung (17) verletzt.

Auch bei der Spline-Approximation von Funktionen einer oder mehrerer Veränderlichen, ebenso wie bei vielen anderen Approximationsaufgaben, kann die

Haarsche Bedingung im allgemeinen nicht erfüllt werden. Deshalb ist es notwendig, Austauschregeln zu suchen, die nicht an die Haarsche Bedingung gebunden sind. Wir werden solche Regeln aufstellen. Dabei wird sich zeigen, daß wir verschwindende Haarsche Determinanten nicht meiden sondern suchen müssen. Ganz zwangsläufig kommen wir dabei zu Verfahren, die eine Verbindung zwischen dem Remes-Algorithmus im Raum $C[a,b]$ und dem Projektionsalgorithmus im Hilbertraum herstellen.

4. Austausch mit interpolierenden Funktionalen

Wir werden zuerst die Gleichungen für den Algorithmus zur Berechnung von besten diskreten Approximationen auf eine einfache Form bringen. Diese Form wurde von Vy Nguyen-mau [6] im Zusammenhang mit der Anwendung approximationstheoretischer Algorithmen auf die numerische Lösung linearer Gleichungssysteme ausgearbeitet. Für die Beschreibung der nachfolgenden Verfahren reicht es aus, wenn wir die Formeln für einen Austauschschritt aufstellen. Dabei legen wir n Funktionale

$$(1)\qquad \{g_1(x), g_2(x), \ldots, g_n(x)\}$$

als Basisfunktionale fest und setzen voraus, daß die zugehörige Haarsche Determinante von null verschieden ist. In jeder Referenz können wir n Funktionale in dieser Weise auswählen, denn mindestens eine Haarsche Determinante muß von null verschieden sein. Den Austausch vollziehen wir immer durch Vergleich mit dem Funktional $f(x)$. Dieses Funktional nennen wir *Austauschfunktional.* Das neue Funktional, das für den Austausch zur Verfügung gestellt wird, bezeichnen wir mit $e(x)$:

$$(2)\qquad R=\{g_1(x),\ldots,g_n(x),f(x)\},$$

$$(3)\qquad G:=\begin{bmatrix} g_1(x_1) & \ldots & g_1(x_n)\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ g_n(x_1) & \ldots & g_n(x_n)\end{bmatrix},\quad \det(G)\neq 0,$$

$$(4)\qquad G^{-1}=\begin{bmatrix} \gamma_{11} & \ldots & \gamma_{1n}\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ \gamma_{n1} & \ldots & \gamma_{nn}\end{bmatrix},$$

R ist genau dann eine Referenz, wenn $\|f\|>0$ gilt. Der Algorithmus zur Berechnung von besten diskreten Approximationen enthält drei Teilschritte. Zuerst bestimmen wir eine Linearkombination von Funktionalen der Referenz R, die auf L orthogonal ist (Orthogonalisierung).

$$(5)\qquad f(x_k)+\sum_{j=1}^{n} c_j g_j(x_k)=0,\quad k=1,2,\ldots,n.$$

Dann bilden wir mit den Koeffizienten c_j das Funktional

$$(6)\qquad \varphi(x):=\frac{f(x)+\sum_{j=1}^{n} c_j g_j(x)}{\|f\|+\sum_{j=1}^{n}|c_j|\,\|g_j\|}$$

und berechnen den Parameter

$$(7)\qquad a_0 \mathrel{!=} \frac{f(x_0)+\sum_{j=1}^{n} c_j g_j(x_0)}{||f||+\sum_{j=1}^{n} |c_j|\,||g_j||}.$$

Im dritten Teilschritt stellen wir die Gleichungen auf, welche die besten diskreten Approximationen q charakterisieren (vgl. (1.17)) und lösen diese Gleichungen. Für $c_j \neq 0$ setzen wir

$$(8')\qquad \sigma_j \mathrel{!=} \operatorname{sign}(c_j)$$

und für $c_j = 0$ wählen wir den Parameter σ_j beliebig aus dem Bereich

$$(8'')\qquad |\sigma_j| \leqslant 1.$$

Die Gleichungen

$$(9)\qquad g_j(x_0-q) = a_0||g_j||\sigma_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

charakterisieren die besten diskreten Approximationen q. Sie stellen Maximalbedingungen bezüglich der diskreten Norm

$$||x_0-q||_R = |a_0|$$

dar (Maximierung).

Aus der Relation

$$a_0 = \varphi(x_0) = \varphi(x_0-q)$$

ergibt sich in Verbindung mit den Gleichungen (9) die Beziehung

$$(10)\qquad f(x_0-q) = a_0||f||.$$

Für q machen wir den Ansatz

$$(11)\qquad q = \sum_{k=1}^{n} a_k x_k$$

und gehen damit in the Gleichungen (9) ein. Dann entsteht das lineare Gleichungssystem

$$(12)\qquad \sum_{j=1}^{n} g_j(x_k)a_k = g_j(x_0)-a_0||g_j||\sigma_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

zur Berechnung der Parameter $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Wir schreiben die Gleichungen (5) und (12) in Matrizenform. Dazu führen wir folgende Vektoren ein:

$$(13)\qquad \boldsymbol{f} \mathrel{!=} \begin{bmatrix} f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{c} \mathrel{!=} \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{g}(x_0) \mathrel{!=} \begin{bmatrix} g_1(x_0) \\ \vdots \\ g_n(x_0) \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{s} \mathrel{!=} \begin{bmatrix} ||g_1||\sigma_1 \\ \vdots \\ ||g_n||\sigma_n \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a} \mathrel{!=} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}.$$

Alle Vektoren sind Spaltenvektoren. Die entsprechenden Zeilenvektoren und transponierte Matrizen bezeichnen wir mit einem Strich. Dann erhalten wir folgende Formeln zur Berechnung der Vektoren $\boldsymbol{c}$ und $\boldsymbol{a}$:

$$(14)\qquad \boldsymbol{c}' = -\boldsymbol{f}'G^{-1},$$

$$(15)\qquad \boldsymbol{a} = G^{-1}\big(\boldsymbol{g}(x_0)-a_0\boldsymbol{s}\big).$$

Die Formeln (14), (7) und (15) bestimmen in dieser Reihenfolge den Algorithmus zur Berechnung von besten diskreten Approximationen. Die Formel (14) entspricht der Orthogonalisierung und die Formel (15) der Maximierung.

Wenn ein neues Funktional $e(x)$ zur Verfügung gestellt wird, bestimmen wir die Grössen

$$(16)\qquad \frac{|e(x_0-q)|}{||e||} =! \alpha$$

und

$$(17)\qquad \operatorname{sign}\left(\frac{f(x_0-q)}{e(x_0-q)}\right) =! \tau.$$

Mit

$$(18)\qquad \boldsymbol{e}' \mathrel{!=} \big(e(x_1), e(x_2), \ldots, e(x_n)\big)$$

berechnen wir den Vektor

$$(19)\qquad \boldsymbol{c}(e)' = -\boldsymbol{e}'G^{-1}$$

und den Parameter

$$(20)\qquad a_0(e) \mathrel{!=} \frac{e(x_0)+\sum_{j=1}^{n} c_j(e)g_j(x_0)}{||e||+\sum_{j=1}^{n} |c_j(e)|\,||g_j||}.$$

Die Relation zwischen a_0 und $a_0(e)$ lautet:

$$(21)\qquad a_0(e) = \frac{\tau}{\operatorname{sign}(a_0)}\,\frac{\alpha||e||+|a_0|\sum_{j=1}^{n}\sigma_j\frac{c_j(e)}{\tau}||g_j||}{||e||+\sum_{j=1}^{n}|c_j(e)|\,||g_j||}.$$

Für $c_j(e) \neq 0$ setzen wir

$$(22')\qquad \sigma_j(e) \mathrel{!=} \operatorname{sign}\big(c_j(e)\big)$$

und für $c_j(e) = 0$ wählen wir $\sigma_j(e)$ beliebig aus dem Bereich

$$(22')\qquad |\sigma_j(e)| \leqslant 1.$$

Wir führen folgende Indexmengen ein:

$$(23)\qquad J_0 \mathrel{!=} \{j\colon c_j = 0\},$$

$$(23')\qquad J_+ \mathrel{!=} \big\{j\colon (c_j \neq 0 \wedge c_j(e) = 0) \vee \big(c_j\,.\,c_j(e) \neq 0 \wedge \sigma_j = \tau\sigma_j(e)\big)\big\},$$

$$(23'')\qquad J_- \mathrel{!=} \{j\colon c_j\,.\,c_j(e) \neq 0 \wedge \sigma_j = -\tau\sigma_j(e)\}.$$

