[3] Ю. И. Журавлев, М. Михалевич, *Алгоритмы распознавания, основанные на вычислении оценок для задач с пересекающимися классами*, Труды ВЦ ПАН 145 (1974).

[4] Ю. И. Журавлев, В. В. Никифоров, *Алгоритмы распознавания, основанные на вычислении оценок*, Кибернетика 3 (1971).

Presented to the Semester
Discrete Mathematics
(February 15–June 16, 1977)

DISCRETE MATHEMATICS
BANACH CENTER PUBLICATIONS, VOLUME 7
PWN—POLISH SCIENTIFIC PUBLISHERS
WARSAW 1982

СИНТЕЗ ЛОГИЧЕСКИХ СЕТЕЙ ДЛЯ РЕАЛИЗАЦИИ КЛАССОВ БУЛЕВЫХ МАТРИЦ С ДАННЫМ ЧИСЛОМ УГЛОВЫХ КЛЕТОК

И. ГАВЕРЛИК

Кафедра теоретической кибернетики, Университет им. Коменского, Братислава, Чехословакия

В картографии при автоматическом строении карт решаются проблемы строения разного типа изолиний. Из изходных данных конструируются базовые — первичные, и из них вторичные [1], [2], [3]. При этом образуются разного типа плоские фигуры. Одна из задач состоит в том, чтобы узнать, входит ли точка с заданными координатами в фигуру или нет. Важный вопрос состоит в определении сложности реализации такого типа характеристических функций. При этом используется некоторое геометрическое представление булевых матриц.

В более общем случае в теории распознавания образов рассматриваются и проблемы восприятия и обработки зрительной информации, в частности плоских объектов. В связи с обработкой зрительной информации Ф. Этниф [8] высказал предположение, что в распознавании формы наиболее важную роль играют те точки, в которых контурные линии меняют свое направление или обрываются. Исходя из этого тезиса введем понятие их дискретного аналога в том частном случае, когда имеется дело с булевыми матрицами.

Геометрическая постановка задачи рассматриваемой в этой работе состоит в следующем: Имеется решетка размера $N\times N$, т.е. N строк и в каждой строке N клеток (или $N+1$ строк и в каждой строке $N+1$ узлов). Строки и столбцы клеток решетки занумерованы в естественном порядке числами от 0 до $N-1$. Каждой клетке решетки приписаны координаты: номер строки и номер столбца решетки, в которых она находится.

В естественном порядке занумерованы и строки и столбцы узлов решетки числами от 0 до N. Узлу решетки приписаны координаты: номер строки и номер столбца (в нумерации строк и столбцов), в которых он находится.

Пусть клеткам решетки приписаны значения из $\{0, 1\}$. Значения клеток тогда образуют некоторую квадратную булеву матрицу порядка N. Класс всех булебых квадратных матриц порядка N обозначим через $\mathfrak{N}_N$.

Реализацией булевой матрицы разумеется определение значения $a_{i,j}$ клетки матрицы (i, j) из заданных координат i, j этой клетки. Логическая сеть из логических элементов некоторого произвольного (конечного) базиса $Б$ реализует данную булеву матрицу, если из приведенных на входы сети координат любой клетки матрицы, на выходе сети получается значение этой клетки.

Булева матрица представляет таблицу значений (часть таблицы) некоторой (некоторых) функции алгебры логики от $2\lceil\log N\rceil$(1) переменных. В случае, когда $N = 2^n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, матрицей $A \in \mathfrak{N}_N$, $A = (a_{i,j})$, $(i, j = 0, 1, 2, \ldots \ldots, N-1)$, определена в точности одна функция алгебры логики. Очевидно, что в случае, когда $2^{n-1} < N < 2^n$, можно определить функцию следующим образом: Матрице $A \in \mathfrak{N}_N$ соответствует функция алгебры логики $f(\tilde{x}) \in P_2^{2n}$, (где P_2^{2n} — класс всех функций алгебры логики от $2n$ переменных), которая на наборах $\tilde{\sigma}$, для которых $|\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n| = j < N$, $|\sigma_{n+1}, \sigma_{n+2}, \ldots, \sigma_{2n}| = i < N$ принимает значения клеток (i, j) матрицы A и на остальных наборах неопределена (или может быть определена произвольным образом).

В [7], [6] рассматривались классы $\mathscr{R}_{n,k}$ — классы функций алгебры логики $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ принимающих значение 1 ровно на k значений аргументов. Аналогичным образом определяются классы $\hat{\mathscr{R}}_{N,k}$ — классы квадратных булевых матриц порядка N, содержащих ровно k клеток принимающих значение 1.