Mit der Abkürzung

$$(24)\qquad d\,!=\frac{(\alpha-|a_0|)\|e\|-|a_0|\sum\limits_{j\in J_0}\left(|c_j(e)|-\sigma_j\dfrac{c_j(e)}{\tau}\right)\|g_j\|-2|a_0|\sum\limits_{j\in J_-}|c_j(e)|\,\|g_j\|}{\|e\|+\sum\limits_{j=1}^{n}|c_j(e)|\,\|g_j\|}$$

erhalten wir die Beziehung

$$(25)\qquad |a_0(e)|=|a_0|+d.$$

SATZ 4.1 *Der Austausch von $f(x)$ gegen $e(x)$ bewirkt genau dann einen Aufstieg ($|a_0(e)|>|a_0|$), wenn die Bedingung $d>0$ erfüllt ist.*

Auch hier gilt die Ungleichung

$$(26)\qquad d\leqslant E-|a_0|.$$

Der Austausch von $f(x)$ gegen $e(x)$ verläuft günstig, wenn die Bedingungen

$$(27)\qquad \sum_{j\in J_0}\left(|c_j(e)|-\sigma_j\frac{c_j(e)}{\tau}\right)\|g_j\|=0$$

und

$$(28)\qquad J_-=\emptyset$$

gelten. Die Bedingung (27) kann in zweierlei Weise beeinflußt werden. Entweder muß man verschwindende Koeffizienten (d.h. verschwindende Haarsche Determinanten) beibehalten, d.h.

$$(29)\qquad c_j(e)=0\quad \text{für}\quad c_j=0,$$

oder man muß für $c_j(e)\neq 0$ den Parameter σ_j so variieren, daß

$$(30)\qquad \sigma_j=\tau\sigma_j(e)$$

gilt. Die letzte Bedingung kann man nicht einfach fordern, denn zuerst legen wir σ_j für $j\in J_0$ im Bereich (8″) fest, dann berechnen wir q und danach bestimmen wir $e(x)$ in der Regel als maximales Funktional auf x_0-q. Daraus folgt, daß $\sigma_j(e)$ und σ_j sich gegenseitig bedingen. Wir werden auf dieses Problem noch zurückkommen.

Hinsichtlich der Bedingung (28) ist die Situation einfacher. Aus der Definition der Indexmenge J_- gemäß (23″) folgt, daß wir günstige Vorzeichen bekommen, wenn wir mit dem neuen Funktional $e(x)$ in der „Nähe" von $f(x)$ bleiben. Gleichzeitig sind wir aber daran gebunden, daß mit dem Funktional $e(x)$ ein möglichst großer Wert des Parameters α (vgl. (16)) erzielt werden soll. Beiden Gesichtspunkten wird Rechnung getragen, wenn wir anstelle von $e(x)$ mit dem interpolierenden Funktional

$$(31)\qquad e_w(x)\,!=f(x)+w\frac{e(x)}{\tau},\quad w\geqslant 0$$

arbeiten. Den Parameter w nennen wir Interpolationsparameter. Wir betrachten nur nichtnegative Werte von w. Für genügend kleine Werte von w ist die Bedingung (28) auf alle Fälle erfüllt. Wir müssen also nur sichern, daß der Parameter α bereits für kleine Werte von w ansteigt. Dabei können wir auf die bekannten Formeln zurückgreifen.

Wir setzen:

$$(32)\qquad a_0(w)\,!=\frac{f(x_0)+w\dfrac{e(x_0)}{\tau}+\sum\limits_{j=1}^{n}\left(c_j+w\dfrac{c_j(e)}{\tau}\right)g_j(x_0)}{\left\|f+w\dfrac{e}{\tau}\right\|+\sum\limits_{j=1}^{n}\left|c_j+w\dfrac{c_j(e)}{\tau}\right|\|g_j\|}$$

und

$$(33)\qquad \eta(w)\,!=\frac{1}{w}\left(\|f\|+w\|e\|-\left\|f+w\frac{e}{\tau}\right\|\right)\geqslant 0.$$

Die Funktion $\eta(w)$ ist für $w\geqslant 0$ monoton fallend oder identisch gleich null. Der Grenzwert

$$(34)\qquad \eta(0)=\|e\|-\lim_{w\to 0}\frac{1}{w}\left(\left\|f+w\frac{e}{\tau}\right\|-\|f\|\right)$$

existiert (vgl. Dunford–Schwartz [1]).

Wir erhalten folgende Beziehung zwischen $a_0(w)$ und a_0 (vgl. (3.9))

$$(35)\qquad a_0(w)=\frac{1}{\operatorname{sign}(a_0)}\,\frac{|a_0|\,\|f\|+w\alpha\|e\|+|a_0|\sum\limits_{j=1}^{n}\sigma_j\left(c_j+w\dfrac{c_j(e)}{\tau}\right)\|g_j\|}{\|f\|+w\|e\|-w\eta(w)+\sum\limits_{j=1}^{n}\left|c_j+w\dfrac{c_j(e)}{\tau}\right|\|g_j\|}.$$

Die Indexmenge J_0 ändert sich nicht. In Abhängigkeit von w führen wir folgende Indexmengen ein:

$$(36)\qquad J_+(w)\,!=\left\{j\colon\ c_j\neq 0\wedge\sigma_j=\operatorname{sign}\left(c_j+w\frac{c_j(e)}{\tau}\right)\right\},$$

$$(36')\qquad J_-(w)\,!=\left\{j\colon\ c_j\neq 0\wedge\sigma_j=-\operatorname{sign}\left(c_j+w\frac{c_j(e)}{\tau}\right)\right\}.$$

Für $w=0$ ergeben sich die Beziehungen

$$(37)\qquad J_+(0)=\{1,\ldots,n\}\setminus J_0,\quad J_-(0)=\emptyset$$

und für $w=\infty$

$$(38)\qquad J_+(\infty)=J_+,\quad J_-(\infty)=J_-.$$

Mit der Abkürzung

$$(39)\quad d(w) := \frac{w\left[(\alpha-|a_0|)\,||e||+|a_0|\,\eta(w)-|a_0|\sum_{j\in J_0}\left(|c_j(e)|-\sigma_j\frac{c_j(e)}{\tau}\right)||g_j||\right]-2|a_0|\sum_{j\in J_0(w)}\left|c_j+w\frac{c_j(e)}{\tau}\right|\,||g_j||}{||f||+w\,||e||-w\eta(w)+\sum_{j=1}^{n}\left|c_j+w\frac{c_j(e)}{\tau}\right|\,||g_j||}$$

erhalten wir aus Gleichung (35) die Formel

$$(40)\qquad |a_0(w)| = |a_0|+d(w).$$

Wenn w genügend klein gewählt wird, tritt der zweite Term im Zähler von Gleichung (39) nicht auf. Also entscheidet der erste Term über den Aufstieg.

SATZ 4.2 *Genau dann, wenn die Bedingung*

$$(41)\qquad (\alpha-|a_0|)\,||e||+|a_0|\,\eta(0)-|a_0|\sum_{j\in J_0}\left(|c_j(e)|-\sigma_j\frac{c_j(e)}{\tau}\right)||g_j|| > 0$$

erfüllt ist, existiert ein Interpolationsparameter w mit $|a_0(w)| > |a_0|$.

Offensichtlich ist die Bedingung (41) für den Austausch mit einem interpolierenden Funktional günstiger als die entsprechende Bedingung für den direkten Austausch (vgl. Satz 4.1), denn die Terme mit $j\in J_-$ fehlen. Wenn die Größe $\eta(0)$ positiv ist, verstärkt sie sogar den Aufstieg. Im allgemeinen können wir aber nicht damit rechnen, daß die Größe $\eta(0)$ in Erscheinung tritt ($\eta(0) = 0$).

Wir nehmen jetzt an, daß das Funktional $e(x)$ die Bedingung (41) erfüllt. Wir stellen die Frage: Für welchen Wert von w ($w > 0$) erhalten wir den größten Aufstieg?