Определение 1. Пусть $A \in \mathfrak{N}_N$, $A = (a_{i,j})$, $(i, j = 0, 1, 2, \ldots, N-1)$. Число клеток матрицы A принимающих значение 1 обозначим $\|A\|$. Множество всех матриц $A \in \mathfrak{N}_N$ таких, что $\|A\| = k$, будем обозначать через $\hat{\mathscr{R}}_{N,k}$. Наглядно, что класс $\hat{\mathscr{R}}_{N,k}$ содержит $C_{N^2}^{k}$ матриц.

Классы $\mathscr{R}_{n,k}$ при малых значениях n изучались Б. И. Финиковым [7]. Из его результатов следует, что если $k = O(\log n)$, то сложность реализации такого класса (функция Шеннона)

$$L(\mathscr{R}_{n,k}) \asymp n. \tag{1}$$

(1) Символ $\lceil a\rceil$ означает наименьшее целое число, не меньше a и символ $[a]$ означает наибольшее целое число, не больше a. Всюду в этой работе символ log означает логарифм по основанию 2 и используются следующие обозначения:

$a(n) \to b$ означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} a(n) = b$;

$a(n) \lesssim b(n)$ — $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \dfrac{a(n)}{b(n)} \leqslant 1$;

$a(n) \sim b(n)$ — $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a(n)}{b(n)} = 1$;

$a(n) = O(b(n))$ или $a(n) \lesssim b(n)$ — отношение $\dfrac{a(n)}{b(n)}$ ограничено (сверху);

$a(n) \asymp b(n)$ — $a(n) = O(b(n))$ и $b(n) = O(a(n))$.

Символ $\bar{o}(a(n))$ обозначает некоторую функцию $b(n)$ удовлетворяющую условию $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{b(n)}{a(n)} = 0$. (В частности, $\bar{o}(1)$ обозначает функцию, стремящуюся к 0.)

Отсюда следует, что в случае, когда k очень велико, функция $f(x_1, x_2, \ldots \ldots, x_n)$ из $\mathscr{R}_{n,k}$ также реализуется просто, ибо если $f \in \mathscr{R}_{n,k}$, то $\bar{f} \in \mathscr{R}_{n,2^n-k}$. Поэтому если $2^n - k = O(\log n)$, тогда тоже имеет место (1).

Остальные классы $\mathscr{R}_{n,k}$ были изучены О. Б. Лупановым [6]. Обозначим через $l(n, k) = \min(k, 2^n - k)$. О. Б. Лупанов доказал ([6], теорема 3.4), что для последовательности k_n такой, что

$$\frac{l(n, k_n)}{\log n} \to \infty;$$

имеет место(2)

$$L(\mathscr{R}_{n,k_n}) \sim \varrho \frac{\log C_{2^n}^{k_n}}{\log\log C_{2^n}^{k_n}}. \tag{2}$$

В дальнейшем будет доказана тесная связь между классами $\mathscr{R}_{n,k}$, $\hat{\mathscr{R}}_{N,k}$ и классами с данным числом угловых клеток.

Определение 2. Пусть (i, j) — клетка матрицы $A \in \mathfrak{N}_N$, принимающая значение $a_{i,j} \in \{0, 1\}$, находящаяся в i-той строке и j-том столбце матрицы A. *Соседними клетками* клетки (i, j) будем называть клетки $(i-1, j)$, $(i+1, j)$, $(i, j-1)$, $(i, j+1)$, если они существуют. *Окрестностью* $O(i, j)$ *клетки* (i, j) будем называть совокупность всех ее соседних клеток.

Окрестность узла матрицы $A \in \mathfrak{N}_N$ определим следующим способом:

Определение 3. Пусть $(i, j)^*$ узел решетки размера $N \times N$ (где $i, j = 0, 1, \ldots, N$), находящийся в i-той строке узлов и j-том столбце узлов решетки. *Окрестностью* $\hat{O}(i, j)^*$ *узла* $(i, j)^*$ будем называть совокупность всех клеток (i, j), $(i-1, j-1)$, $(i-1, j)$, $(i, j-1)$ — если они существуют.

Как уже было сказано, основную информацию о форме образа, возникшего в решетке, например закрашиванием клеток принимающих значение 1, имеют узлы решетки, в которых линии контура возникшей фигуры изменяют свое направление (случай типа + не является изменением направления). Фигура может быть и несвязной. Очевидно, что совокупность таких узлов и значение одной клетки однозначно определяют фигуру.