Wir beantworten diese Frage unter der vereinfachenden Voraussetzung, daß der Term $\eta(w)$ nicht auftritt. Wir setzen:

$$(42)\qquad A_0(w) := \frac{|a_0|\,||f||+w\alpha\,||e||+|a_0|\sum_{j=1}^{n}\sigma_j\left(c_j+w\frac{c_j(e)}{\tau}\right)||g_j||}{||f||+w\,||e||+\sum_{j=1}^{n}\left|c_j+w\frac{c_j(e)}{\tau}\right|\,||g_j||}.$$

Es besteht die Ungleichung

$$(43)\qquad |A_0(w)| \leqslant |a_0(w)| \leqslant E.$$

Der Zähler der Funktion $A_0(w)$ ist eine lineare Funktion und der Nenner eine stetige, stückweise lineare Funktion, d.h. $A_0(w)$ ist eine stetige, stückweise linear gebrochene Funktion. Die Knickstellen werden durch die Nullstellen derjenigen Terme

$$\left|c_j+w\frac{c_j(e)}{\tau}\right|$$

bestimmt, deren Indizes zur Indexmenge J_- gehören. Wir ordnen die Knickstellen nach der Größe.

$$(44)\qquad c_{j_k}+w_k\frac{c_{j_k}(e)}{\tau} = 0,$$

$$(44')\qquad 0 < w_1 \leqslant w_2 \leqslant \ldots \leqslant w_m < \infty,$$

$$(44'')\qquad J_- = \{j_1, j_2, \ldots, j_m\}.$$

Die Knickstellen w_k können zusammenfallen. Jedes Intervall zwischen den Knickstellen ist ein Monotonieintervall der Funktion $A_0(w)$. Also nimmt die Funktion $A_0(w)$ ihr Maximum in $w = 0$, $w = \infty$ oder in einer Knickstelle $w = w_1$ an. Es läßt sich zeigen, daß die Funktion $A_0(w)$ im Intervall $0 \leqslant w \leqslant \infty$ höchstens zweimal das Monotonieverhalten ändert und daß die erste Extremstelle eine Maximalstelle ist (vgl. H. Kiesewetter [2]). Wir bezeichnen die Maximalstelle mit w^* und nennen w^* einen *optimalen Interpolationsparameter*

$$(45)\qquad A_0(w^*) = \max_{0\leqslant w\leqslant\infty} A_0(w).$$

Um w^* zu bestimmen, berechnen wir der Reihe nach die Werte

$$(46)\qquad |a_0| = A_0(0),\ A_0(w_1),\ \ldots,\ A_0(w_m),\ A_0(\infty).$$

Wenn diese Folge streng monoton wächst, ist $w^* = \infty$ der optimale Interpolationsparameter. Andernfalls gibt es einen ersten Index l, so daß die Bedingungen

$$(47)\qquad w_l < w_{l+1} \wedge A_0(w_l) \geqslant A_0(w_{l+1})$$

erfüllt sind. Dann ist $w^* = w_l$ ein optimaler Interpolationsparameter. Wenn die Bedingung (47) schon für $l = 0$ erfüllt ist ($A_0(0) \geqslant A_0(w_1)$), ist $w^* = 0$ ein optimaler Interpolationsparameter, d.h. mit dem Funktional $e(x)$ ist kein Aufstieg möglich.

5. Orthomax-Algorithmus

Wir formulieren nun einen aufsteigenden Algorithmus zur Konstruktion von besten Approximationen. Dabei beziehen wir uns auf die Analyse der Aufstiegsbedingungen. Wir benutzen interpolierende Funktionale. Aufgrund der günstigen Aufstiegsbedingungen können wir ein Funktional $f(x)$ der Referenz als Austauschfunktional festlegen und das neue Funktional $e(x)$ immer mit diesem Austauschfunktional vergleichen. Beim direkten Austausch wäre ein solches Vorgehen nicht möglich, da im allgemeinen bei wiederholtem Austausch mit dem gleichen Funktional keine Verbesserung erzielt werden kann.

Wir berechnen einen optimalen Interpolationsparameter w^* für den Austausch von $f(x)$ gegen das interpolierende Funktional

$$(1)\qquad f(x)+w\frac{e(x)}{\tau}.$$

Für $w^* = \infty$ ist der direkte Austausch von $f(x)$ gegen $e(x)$ optimal. Für $w^* = 0$ kann mit dem Funktional $e(x)$ kein Aufstieg erreicht werden. Für $w^* = w_l$ verschwindet der Koeffizient

$$c_{j_l} + w^* \frac{c_{j_l}(e)}{\tau} = 0. \tag{2}$$

Das bedeutet, daß der optimale Aufstieg erreicht wird, wenn eine Haarsche Determinante verschwindet, denn der Koeffizient (2) entspricht einer Haarschen Determinante der Referenz mit dem interpolierenden Funktional (1). Wir können sagen: Der Algorithmus erzeugt verschwindende Haarsche Determinanten.

Aufgrund der Gleichung (2) tritt das Funktional $g_{j_l}(x)$ in der Formel (4.42) nicht auf. Wir erhalten den gleichen Aufstieg mit dem Wert $A_0(w^*)$ für die diskrete Norm, wenn wir in der Referenz R das Funktional $f(x)$ unverändert beibehalten und das Funktional $g_{j_l}(x)$ gegen $e(x)$ austauschen. Auf diese Weise regelt der Algorithmus selbsttätig den Austausch. Er bestimmt automatisch einen Austausch mit optimalem Aufstieg. Der Algorithmus besteht im wesentlichen darin, daß im Wechsel orthogonalisiert und maximiert wird. Deshalb wird die Bezeichnung „Orthomax-Algorithmus" eingeführt.

Der Orthomax-Algorithmus wurde in seinen Grundzügen in meinem Buch (H. Kiesewetter [2]) entwickelt. Inzwischen konnten wesentliche Vereinfachungen angebracht werden. Durch den Beitrag von Vy Nguyen-mau [6] wurde die Einschränkung auf biorthogonale Referenzen aufgehoben. Darauf aufbauend konnten die Austauschbedingungen, die in der ersten Form noch recht kompliziert waren, auf eine sehr einfache Form gebracht werden. In dieser neuen Form wird der Orthomax-Algorithmus hier definiert.

Wir stellen die Formeln für den Orthomax-Algorithmus in der Reihenfolge ihrer Abarbeitung zusammen. Bei jedem Schritt wird insgesamt aus einer vorgegebenen Referenz eine neue Referenz erzeugt. Zuerst berechnen wir eine beste diskrete Approximation q zur vorgegebenen Referenz. Dann wählen wir ein Funktional $e(x)$, das auf $x_0 - q$ maximal ist. Mit Hilfe von $e(x)$ führen wir einen Austausch mit optimalem Interpolationsparameter durch und erhalten die neue Referenz.

Die Formeln für den Orthomax-Algorithmus lauten wie folgt:

$$c' = -f'G^{-1}, \tag{3}$$

$$a_0 = \frac{f(x_0) + \sum_{j=1}^{n} c_j g_j(x_0)}{\|f\| + \sum_{j=1}^{n} |c_j|\,\|g_j\|}, \tag{4}$$

$$\boldsymbol{a} = G^{-1}\big(\boldsymbol{g}(x_0) - a_0 \boldsymbol{s}\big), \tag{5}$$

$$q = \sum_{k=1}^{n} a_k x_k, \tag{6}$$

$$e(x):\ \alpha := \frac{|e(x_0 - q)|}{\|e\|} = \|x_0 - q\|, \tag{7}$$

$$\tau := \operatorname{sign}\left(\frac{f(x_0 - q)}{e(x_0 - q)}\right), \tag{8}$$

$$c(e)' = -e'G^{-1}, \tag{9}$$

$$A_0(w) = \operatorname{sign}(a_0) \frac{f(x_0) + w\dfrac{e(x_0)}{\tau} + \sum_{j=1}^{n}\left(c_j + w\dfrac{c_j(e)}{\tau}\right) g_j(x_0)}{\|f\| + w\|e\| + \sum_{j=1}^{n}\left|c_j + w\dfrac{c_j(e)}{\tau}\right| \|g_j\|}, \tag{10}$$

$$w_k := -\frac{\tau c_{j_k}}{c_{j_k}(e)} > 0 \quad \text{für} \quad j_k \in J_-. \tag{11}$$

Die Knickstellen w_k werden der Größe nach geordnet. Gemäß der Bedingung (4.47) wird ein optimaler Interpolationsparameter w^* berechnet.

$$w^* = \begin{cases} 0 & \text{kein Aufstieg,} \\ w_l & \text{Austausch von } g_{j_l}(x) \text{ gegen } e(x), \\ \infty & \text{Austausch von } f(x) \text{ gegen } e(x). \end{cases} \tag{12}$$

Nachdem der Austausch ausgeführt ist, beginnen wir von vorn mit dem nächsten Schritt. Damit ist der Orthomax-Algorithmus vollständig beschrieben.

Wir bezeichnen die Bedingung (12) als Austauschbedingung mit optimalem Interpolationsparameter. Sie tritt an die Stelle der Austauschbedingung (3.32) mit „nächstgelegener, vorzeichengleicher Stützstelle", durch die der Remes-Algorithmus bestimmt wird.

Wenn ein Basisfunktional ausgetauscht wird ($w^* = w_l$), muß eine neue Matrix $G(e)$ gebildet werden.

$$G(e) := \begin{bmatrix} g_1(x_1) & \dots & g_1(x_n) \\ \dots & \dots & \dots \\ g_{j_l-1}(x_1) & \dots & g_{j_l-1}(x_n) \\ e(x_1) & \dots & e(x_n) \\ g_{j_l+1}(x_1) & \dots & g_{j_l+1}(x_n) \\ \dots & \dots & \dots \\ g_n(x_1) & \dots & g_n(x_n) \end{bmatrix}. \tag{13}$$

Aus den Orthogonalitätsbedingungen für $e(x)$ bzw. aus Gleichung (9) folgt

$$e(x_k) = -\sum_{j=1}^{n} c_j(e) g_j(x_k). \tag{14}$$

Also erhalten wir die Relation

$$\det(G(e)) = -c_{j_l}(e)\det(G). \tag{15}$$

Für alle Indizes j aus J_- gilt $c_j(e) \neq 0$. Also bleibt die Haarsche Determinante mit den Basisfunktionalen beim Austausch von $g_{j_l}(x)$ gegen $e(x)$ von null verschieden. Die inverse Matrix $G(e)^{-1}$ kann gebildet werden.

Bei der Berechnung der inversen Matrix

$$G(e)^{-1} = \begin{bmatrix} \gamma_{11}(e) & \dots & \gamma_{1n}(e) \\ \dots & \dots & \dots \\ \gamma_{n1}(e) & \dots & \gamma_{nn}(e) \end{bmatrix} \tag{16}$$

verwendet man zweckmäßig folgende Beziehungen zwischen den Elementen $\gamma_{kj}(e)$ und γ_{kj}:

$$\gamma_{kj}(e) = \begin{cases} \dfrac{-1}{c_{j_l}(e)} \gamma_{kj_l} & \text{für} \quad j = j_l, \\ \gamma_{kj} - \dfrac{c_j(e)}{c_{j_l}(e)} \gamma_{kj_l} & \text{für} \quad j \neq j_l. \end{cases} \tag{17}$$

Dadurch wird der Aufwand zur Berechnung von $G(e)^{-1}$ wesentlich verringert.

Der Orthomax-Algorithmus kann mit einer beliebigen Referenz der Form (4.2) begonnen werden. Wenn keine besseren Werte vorliegen, beginnt man zweckmäßig mit den Anfangsbedingungen:

$$R^{(0)} = \{g_1(x), \dots, g_n(x), 0\}, \tag{18}$$

$$a_0^{(0)} = 0, \tag{19}$$

$$\boldsymbol{a}^{(0)} = G^{-1} \boldsymbol{g}(x_0). \tag{20}$$

Die zugehörige beste diskrete Approximation $q^{(0)}$ ist die „Interpolation von x_0 in L auf den Stützfunktionalen $g_1(x), \dots, g_n(x)$", denn sie erfüllt für $j = 1, 2, \dots, n$ die Interpolationsbedingungen

$$g_j(x_0 - q^{(0)}) = 0. \tag{21}$$

Ausgehend von $q^{(0)}$ bestimmt man ein Funktional $e(x)$, das auf $x_0 - q^{(0)}$ maximal ist. Wenn x_0 dem Unterraum L angehört, erhält man gleich im ersten Schritt die Gleichung $q^{(0)} = x_0$.

Nun untersuchen wir die Konvergenz des Orthomax-Algorithmus. Bei der Diskussion der Aufstiegsbedingung müssen wir von der Gleichung (4.42) ausgehen. Daraus erhalten wir mit der Abkürzung

$$D(w) \mathrel{!}= \frac{w\left[(\alpha - |a_0|)\|e\| - |a_0| \sum\limits_{j \in J_0} \left(|c_j(e)| - \sigma_j \dfrac{c_j(e)}{\tau}\right)\|g_j\|\right] - 2|a_0| \sum\limits_{j \in J_-(w)} \left|c_j + w \dfrac{c_j(e)}{\tau}\right| \|g_j\|}{\|f\| + w\|e\| + \sum\limits_{j=1}^{n} \left|c_j + w \dfrac{c_j(e)}{\tau}\right| \|g_j\|} \tag{22}$$

die Formel

$$A_0(w) = |a_0| + D(w). \tag{23}$$

SATZ 5.1 *Beim Orthomax-Algorithmus ergibt das Funktional $e(x)$ genau dann einen Aufstieg ($A_0(w^*) > |a_0|$), wenn die Bedingung*

$$(\alpha - |a_0|)\|e\| > |a_0| \sum_{j \in J_0} \left(|c_j(e)| - \sigma_j \frac{c_j(e)}{\tau}\right)\|g_j\| \tag{24}$$

erfüllt ist.

Wenn q noch keine beste Approximation ist, ist der Term auf der linken Seite der Bedingung (24) für alle auf $x_0 - q$ maximalen Funktionale positiv, denn es gilt die Abschätzung

$$(\alpha - |a_0|)\|e\| = (\|x_0 - q\| - |a_0|)\|e\| > 0.$$

Der Term auf der rechten Seite der Bedingung (24) kann nur auftreten, wenn die Haarsche Bedingung nicht erfüllt ist. Dann gibt es aber eine ein- bzw. mehrparametrige Schar von besten diskreten Approximationen, die von den Parametern σ_j ($j \in J_0$) abhängen. Durch Variation dieser Parameter müssen wir erreichen, daß der Term auf der rechten Seite der Bedingung (24) verschwindet. An dieser Stelle zahlt sich aus, daß wir im Satz 2.1 bei der Charakterisierung der besten diskreten Approximationen die Parameter σ_j für $h_j = 0$ variabel gehalten haben. Wir überprüfen nun, wie sich die Bedingung (24) verhält, wenn wir die Parameter σ_j ($j \in J_0$) im Bereich $|\sigma_j| \leqslant 1$ variieren. Zur Vereinfachung der Schreibweise nehmen wir an, daß die r ersten Koeffizienten c_j verschwinden.

$$J_0 = \{1, 2, \dots, r\}, \tag{25}$$

$$c_1 = c_2 = \dots = c_r = 0, \quad c_{r+1} \cdot c_{r+2} \cdot \ldots \cdot c_n \neq 0. \tag{26}$$

Wir führen folgende Bezeichnungen ein:

$$a_k(\sigma) = a_k(\sigma_1, \dots, \sigma_r), \tag{27}$$

$$q(\sigma) = q(\sigma_1, \dots, \sigma_r), \tag{28}$$

$$\alpha(\sigma) = \alpha(\sigma_1, \dots, \sigma_r) = \frac{|e(x_0 - q(\sigma))|}{\|e\|} = \|x_0 - q(\sigma)\|. \tag{29}$$

Wir bestimmen das Vorzeichen des Funktionals $e(x)$ aus der Gleichung

$$\tau = \operatorname{sign}\left(\frac{f(x_0 - q(\sigma))}{e(x_0 - q(\sigma))}\right) = \operatorname{sign}\left(\frac{a_0}{e(x_0 - q(\sigma))}\right) \tag{30}$$

so daß die Vorzeichengröße τ konstant bleibt.