Пусть в решетке $N \times N$ имеется t отмеченных узлов $(0 \leqslant t \leqslant (N+1)^2)$ так, что в каждой строке и в каждом столбце решетки находится четное число таких узлов (если t — четное, то $t \leqslant N^2$). Но тем самым можно на последную строку и последний столбец узлов решетки, не обращать внимание — они определены остальными строками и столбцами. Отмеченному узлу $(i, j)^*$ решетки припишем следующее значение: он „изменяет" значение всех клеток (p, q) решетки (матрицы), для которых $p \geqslant i$, $q \geqslant j$, причем „изменение" понимается так: если число отмеченных узлов $(i, j)^*$ решетки (матрицы), для которых $i \leqslant p$, $j \leqslant q$ нечетное, то клетка (p, q) принимает значение 1, в остальных случаях (число отмеченных узлов 0 или четное), клетка (p, q) принимает значение 0.

(2) Параметр ϱ зависит от базиса (см. стр. 180).

Из сказанного следует, что это отображение фигур и отмеченных узлов одно-однозначное. Определим теперь формально это отображение.

Определение 4. Пусть $A, B \in \mathfrak{N}_N$, $A = (a_{i,j})$, $B = (b_{i,j})$, такие, что если $\hat{O}(i,j)^*$, $(i, j = 0, 1, \ldots, N-1)$ содержит нечетное число клеток матрицы A принимающих значение 1, то $b_{i,j} = 1$. В остальных случаях $b_{i,j} = 0$. Это отображение будем обозначать $G(A) = B$. Клетку (i,j) матрицы A, для которой при этом отображении $b_{i,j} = 1$, будем называть *угловой клеткой матрицы* A и отображение $G(A) = B$ — *заданием матрицы* A *угловыми клетками.* Множество всех матриц $A \in \mathfrak{N}_N$, для которых $G(A) = B$, где $B \in \hat{\mathscr{R}}_{N,k}$, будем называть *классом булевых матриц порядка* N *с* k *угловыми клетками* и обозначать $\mathfrak{N}_{N,k}$.

Из матрицы B восстанавливается соответствующая матрица A следующим способом: если число единичных клеток (i,j) матрицы B $(b_{i,j} = 1)$, $i \leqslant p$, $j \leqslant q$, нечетное, то $a_{p,q} = 1$, в противоположном случае $a_{p,q} = 0$.

Обозначим через $\varphi(\mathfrak{M})$ — мощность класса $\mathfrak{M}$ булевых матриц. Отображение G является одно-однозначным и $\varphi(\hat{\mathscr{R}}_{N,k}) = C^k_{N^2}$. Отсюда и $\varphi(\mathfrak{N}_{N,k}) = C^k_{N^2}$.

Будем рассматривать реализацию матриц $A \in \mathfrak{N}_N$ логическими сетями из функциональных элементов над произвольным конечным базисом $Б = \{E_1, E_2, \ldots, E_\alpha\}$. Напомним некоторые определения. Каждый элемент E_i базиса $Б$ с m_i входами реализует некоторую полностью определену булеву функцию, существенно зависящую от m_i аргументов, и ему приписан некоторый положительный вес P_i. Под сложностью $L(S)$ сети S над заданным базисом понимается сумма весов входящих в нее элементов. При оценках сложности существенную роль играет параметр ϱ (приведенный вес базиса)

$$\varrho = \min \frac{P_i}{m_i - 1},$$

где минимум берется по тем элементам E_i базиса $Б$, для которых $m_i \geqslant 2$.

Пусть $L(A)$ наименьшая из сложностей сетей над данным базисом $Б$, реализующих матрицу A (т.е. по координатам i, j определяющих значение $a_{i,j}$ клетки (i,j)). Пусть $L(\mathfrak{N}_N) = \max L(A)$, где максимум берется по всем $A \in \mathfrak{N}_N$. Функция $L(\mathfrak{N}_N)$ называется *функцией Шеннона для класса* $\mathfrak{N}_N$. Аналогичным способом определяется функция Шеннона для классов $\mathfrak{N}_{N,k}$.

Пусть $2^{n-1} < N < 2^n$. Очевидно $\varphi(\mathfrak{N}_N) = 2^{N^2}$. Из известных фактов ([6], теоремы Д.1, Д.8) следует

$$L(\mathfrak{N}_N) \sim \varrho \frac{N^2}{2 \log N}. \tag{3}$$

Тесная связь между классами $\mathfrak{N}_{N,k}$ и $\hat{\mathscr{R}}_{N,k}$ дает возможность использовать некоторые свойства классов $\hat{\mathscr{R}}_{N,k}$ при изучении классов $\mathfrak{N}_{N,k}$, именно определить асимптотическое поведение функции Шеннона для этих классов.