Mit w_1 bezeichnen wir die kleinste Knickstelle gemäß Gleichung (11). Wenn keine Knickstelle existiert ($J_- = \emptyset$), setzen wir $w_1 = \infty$:

$$w_1 \mathrel{!}= \begin{cases} \min\limits_{j \in J_-} \left(-\dfrac{\tau c_j}{c_j(e)}\right) & \text{für} \quad J_- \neq \emptyset, \\ \infty & \text{für} \quad J_- = \emptyset. \end{cases} \tag{31}$$

Unter diesen Voraussetzungen formulieren wir zwei Bedingungen:

(32) *Für die Indizes j aus J_0 existieren Zahlen σ_j aus dem Bereich $|\sigma_j| \leqslant 1$, und es existiert ein Funktional $e^{(\sigma)}(x)$, das auf $x_0 - q(\sigma)$ maximal ist, so daß die Bedingung*

$$\Delta(\sigma, e^{(\sigma)}) \mathrel{!=} \sum_{j \in J_0} \left(|c_j(e)| - \sigma_j \frac{c_j(e)}{\tau} \right) ||g_j|| = 0$$

erfüllt ist.

(33) *Für alle in Betracht kommenden Funktionale $e(x)$ existiert eine von $e(x)$ unabhängige positive Zahl δ, so daß die Ungleichung*

$$\frac{w_1 ||e||}{||f|| + w_1 ||e|| + \sum_{j=1}^{n} \left| c_j + w_1 \frac{c_j(e)}{\tau} \right| ||g_j||} \geqslant \delta > 0$$

gilt.

SATZ 5.2 *Der Orthomax-Algorithmus konvergiert, wenn das Funktional $e(x)$ bei jedem Schritt die Bedingungen* (32) *und* (33) *erfüllt.*

Wir beweisen diesen Satz. Aufgrund der Bedingungen (32) und (33) gelten folgende Beziehungen:

$$D(w_1) = \frac{w_1 ||e|| \left(||x_0 - q(\sigma)|| - |a_0| \right)}{||f|| + w_1 ||e|| + \sum_{j=1}^{n} \left| c_j + w_1 \frac{c_j(e)}{\tau} \right| ||g_j||}, \tag{34}$$

$$A_0(w^*) - |a_0| = D(w^*) \geqslant D(w_1) \geqslant \delta \left(||x_0 - q(\sigma)|| - |a_0| \right), \tag{35}$$

$$E - A_0(w^*) \leqslant \left(1 - \delta \frac{||x_0 - q(\sigma)|| - |a_0|}{E - |a_0|} \right) (E - |a_0|) \leqslant (1 - \delta)(E - |a_0|), \tag{36}$$

$$||x_0 - q(\sigma)|| - E \leqslant \frac{1 - \delta}{\delta} (E - |a_0|). \tag{37}$$

Daraus ergibt sich die Konvergenz in der gleichen Weise wie beim Beweis von Satz 3.2.

Die Bedingung (33) bereitet im allgemeinen keine Schwierigkeiten. Entscheidend ist die Bedingung (32). Sie gilt trivialerweise, wenn die Haarsche Bedingung erfüllt ist. Der Orthomax-Algorithmus konvergiert also mindestens in dem gleichen Umfang wie der Remes-Algorithmus. Gegenüber dem Remes-Algorithmus sind folgende Verbesserungen zu nennen:

Die Austauschbedingung (12) ist in jedem normierten Raum anwendbar und ergibt einen optimalen Aufstieg.

Wenn bei einem Austauschschritt die Haarsche Bedingung erfüllt ist und wenn q noch keine beste Approximation ist, dann erfüllt jedes auf $x_0 - q$ maximale Funktional $e(x)$ die Aufstiegsbedingung (24), d.h. es existiert immer ein solches Funktional.

Der Orthomax-Algorithmus ist auch bei nicht erfüllter Haarscher Bedingung anwendbar. Dann ist die Bedingung (32) entscheidend für die Fortsetzung des Algorithmus.

Es läßt sich leicht zeigen, daß die Bedingung (32) immer erfüllt werden kann, wenn nur eine Haarsche Determinante gleich null ist ($r = 1$). Dazu bestimmen wir zuerst ein Funktional $e^{(0)}(x)$, das auf $x_0 - q(0)$ maximal ist und berechnen den Koeffizienten $c_1(e^{(0)})$. Für $c_1(e^{(0)}) = 0$ ist die Bedingung (32) erfüllt. Für $c_1(e^{(0)}) \neq 0$ setzen wir:

$$\sigma_1(u) \mathrel{!=} u\tau \operatorname{sign}\left(c_1(e^{(0)})\right), \quad 0 \leqslant u \leqslant 1. \tag{38}$$

Für $0 \leqslant u \leqslant 1$ bestimmen wir gemäß den Formeln (29) und (30) Funktionale $e^{(\sigma_1(u))}(x)$, die auf $x_0 - (\sigma_1(u))$ maximal sind und berechnen die zugehörigen Koeffizienten

$$c_1(e^{(\sigma_1(u))}) = ! \, \gamma_1(u). \tag{39}$$

Dabei kann der Fall eintreten, daß sich das maximale Funktional $e^{(\sigma_1(u))}(x)$ sprunghaft ändert, d.h. $\gamma_1(u)$ ist eine stückweise stetige Funktion. In den Unstetigkeitsstellen u^* von $\gamma_1(u)$ besitzt $x_0 - q(\sigma_1(u^*))$ zwei maximale Funktionale

$$e_0^{(\sigma_1(u^*))}(x), \quad e_1^{(\sigma_1(u^*))}(x). \tag{40}$$

Daraus bilden wir mit einer Vorzeichengröße τ^* ein interpolierendes Funktional

$$e_\theta^{(\sigma_1(u^*))}(x) \mathrel{!=} (1 - \theta) e_0^{(\sigma_1(u^*))}(x) + \theta \tau^* e_1^{(\sigma_1(u^*))}(x), \tag{41}$$

das für $0 \leqslant \theta \leqslant 1$ auf $x_0 - q(\sigma_1(u^*))$ maximal ist. Auf diese Weise erhalten wir insgesamt eine Schar sich stetig ändernder maximaler Funktionale. Diese Schar enthält ein Funktional $e^*(x)$ für $\sigma_1 = \sigma_1^*$, so daß

$$c_1(e^*(x)) = 0 \tag{42}$$

gilt, oder die Funktion $\gamma_1(u)$ behält ihr Vorzeichen:

$$\operatorname{sign}\left(c_1(e^{(0)})\right) = \operatorname{sign}\left(c_1(e^{(\sigma_1(1))})\right). \tag{43}$$

Dann ist die Bedingung (32) im ersten Fall für

$$\sigma_1 = \sigma_1^*, \quad e^{(\sigma_1)}(x) = e^*(x) \tag{42'}$$

und im zweiten Fall für

$$\sigma_1 = \sigma_1(1), \quad e^{(\sigma_1)}(x) = e^{(\sigma_1(1))}(x) \tag{43'}$$

erfüllt.

Es besteht die Vermutung, daß die Bedingung (32) auch für $1 < r \leqslant n$ erfüllt werden kann, d.h. es existiert eine Nullstelle (σ^*, e^*) der Gleichung

$$\Delta(\sigma^*, e^*) = 0. \tag{44}$$

Wenn man dieses Problem lösen könnte, hätte man einen Beweis für die Konvergenz des Orthomax-Algorithmus bei nicht erfüllter Haarscher Bedingung. Wenn man den Beweis konstruktiv führen könnte, hätte man einen beständig konvergenten Approximationsalgorithmus. Daraus ergibt sich die Bedeutung der Bedingung (32).