Обозначим через I' множество всех номеров строк и через J' множество всех номеров столбцов, в которых находятся угловые клетки матрицы $A \in \mathfrak{N}_{N,k}$, т.е. $I' = \{i_1, i_2, \ldots, i_{k'_1}\}$ и $J' = \{j_1, j_2, \ldots, j_{k'_2}\}$. Если эти множества не содержат 0, то добавим этот элемент:

$$I = I' \cup 0; \quad J = J' \cup 0. \tag{4}$$

Очевидно, что

$$\varphi(I) = k_1 \leqslant k'_1 + 1; \quad \varphi(J) = k_2 \leqslant k'_2 + 1; \quad k < k'_1 + k'_2 \leqslant 2k. \tag{5}$$

Определение 5. Клетки (i,j) матрицы $A \in \mathfrak{N}_{N,k}$, для которых $i \in I$, $j \in J$, будем называть *обобщенными угловыми клетками матрицы* A и узлы $(i,j)^*$ соответствующей решетки *обобщенными угловыми узлами.*

Обобщенные угловые узлы решетки матрицы A индуцируют однозначно разложение решетки на непересекающиеся подрешетки, которым соответствуют подматрицы $A_{r,s}$ матрицы A. Очевидно, что такие подматрицы состоят сплошь из единиц или сплошь из нулей.

Расположим элементы множества I и аналогично множества I в порядке возрастания и занумеруем числами от 0 до k_1, и соответственно от 0 до k_2. Таким образом каждому обобщенному угловому узлу $(i,j)^*$ решетки матрицы A (обобщенной угловой клетке (i,j) матрицы A) соответствует пара чисел (r, s), где $r = 0, 1, \ldots, k_1$; $s = 0, 1, \ldots, k_2$. Та же пара будет принадлежать к подматрице $A_{r,s}$ определенной узлом $(i,j)^*$. Пару (r,s) будем называть *координатами подматрицы* $A_{r,s} = (a_{i,j})$, где $i = i_r, i_r+1, \ldots, i_{r+1}-1$; $j = j_s, j_s+1, \ldots, j_{s+1}-1$.

Пусть $A \in \mathfrak{N}_{N,k}$. На основе выше сказанного можно матрицу A однозначно определить множествами I, J и матрицей $B \in \mathfrak{N}_{k+1,k}$, $B = (b_{r,s})$, $(r, s = 0, 1, \ldots, k)$, такой, что $b_{r,s}$ — значение клетки (r,s) матрицы B — совпадает со значениями клеток подматрицы $A_{r,s}$ матрицы A (все клетки подматрицы $A_{r,s}$ принимают значение 0 или все значение 1). И так, реализацию матрицы A можно свести на реализацию двух монотонных булевых операторов [6], отображающих наборы длины $\lceil \log N \rceil$ на наборы длины $\lceil \log k_1 \rceil$ и соответственно наборы длины $\lceil \log N \rceil$ на наборы длины $\lceil \log k_2 \rceil$ и реализацию матрицы $B \in \mathfrak{N}_{k+1,k}$.

Замечание. Достаточно расматривать только матрицы, у которых клетка (0, 0) не является угловой. Если клетка (0, 0) является в матрице $A \in \mathfrak{N}_{N,k}$, $A = (a_{i,j})$, угловой, то можно реализовать матрицу $\bar{A} \in \mathfrak{N}_{N,k-1}$, $\bar{A} = (\bar{a}_{i,j})$, для которой клетка (0, 0) не является угловой и добавить один инвертор (или константную сеть зависящую от базиса, реализующую отрицание).

При оценках сложностей логических сетей будем часто использовать принцип локального кодирования О. Б. Лупанова [6], теоремы локального кодирования и оценки разного типа операторов доказаны в [6] и следующую теорему неравномерного локального кодирования для непересекающихся кусков кода Е. П. Липатова [4]:

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{F}^{n,m}$ — класс (n, m)-операторов, M — число операторов в классе, $J(\mathcal{F}^{n,m}) = \log M/\log\log M$ и операторы из $\mathcal{F}^{n,m}$ допускают неравномерное кодирование с соблюдением условий:*(3)

(1) $h \sim \log M$;

(2) $L(A_N^{(i)}) = \overline{O}(J(\mathcal{F}^{n,m}))$; $i = 1, 2, 3$;

(3) $Q\log h/h \to 0$;

(4) *куски кода непересекаются.*

Тогда

$$L(\mathcal{F}^{n,m}) \sim \varrho J(\mathcal{F}^{n,m}).$$

Рассмотрим сначала классы $\mathfrak{N}_{k+1,k}$, т.е. классы всех квадратных булевых матриц порядка $k+1$ с k угловыми клетками. Имеет место

Теорема 2. *Имеем*

$$L(\mathfrak{N}_{k+1,k}) \asymp k.$$

Построим сеть для реализации любой матрицы (см. Замечание, стр. 181) $A \in \mathfrak{N}_{k+1,k}$, $A = (a_{i,j})$. Строки матрицы A разделим на два подмножества A_0, A_1 в зависимости от того, сколько они содержат угловых клеток. Множеству A_0 принадлежат все строки матрицы A, содержащие больше чем l угловых клеток, где параметр l будет определен позже. Таких строк будет не больше k/l. Множество A_1 содержит все остальные строки матрицы A. Строки из A_0 определяют разбиение остальных строк матрицы A на группы (может выть и пустые) так, что в одну группу входят строки из A_1 находящиеся между двумя ,,соседними'' строками из A_0. Каждую такую группу строк разобъем на массивы подряд стоящих строк матрицы A так, чтобы в каждом массиве было не больше l угловых клеток. Всех таких массивов будет не больше $2k/l$.

Аналогичным способом разобъем и столбцы матрицы A и построим массивы столбцов. ,,Самостоятельных'' столбцов будет не больше k/l и массивов столбцов будет не больше $2k/l$.

Массивы столбцов и ,,самостоятельные'' столбцы образуют некоторое развиение строк из A_0 на части, которые содержат не больше l угловых клеток (сам массив содержит не больше l угловых клеток). Обозначим

$$m = \lceil k/l \rceil \leqslant k/l+1. \tag{6}$$

Частей строк из A_0 определенных массивами столбцов и ,,самостоятельными'' столбцами будет не больше $m \cdot 3m = 3m^2$. Множество всех частей строк и массивов строк обозначим через T' и его элементы через t'_r ($r = 1, 2, \ldots$ $\ldots, n'$; $n' \leqslant 3m^2+2m \leqslant 5m^2$). Упорядочим элементы $t'_r \in T'$ так, чтобы сначала были (в естественном порядке) все массивы и после них все части

(3) h — код оператора из $\mathcal{F}^{n,m}$ и Q — максимальный кусок кода.

строк (строки в естественном порядке и части строк тоже) и занумеруем их наборами длины $\lceil \log 5m^2 \rceil$. К номеру массива добавим еще один нулевой разряд и к номеру части строки один единичный разряд.

Аналогичным способом (с помощью множеств A_0, A_1) определим множество T'' массивов столбцов и частей столбцов и занумеруем элементы $t''_s \in T''$ ($s = 1, 2, \ldots, n''$; $n'' \leqslant 5m^2$). Аналогично как у строк, к номеру массива добавим еще один нулевой разряд и к номеру части столбца один единичный разряд.

Множество клеток $t_{r,s}$ содержит те клетки матрицы A, которые одновременно принадлежат t'_r и t''_s ($t_{r,s} = t'_r \cap t''_s$). Множество всех $t_{r,s}$ обозначим через T. Очевидно, что мощность множества T не больше $25m^4$. Занумеруем подряд все элементы $t_{r,s} \in T$.

Каждому элементу $t'_r \in T'$ сопоставим параметр u'_r, определенный следующим образом:

1° если t'_r часть строки и $j_r > 0$, причем $j_r = \min j$, где минимум берется по всем клеткам (i, j) из t'_r, то $u'_r = a_{i,j_r-1}$;

2° в остальных случаях $u'_r = 0$.

Параметр u'_r определяет четность числа угловых клеток ,,до начала'' части строки в данной строке из A_0.

Аналогичным способом сопоставим каждому элементу $t''_s \in T''$ параметр u''_s, определенный следующим образом:

1° если t''_s часть столбца и $i_s > 0$, причем $i_s = \min i$, где минимум берется по всем клеткам (i, j) из t''_s, то $u''_s = a_{i_s-1,j}$;

2° в остальных случаях $t''_s = 0$.