Wir erwähnen noch einige Relationen für die Abhängigkeit der besten diskreten Approximationen von den Parametern $(\sigma_1, \ldots, \sigma_r)$. Aus der Gleichung (5) folgt:

$$a_k(\sigma) = a_k(0) - a_0 \sum_{j \in J_0} \gamma_{kj} \|g_j\| \sigma_j. \tag{45}$$

Daraus erhalten wir unter Beachtung der Gleichungen (3) bzw. (9) die Beziehungen:

$$f(x_0 - q(\sigma)) = f(x_0 - q(0)), \tag{46}$$

$$e(x_0 - q(\sigma)) = e(x_0 - q(0)) - a_0 \sum_{j \in J_0} \sigma_j c_j(e) \|g_j\|. \tag{47}$$

6. Beispiele für die Anwendung des Orthomax-Algorithmus

Wenn wir im Hilbertraum mit den Stützfunktionalen

$$R^{(0)} = \{(x, x_1), \ldots, (x, x_n), 0\} \tag{1}$$

und dem Parameter $a_0 = 0$ beginnen (vgl. (4.18), (4.19)), erhalten wir mit dem Orthomax-Algorithmus in einem Schritt die beste Approximation, d.h. die Projektion von x_0 in L. Die beste diskrete Approximation $q^{(0)}$ zur Referenz $R^{(0)}$ ergibt sich aus den Gleichungen

$$(x_0 - q^{(0)}, x_j) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{2}$$

Das sind die Bedingungen für die Projektion. In Hilbertraum ist das Funktional, das auf $x_0 - q^{(0)}$ maximal ist ($\|x_0 - q^{(0)}\| > 0$), bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmt.

$$e(x) = (x, x_0 - q^{(0)}). \tag{3}$$

Wir erhalten die Beziehungen

$$e(x_j) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n \tag{2'}$$

und

$$c_j(e) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{4}$$

Daraus folgt

$$a_0(e) = \frac{(x_0, x_0 - q^{(0)})}{\|x_0 - q^{(0)}\|} = \frac{(x_0 - q^{(0)}, x_0 - q^{(0)})}{\|x_0 - q^{(0)}\|} = \|x_0 - q^{(0)}\|, \tag{5}$$

d.h. $q^{(0)} = p$ ist die beste Approximation.

Aus den angegebenen Relationen erkennt man die vorzüglichen Eigenschaften des Hilbertraumes im Hinblick auf die Konstruktion von besten Approximationen. Die beste Approximation

$$p = \sum_{k=1}^{n} a_k^{(0)} x_k \tag{6}$$

ist eindeutig bestimmt und ergibt sich durch Auflösung des linearen Gleichungssystems

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^{(0)} (x_k, x_j) = (x_0, x_j), \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{2''}$$

Die Gleichungen (2) können als Interpolationsbedingungen gedeutet werden. Im Hilbertraum stimmt die beste Approximation mit der „Interpolation von x_0 in L auf den Stützfunktionalen"

$$g_j(x) \mathrel{!=} (x, x_j), \quad j = 1, 2, \ldots, n \tag{7}$$

überein.

Die Haarsche Bedingung wird im Hilbertraum in extremer Weise nicht erfüllt. Für $\|x_0 - p\| > 0$ besitzt jede optimale Referenz

$$R = \{(x, x_1), \ldots, (x, x_n), (x, x_0 - p)\} \tag{8}$$

genau n verschwindende Haarsche Determinanten (vgl. Gleichung (4)).

Die Projektionsbedingungen (2) bzw. (2′) entsprechen gerade diesen Gleichungen. Damit läßt sich am Beispiel des Hilbertraumes demonstrieren, wie nützlich es ist, verschwindende Haarsche Determinanten zu erzeugen. Der Orthomax-Algorithmus stellt die Verbindung zwischen dem Projektionsalgorithmus und dem Remes-Algorithmus her.

Man kann sagen, daß es bei der Approximation in normierten Räumen zwei extreme Fälle gibt: Die Approximation im Hilbertraum, bei der jede optimale Referenz $r = n$ verschwindende Haarsche Determinanten besitzt und die gleichmäßige Approximation von stetigen Funktionen von einer Veränderlichen durch Polynome, bei der jede optimale Referenz (und jede Referenz mit paarweise verschiedenen Stützstellen) die Haarsche Bedingung erfüllt ($r = 0$).

Der tiefere Grund für die ausgezeichneten Eigenschaften des Hilbertraumes ist darin zu suchen, daß die maximalen Funktionale (auf einem von null verschiedenen Element) bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmt sind.

Wir betrachten allgemein einen normierten Raum X mit dieser Eigenschaft, d.h. wir fordern die Bedingung:

(9) Aus $z \neq \mathbf{0}$ und

$$|f_j(z)| = \|f_j\| \|z\|$$

für $j = 1, 2$ folgt, daß $f_1(x)$ und $f_2(x)$ linear abhängig sind.

SATZ 6.1. *In jedem normierten Raum X, in welchem die Bedingung (9) erfüllt ist, besitzt jede optimale Referenz für $\|x_0 - p\| > 0$, $r = n$ verschwindende Haarsche Determinanten.*

Zum Beweis betrachten wir eine beliebige optimale Referenz (vgl. (4.26′) und (4.26″)). Sie enthält mindestens ein auf $x_0 - p$ maximales Funktional

$$|f_{n+1}(x_0 - p)| = \|f_{n+1}\| \|x_0 - p\| > 0.$$

Alle auf $x_0 - p$ maximalen Funktionale sind von $f_{n+1}(x)$ linear abhängig. Das gilt auch für das Funktional $\varphi(x)$, das gemäß Satz 1.1 existiert.

$$\varphi(x) = cf_{n+1}(x), \quad c \neq 0.$$

Daraus erhalten wir die Gleichungen

$$f_{n+1}(x_j) = 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

d.h.

$$h_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Wir lösen eine einfache Approximationsaufgabe für 10-dimensionale Vektoren, bzw. diskrete Funktionen,

(10) $$\boldsymbol{x} = \big(x(1), x(2), \dots, x(10)\big)$$

bezüglich der Maximumnorm

(11) $$\|\boldsymbol{x}\| \mathrel{!=} \max_{(k)} |x(k)|,$$

(12) $$\boldsymbol{x}_0 = (3, 1, 4, 1, 5; 9, 2, 6, 5, 4),$$

(13) $$\boldsymbol{x}_1 = (1, 1, 1, 1, 1; 1, 1, 1, 1, 1,),$$

(13′) $$\boldsymbol{x}_2 = (0, 1, 2, 3, 4; 4, 3, 2, 1, 0),$$

(14) $$\|\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{p}\| = \inf_{(a_k)} \|\boldsymbol{x}_0 - a_1\boldsymbol{x}_1 - a_2\boldsymbol{x}_2\|.$$

Wir wenden den Orthomax-Algorithmus an.

0. *Schritt*:

$\{x(1), x(6), 0\}$,

$\boldsymbol{c}' = (0, 0)$, $a_0 = 0$,

$\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{q} = \frac{1}{2}(0, -7, -4, -13, -8; 0, -11, 0, 1, 2)$.

Tausch: 0 gegen $x(4)$.

1. *Schritt*:

$\{x(1), x(6), x(4)\}$,

$\boldsymbol{c}' = \frac{1}{4}(-1, -3)$, $a_0 = -\frac{13}{4}$,

$\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{q} = \frac{1}{4}(13, -1, 5, -13, -3;\ 13, -9, 13, 15, 17)$.

Tausch: $x(1)$ gegen $x(10)$.

2. *Schritt*:

$\{x(10), x(6), x(4)\}$,

$\boldsymbol{c}' = \frac{1}{4}(-1, -3)$, $a_0 = -\frac{27}{8}$,

$\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{q} = \frac{1}{8}(19, -7, 7, -27, -5;\ 27, -19, 23, 25, 27)$,

$\|\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{q}\| = |a_0|$,

$\boldsymbol{q} = \frac{5}{8}\boldsymbol{x}_1 + \frac{10}{8}\boldsymbol{x}_2$ beste Approximation.

Bei dem folgenden Beispiel erhalten wir verschwindende Haarsche Determinanten. Wir nehmen den gleichen Vektor $\boldsymbol{x}_0$ wie in Gleichung (12) und die Basisvektoren

(15) $$\boldsymbol{x}_1 \mathrel{!=} (0, 1, 2, 3, 4;\ 5, 6, 7, 8, 9),$$

(15′) $$\boldsymbol{x}_2 \mathrel{!=} (9, 8, 7, 6, 5;\ 4, 3, 2, 1, 0),$$

(15″) $$\boldsymbol{x}_3 \mathrel{!=} (0, 1, 2, 3, 4;\ 4, 3, 2, 1, 0).$$

Die Basisvektoren entsprechen einer Approximation durch Splines.

0. *Schritt*:

$\{x(10), x(1), x(5), 0\}$,

$\boldsymbol{c}' = (0, 0, 0)$, $a_0 = 0$,

$\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{q} = \frac{1}{18}(0, -45, 0, -63, 0;\ 70, -51, 26, 13, 0)$.

Tausch: 0 gegen $x(6)$.

1. *Schritt*:

$\{x(10), x(1), x(5), x(6)\}$,

$\boldsymbol{c}' = \frac{1}{9}(-1, 1, -9)$, $a_0 = \frac{7}{4}$,

$\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{q} = \frac{1}{72}(126, -117, 0, -315, -126;\ 126, -351, -36, -81, -126)$.

Für einen optimalen Austausch gibt es zwei Varianten, weil der optimale Interpolationsparameter $w^* = \frac{4}{3}$ eine doppelte Knickstelle ist.

1. *Variante*: $x(5)$ gegen $x(7)$.

2. *Variante*: $x(1)$ gegen $x(7)$.

Wir werden beide Varianten verfolgen.

2. *Schritt*. 1. *Variante*:

$\{x(10), x(1), x(7), x(6)\}$,

$\boldsymbol{c}' = \frac{1}{3}(1, 0, -4)$, $a_0 = \frac{23}{8}$.

Die zweite Haarsche Determinante verschwindet ($c_2 = 0$).

$$\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{q}(\sigma_2) = \tfrac{1}{72}(0, -204, -48, -324, -96;\ 207, -207, 171, 189, 207) + \\ + \sigma_2 \tfrac{23}{72}(9, 7, 5, 3, 1;\ 0, 0, 0, 0, 0).$$

Die Bedingung (5.32) ist für

$$(\sigma_2^*, e^*) = \big(1, x(4)\big)$$

erfüllt.

Tausch: $x(10)$ gegen $x(4)$.

3. *Schritt*, 1. *Variante*:

$\{x(4), x(1), x(7), x(6)\}$,

$\boldsymbol{c}' = \frac{1}{3}(-3, 1, -1)$, $a_0 = \frac{25}{8}$.

Jetzt ist die Haarsche Bedingung wieder erfüllt.

$$\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{q} = \tfrac{1}{72}(225, -21, 193, -225, -39;\ 225, -225, 117, 99, 81),$$
$$\|\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{q}\| = |a_0|,$$
$$q = \tfrac{1}{72}(23\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2+78\boldsymbol{x}_3) \text{ beste Approximation.}$$

Nun wählen wir im 2. Schritt die 2. Variante.

2. *Schritt*, 2. *Variante*:

$$\{x(10), x(7), x(5), x(6)\},$$
$$\boldsymbol{c}' = \tfrac{1}{3}(1, -4, 0),\ a_0 = \tfrac{23}{8}.$$

Die dritte Haarsche Determinante verschwindet ($c_3 = 0$).

$$\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{q}(\sigma_3) = \tfrac{1}{8}(96, 52, 48, -4, 0;\ 23, -23, 19, 21, 23)+$$
$$+\sigma_3\tfrac{23}{8}(9, 7, 5, 3, 1;\ 0, 0, 0, 0, 0).$$

Für $\sigma_3^* = -\frac{1}{3}$ springt das maximale Funktional von $x(1)$ nach $-x(4)$. Dabei wechselt der Koeffizient

$$c_3(e^{(-u)}) = !\,\gamma_3(u)$$

das Vorzeichen. Für das Funktional

$$e^*(x) = \tfrac{1}{4}x(1)+\tfrac{3}{4}(-x(4))$$

verschwindet der Koeffizient

$$c_3(e^*) = 0,$$

d.h. die Bedingung (5.32) ist erfüllt.

Tausch: $x(10)$ gegen $x(1)-3x(4)$.

3. *Schritt*. 2. *Variante*:

$$\{x(1)-3x(4), x(7), x(5), x(6)\},$$
$$\boldsymbol{c}' = \tfrac{1}{3}(1, -1, 0),\ a_0 = \tfrac{25}{8},$$
$$\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{q}(\sigma_3) = \tfrac{1}{72}(576, 252, 288, -108, 0;\ 225, -225, 117, 99, 81)+$$
$$+\sigma_3\tfrac{25}{8}(9, 7, 5, 3, 1;\ 0, 0, 0, 0, 0).$$

Ein weiterer Aufstieg ist nicht möglich. Für

$$\sigma_3^* = -\tfrac{39}{225}$$

erhält man die beste Approximation. Die obenstehende Referenz ist eine optimale Referenz mit verschwindender Haarscher Determinante. Trotzdem ist die beste Approximation eindeutig bestimmt.

Nun betrachten wir ein Beispiel für die diskrete Approximation von Funktionalen.

(16) $$x_0(f) != \int_{-1}^{1} dt\, f(t),$$

(17) $$x_1(f) != f(-\tfrac{1}{2}),$$

(17′) $$x_2(f) != f(\tfrac{1}{2}),$$

(18) $$f(t) = b_0+b_1t+b_2t^2 \in F,$$

(19) $$\|f\| != \max_{-1\leqslant t\leqslant 1} |f(t)|,$$

(20) $$\|x\|_F != \sup_{\substack{\|f\|>0\\ f\in F}} \frac{|x(f)|}{\|f\|}.$$

Die Lösung $p(f)$ der Approximationsaufgabe

(21) $$\|x_0-p\|_F = \inf_{(a_k)} \|x_0-a_1x_1-a_2x_2\|_F$$

ist eine beste Quadraturformel auf den Polynomen zweiten Grades mit den Stützstellen $-\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{2}$. Jedes Polynom $f(t)$ definiert ein stetiges lineares Funktional $x(f)$ auf den Elementen x. Die Norm dieses Funktionals stimmt mit $\|f\|$ überein.

0. *Schritt*:

$$\{x(\tfrac{1}{2}-t), x(\tfrac{1}{2}+t), 0\},$$
$$\boldsymbol{c}' = (0, 0),\ a_0 = 0,$$
$$x_0(f)-q(f) = \int_{-1}^{1} dt\, f(t)-f(-\tfrac{1}{2})-f(\tfrac{1}{2}).$$

Tausch: 0 gegen $x(1-2t^2)$.

1. *Schritt*:

$$\{x(\tfrac{1}{2}-t), x(\tfrac{1}{2}+t), x(1-2t^2)\},$$
$$\boldsymbol{c}' = \tfrac{1}{2}(-1, -1),\ a_0 = -\tfrac{2}{15},$$
$$x_0(f)-q(f) = \int_{-1}^{1} dt\, f(t)-\tfrac{4}{5}f(-\tfrac{1}{2})-\tfrac{4}{5}f(\tfrac{1}{2}).$$

Tausch: $x(\frac{1}{2}-t)$ gegen $x(1)$.

Ebenso wäre ein Tausch von $x(\frac{1}{2}+t)$ gegen $x(1)$ möglich.

2. *Schritt*:

$$\{x(1), x(\tfrac{1}{2}+t), x(1-2t^2)\},$$
$$\boldsymbol{c}' = \tfrac{1}{2}(-1, 0),\ a_0 = -\tfrac{2}{9}.$$

Die zweite Haarsche Determinante verschwindet ($c_2 = 0$).

$$x_0(f)-q^{\sigma_2}(f) = \int_{-1}^{1} dt\, f(t)-\tfrac{1}{9}(7f(-\tfrac{1}{2})+9f(\tfrac{1}{2}))-\frac{\sigma_2}{3}(f(\tfrac{1}{2})-f(-\tfrac{1}{2}))$$
$$= \tfrac{2}{9}(b_0+b_2)-\tfrac{1}{9}(1+3\sigma_2)b_1.$$

Mit der Transformation

$$\sigma_2 = -\tfrac{1}{3}+\tfrac{2}{3}u, \quad -1 \leqslant u \leqslant 2$$

erhalten wir

$$x_0(f)-q^{(-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}u)}(f) = \tfrac{2}{9}(b_0+b_2-ub_1).$$

Es gilt die Abschätzung

$$\|f\| \geqslant |b_0+b_2|+|b_1|.$$

Daraus folgt, daß für $-1 \leqslant u \leqslant 1$ alle Quadraturformeln

$$p^{(u)}(f) = \tfrac{8}{9}\big(f(-\tfrac{1}{2})+f(\tfrac{1}{2})\big)+\tfrac{2}{9}u\big(f(\tfrac{1}{2})-f(-\tfrac{1}{2})\big)$$

Lösungen der Approximationsaufgabe (21) sind.