Каждому элементу $t_{r,s} \in T$ сопоставим параметр $u_{r,s}$ — четность числа угловых клеток (i, j) матрицы A, дщя которых $i < i_{r,s}$, $j < j_{r,s}$ и $i_{r,s} = \min p$, $j_{r,s} = \min q$, где минимум берется по всем клеткам (p, q) из $t_{r,s}$.

Пусть (i, j) клетка матрицы A. Значение $a_{i,j}$ этой клетки определяется в соответствии со следующим алгоритмом:

1° По координатам i, j (наборам длины $\lceil \log(k+1) \rceil$) определяются номера соответствующих элементов $t'_r \in T'$, $t''_s \in T''$ и $t_{r,s} \in T$.

2° По этим номерам выделяются координаты угловых клеток в соответствующих элементах t'_r, t''_s, $t_{r,s}$, которые сравниваются с координатами клетки (i, j) в соответствующих элементах t'_r, t''_s, $t_{r,s}$.

3° Выделяются значения соответствующих параметров u'_r, u''_s, $u_{r,s}$.

4° Значение $a_{i,j}$ клетки (i, j) матрицы A определено суммой по (mod 2) ее значений в соответствующих элементах t'_r, t''_s, $t_{r,s}$ и параметров u'_r, u''_s, $u_{r,s}$.

В соответсвии с этим алгоритмом строится сеть реализующая матрицу A. Функциональную блочную запись этой сети можно представить в виде

$$a_{i,j} = C'(A'(i,j)) \oplus D'(A'(i,j),i,j) \oplus C''(A''(i,j)) \oplus D''(A''(i,j),i,j) \oplus \oplus D_0\Big(A_0\big(A'(i,j),A''(i,j)\big)\Big) \oplus \oplus C_0\Big(A_0\big(A'(i,j),A''(i,j)\big)\Big), \tag{I}$$

где знак $\oplus$ представляет сумму по модулю 2.

Опишем блоки схемы реализующей матрицу $A \in \mathfrak{N}_{k+1,k}$. Блоки A', A'', A_0 определяют номера соответствующих элементов t'_r, t'_s, $t_{r,s}$. Блоки C', C'', C_0 определяют значения параметров u'_r, u''_s, $u_{r,s}$, соответственно. Блоки D', D'', D_0 определяют значения клетки (i,j) матрицы A ,,в рамках'' соответствующих элементов t'_r, t''_s, $t_{r,s}$.

Более подробно опишем блоки схемы для реализации матрицы $A \in \mathfrak{N}_{k+1,k}$ и оценим их сложность. Блок A' строится из пяти блоков и его функциональная блочная запись имеет вид

$$A'(i,j) = E_5\Big(E_1(i), E_4\big(E_3(E_2(i),j)\big)\Big). \tag{II}$$

Блок E_1 по координате i определяет номер массива (если (i,j) не принадлежить ни одному массиву, то выдается нулевой набор — см. замечание на стр. 181). Это оператор отображающий набор длины $\lceil\log(k+1)\rceil$ на набор длины $\lceil\log 5m^2\rceil$: Сложность этого блока (по теореме 1 в [5]) удовлетворяет неравенству

$$L(E_1) \leqslant c_1 \log m \frac{k}{\log k}. \tag{7}$$

Блок E_2 по координате i определяет номер строки (содержащей более l угловых клеток — занумерованных подряд), и если клетка (i,j) не принадлежит ни одной такой строке, то выдается нулевой набор. Это оператор отображающий набор длины $\lceil\log(k+1)\rceil$ на набор длины $\lceil\log m\rceil$. Сложность этого блока (по теореме 1 в [5]) удовлетворяет неравенству

$$L(E_2) \leqslant c_2 \log m \frac{k}{\log k}. \tag{8}$$

Блок E_3 — это дешифратор. Поэтому его сложность удовлетворяет неравенству (лемма 2.1 в [6])

$$L(E_3) \leqslant c_3 m. \tag{9}$$

Блок E_4 представляет m монотонных операторов (один для каждой строки из A_0), отображающих наборы длины $\lceil\log m\rceil + \lceil\log(k+1)\rceil$ в наборы длины $\lceil\log 5m^2\rceil$. Этот оператор определяет номер соответствующей части строки, содержащей клетку (i,j). В силу леммы 3.7 в [6]

$$L(E_4) \leqslant c_4(\log m + \log k)m^2. \tag{10}$$

Блок E_5 — это система $\lceil\log 5m^2\rceil$ дизъюнкторов. Этот блок выдает номер элемента t'_r, содержащего клетку (i,j) и

$$L(E_5) \leqslant c_5 \log m. \tag{11}$$

Из (7)–(11) следует, что

$$L(A') \leqslant (c_1+c_2)\log m \frac{k}{\log k} + c_3 m + c_4(\log m + \log k)m^2 + c_5 \log m. \tag{12}$$

Блок A'' построен аналогично. Он определяет номер соответствующего элемента $t''_s \in T''$, содержащего клетку (i,j).

Блок A_0 по номерам элементов t'_r и t''_s определяет номер элемента $t_{r,s} \in T$, содержащего клетку (i,j). Это оператор, отображающий два набора длины $\lceil\log 5m^2\rceil$ в набор длины $\lceil\log 25m^4\rceil$. Его сложность удовлетворяет соотношению (теорема 1 в [5])

$$L(A_0) \leqslant c_6 \log m \frac{m^2}{\log m} \leqslant c_6 m^2. \tag{13}$$

Блок C выделяет значение параметра u'_r. Это оператор выделения разряда. Поэтому (лемма 2.2 в [6])

$$L(C') \leqslant c_7 m^2. \tag{14}$$

Аналогично и блок C'' выделяет значение параметра u''_s.

Блок C_0 выделяет значение параметра $u_{r,s}$. Это тоже оператор выделения разряда и поэтому

$$L(C_0) \leqslant c_8 m^4. \tag{15}$$

Блок D' определяет значение клетки (i,j) ,,в рамках'' элемента t'_r, т.е. значение соответствующей клетки в соответствующей подматрице, определенной элементом t'_r. Раньше, чем его описать, укажем кодирование матрицы $A \in \mathfrak{N}_{k+1,k}$. Код матрицы представляют три списка координат угловых клеток — один для каждого разбиения (покрытия) T', T'', T. Координаты угловых клеток выписаны подряд для каждого элемента t'_r, t''_s, $t_{r,s}$ соответственно, а затем в порядке номеров этих элементов. Длина одного такого списка

$$h_1 = 2k\lceil\log(k+1)\rceil. \tag{16}$$

Блок D' строится на основе принципа локального кодирования О. Б. Лупанова [6]. Куском кода будем считать набор координат угловых клеток соответствующего элемента t'_r. Максимальная длина куска кода Q будет не больше $2l\lceil\log(k+1)\rceil$. Сложности соответствующих операторов выбора куска кода $A_N^{(1)}$, $A_N^{(2)}$ (это $(\lceil\log 5m^2\rceil, p)$- и $(\lceil\log 5m^2\rceil, q)$-операторы соответственно; здесь $p = \lceil\log h_1\rceil$; $q = \lceil\log Q\rceil$) удовлетворяют неравенствам (теорема 1 в [5])

$$L(A_N^{(1)}) \leqslant c_9 \log k \frac{m^2}{\log m} \tag{17}$$

и

$$L(A_N^{(2)}) \leqslant c_{10}(\log l + \log\log k)\frac{m^2}{\log m}. \tag{18}$$

Блок декодирования $A_N^{(3)}$ состоит из l операторов сравнения наборов длины $2\lceil \log(k+1)\rceil$ и l-разрядного сумматора по $(\operatorname{mod} 2)$. Поэтому (лемма 3.1 в [6])

$$L(A_N^{(3)}) \leqslant c_{11}\log k + c_{12} l. \tag{19}$$

Пусть $l = \lceil k/\log k\rceil$, тогда $m \leqslant \log k$. Отсюда следует, что выполнены условия теоремы неравномерного локального кодирования для непересекающихся кусков кода (теорема 1) — соотношения (16)–(19), и

$$L(D') \sim \varrho \frac{2k\lceil \log(k+1)\rceil}{\log\left(2k\lceil \log(k+1)\rceil\right)}. \tag{20}$$

Аналогичным способом строятся и блоки D'', D_0. Сложность последнего блока — сумматора по $(\operatorname{mod} 2)$ — очевидно имеет константную сложность (т.е. $\bar{o}(k)$). Тогда для сложности всей сети, реализующей произвольную матрицу $A \in \mathfrak{N}_{k+1,k}$, имеем

$$L(\mathfrak{N}_{k+1,k}) \lesssim 3.O(k) + \bar{o}(k) \lesssim O(k). \tag{21}$$

Тем самым получена верхняя оценка функции Шеннона для класса $\mathfrak{N}_{k+1,k}$. Из мощности класса $\mathfrak{N}_{k+1,k}$ и теоремы Д.1 в [6], следует нижняя оценка функции Шеннона для этого класса

$$L(\mathfrak{N}_{k+1,k}) \geqslant \varrho(k+1). \tag{22}$$

Теорема 2 доказана.