Für alle Polynome zweiten Grades gilt die Fehlerabschätzung

$$|x_0(f)-p^{(u)}(f)| \leqslant \tfrac{2}{9}\|f\|.$$

Die Schranke $\frac{2}{9}$ wird für $f(t) = 1$ und $f(t) = 1-2t^2$ angenommen. Für eine beliebige stetige Funktion $\varphi(t)$ sei $f_\varphi(t)$ die beste Approximation durch Polynome zweiten Grades bezüglich der Maximumnorm (19). Dann gilt die Fehlerabschätzung

$$|x_0(\varphi)-p^{(u)}(\varphi)| \leqslant \tfrac{34}{9}\|\varphi-f_\varphi\|+\tfrac{2}{9}\|f_\varphi\|.$$

Abschliessend betrachten wir ein Beispiel für die diskrete Approximation eines Integraloperators.

$$x_0(f,s) \mathrel{!=} \int_{-1}^{1} dt(2-|s-t|)f(t), \tag{22}$$

$$x_1(f,s) \mathrel{!=} x_0(1-t,s)f(-1), \tag{23}$$

$$x_2(f,s) \mathrel{!=} x_0(1+t,s)f(1), \tag{23'}$$

$$x_0(1-t,s) = \tfrac{1}{3}(3-s)\,(3-s^2) = !\,\alpha_1(s), \tag{24}$$

$$x_0(1+t,s) = \tfrac{1}{3}(3+s)\,(3-s^2) = !\,\alpha_2(s). \tag{24'}$$

Die diskrete Norm

$$\|x\|_F \mathrel{!=} \sup_{\substack{\|f\|>0\\ f\in F}} \frac{\|x(f,s)\|}{\|f\|} \tag{25}$$

nehmen wir wieder bezüglich der Polynome zweiten Grades. Wir lösen die Approximationsaufgabe

$$\|x_0-p\|_F = \inf_{(a_k)} \|x_0-a_1x_1-a_2x_2\|_F. \tag{26}$$

Ein Funktional

$$g_j(x) = x(f_j, s_j) \tag{27}$$

wird jetzt durch ein Polynom zweiten Grades f_j und eine Stützstelle s_j der Bildfunktion festgelegt.

0. *Schritt*:

$\{x(1-t,-1),\ x(1+t,1),\ 0\}$,

$c' = (0,0)$, $a_0 = 0$,

$$x_0(f,s)-q(f,s) = \int_{-1}^{1} dt(2-|s-t|)f(t)-\tfrac{1}{2}\alpha_1(s)f(-1)-\tfrac{1}{2}\alpha_2(s)f(1).$$

Tausch: 0 gegen $x(1-2t^2, 0)$.

1. *Schritt*:

$\{x(1-t,-1),\ x(1+t,1),\ x(1-2t^2,0)\}$

$c' = \frac{9}{16}(1,1)$, $a_0 = \frac{4}{3}$,

$q(f,s) = 0$.

Tausch: $x(1-t,-1)$ gegen $x(1,0)$.

Ebenso wäre auch der Tausch von $x(1+t,1)$ gegen $x(1,0)$ optimal.

2. *Schritt*:

$\{x(1,0),\ x(1+t,1),\ x(1-2t^2,0)\}$,

$c' = (1,0)$, $a_0 = \frac{13}{6}$.

Die zweite Haarsche Determinante verschwindet ($c_2 = 0$).

$$x_0(f,s)-q^{(\sigma_2)}(f,s) = \int_{-1}^{1} dt(2-|s-t|)f(t)-(-\tfrac{2}{9}+\tfrac{13}{32}\sigma_2)\alpha_1(s)f(-1)-(\tfrac{1}{2}-\tfrac{13}{32}\sigma_2)\alpha_2(s)f(1).$$

Mit der Transformation

$$\sigma_2 = \tfrac{8}{9}(1+u), \quad -\tfrac{17}{8} \leqslant u \leqslant \tfrac{1}{8}$$

erhalten wir die Formel

$$x_0(f,s)-q^{(\frac{8}{9}(1+u))}(f,s) = b_0\tfrac{13}{18}(3-s^2)+b_1\tfrac{13}{18}\frac{s}{3}(3-s^2)+b_2\tfrac{1}{18}s^2(5-3s^2)- \\ -u\tfrac{13}{36}(b_0+b_2-b_1)\alpha_1(s)+u\tfrac{13}{36}(b_0+b_2+b_1)\alpha_2(s).$$

Der Operator

$$p(f,s) = q^{(\frac{8}{9})}(f,s) = \tfrac{5}{36}\big(x_1(f,s)+x_2(f,s)\big)$$

ist eine Lösung der Approximationsaufgabe (26). Gibt es noch weitere Lösungen für $u \neq 0$?

Auf allen Polynomen zweiten Grades gilt die Fehlerabschätzung

$$\Big\|\int_{-1}^{1} dt(2-|s-t|)f(t)-\tfrac{5}{36}\big(\alpha_1(s)f(-1)+\alpha_2(s)f(1)\big)\Big\| \leqslant \tfrac{13}{6}\|f\|.$$

Auf den Polynomen $f(t) = 1$ und $f(t) = 1-2t^2$ gilt das Gleichheitszeichen.

Literatur

[1] N. Dunford und J. T. Schwartz, *Linear operators, Part I*, Interscience, New York 1958.

[2] H. Kiesewetter, *Vorlesungen über lineare Approximation*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1973.

[3] —, *Diskrete Approximation von stetigen linearen Operatoren auf* $C[-1, 1]$, Wissenschaftliche Zeitschrift der Universität Rostock, 23. Jahrgang, 1974, Math.-naturw. Reihe, S. 31–35.

[4] P. J. Laurent, *Approximation et optimisation*, Hermann, Paris, 1972.

[5] —, *Exchange algorithm in convex analysis*, Proceedings of an International Symposium Conducted by the University of Texas and the National Science Foundation at Austin, Texas, January 22–24, 1973.

[6] V. Nguyen-mau, *Algorithmen zur numerischen Behandlung linearer Gleichungen*, Dissertation, Universität Rostock, 1974.

[7] I. Singer, *Best approximation in normed linear spaces by elements of linear subspaces*, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York 1970.

[8] —, *The theory of best approximation and functional analysis*, SIAM, CBMS Series, No 13, 1974.

Presented to the Semester
Approximation Theory
September 17–December 17, 1975

APPROXIMATION THEORY
BANACH CENTER PUBLICATIONS, VOLUME 4
PWN—POLISH SCIENTIFIC PUBLISHERS
WARSAW 1979

ТЕОРЕМЫ ДВОЙСТВЕННОСТИ И ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ НАИЛУЧШЕГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

Н. П. КОРНЕЙЧУК

Институт Математики АН УССР, Киев, СССР.

Задачи аппроксимационного содержания, задаваемые на классах функций (или, более общо, на множествах произвольного банахова пространства), во многих случаях являются задачами на экстремум: требуется найти точную верхнюю грань погрешности приближения заданным методом на фиксированном классе функций или указать для этого класса наилучший аппарат приближения.

В решении задач такого характера (их называют экстремальными задачами) в последнее время имеются значительные успехи; в ряде важных случаев получены окончательные результаты, т. е. решение доведено до точных констант. При этом разработаны новые методы исследования экстремальных задач, базирующихся, с одной стороны, на глубоких фактах общей теории банаховых пространств, а с другой — на изучении тонких свойств конкретных классов функций.

В ряде случаев весьма эффективными оказались методы, связанные с использованием соотношений двойственности в линейных нормированных пространствах. В этой статье мы попытаемся проиллюстрировать применение теорем двойственности при решении задач наилучшего приближения в конкретных функциональных пространствах. Основные утверждения, определяющие сущность метода, мы или доказываем или снабжаем указаниями относительно идеи доказательства, а также ссылками на литературу.

1. Теоремы двойственности в линейных нормированных пространствах

Теорема 1.1. *Если F — выпуклое замкнутое множество линейного нормированного пространства X, то для любого элемента $x \in X$ справедливо соотношения*

$$\inf_{u\in F} ||x-u|| = \sup_{\substack{f\in X^* \\ ||f||\leqslant 1}} [f(x)-\sup_{u\in F} f(u)], \tag{1.1}$$

где X^* — пространство, сопряженное с X. При каждом фиксированном $x \in X\setminus F$ существует функционал $f_0 \in X^*$ с нормой $||f_0|| = 1$, реализующий верхнюю грань в правой части (1.1).