Теорема 3. *Пусть $\mathfrak{N}_{N,k_N}$ класс квадратных булевых матриц порядка N с k_N угловыми клетками, и пусть последовательность k_N такова, что*

$$\frac{k_N}{(\log\log N)^2} \to \infty; \qquad \frac{\log k_N}{\log N} \to 0.$$

Тогда

$$L(\mathfrak{N}_{N,k_N}) \sim \varrho \frac{\log C_{N^2}^{k_N}}{\log\log C_{N^2}^{k_N}}.$$

Сеть для произвольной матрицы $A \in \mathfrak{N}_{N,k}$ строится на основе следующего алгоритма:

(1) По координате i клетки (i, j) определяется число элементов множества I матрицы A „влияющих" на эту клетку, т.е. координата i'.

(2) Аналогично, по координате j клетки (i, j) определяется число элементов множества J матрицы A „влияющих" на клетку (i, j), т.е. координата j'.

(3) По координатам i', j' определяется значение клетки (i, j) матрицы(4) $B_A \in \mathfrak{N}_{k+1,k}$, соответствующей матрице A. Значение клетки (i', j') матрицы B_A совпадает со значением клетки (i, j) матрицы A.

(4) Из того, что $k_1', k_2' \leqslant k$ следует, что число элементов множеств I, J можно формально дополнить до $k+1$.

Функциональная блочная запись этого алгоритма (сети) имеет вид

$$a_{i,j} = b_{i',j'} = C\left(A_I(i), A_J(j)\right). \tag{III}$$

Разобъем элементы множества I на группы, содержащие ровно 2^λ элементов, кроме может быть последней, содержащей меньше чем 2^λ элементов. Таких групп будет не больше чем d, где

$$d = \lceil k/2^\lambda\rceil \leqslant k/2^\lambda + 1.$$

Пусть $\lambda = \lfloor 1/2 \log k\rfloor$.

Кодирование и декодирование операторов F_I, F_J определяющих(5) число „влияющих" элементов I, J соответственно, на клетку (i, j) матрицы A проводится аналогично тому, как это делалось для классов функций алгебры логики с данным числом единиц в случае II в [6].

В [6] для доказательства теоремы 3.4 использовались три конструкции, позволяющие получать асимптотическую оценку функции Шеннона для классов булевых функций с данным числом единиц. Все эти конструкции позволяют с небольшим изменением получить число „влияющих" элементов множества I и множества J матрицы $A \in \mathfrak{N}_{N,k}$. В случае (I) прямо вычисляется номер последнего „влияющего" элемента. В случае (II) можно в схеме оператора заменить последних 2^λ штук схем совпадения схемами сравнения, причем их сложность будет того же порядка. К ним нужно еще добавить сумматор для подсчета числа единиц из 2^λ схем сравнения. Из конструкции оператора $A_N^{(3)}$ следует, что сложность сумматора асимптотически не влияет на сложность самого оператора $A_N^{(3)}$. В случае (III) достаточно к схеме добавить два оператора для определения числа „влияющих" элементов. Это $(\lceil \log N\rceil - d, \lceil \log k\rceil)$-операторы и их сложность существенно меньше, чем сложность всей сети. Таким образом, можно оценить по теореме 3.4 в [6] и теореме 1 в [5] сложность реализации матрицы (произвольной) $A \in \mathfrak{N}_{N,k}$ следующим способом

$$L(A) \lesssim 2\varrho \frac{\log C_N^k}{\log\log C_N^k} + L(C). \tag{23}$$

Блок C строится на основе теоремы 2. Из условий теоремы 3 следует, что сложность этого блока существенно меньше чем сложность блоков A_I, A_J. Из того, что имеет место

$$L(C) = O(k),$$

следует утверждение теоремы 3. Теорема доказана.

Теорема 4. *Пусть $\mathfrak{N}_{N,k_N}$ класс квадратных булевых матриц порядка N с k_N угловыми клетками, и пусть последовательность k_N такова, что*

$$N \leqslant k_N \leqslant N^{7/4}(\log N)^{1/2}.$$

(5) Оператор F_I реализуется блоком A_I, блок A_J реализует оператор F_J.

Тогда

$$L(\mathfrak{N}_{N,k_N}) \asymp \frac{\log C_{N^2}^{k_N}}{\log\log C_{N^2}^{k_N}}.$$

Сеть для произвольной матрицы $A \in \mathfrak{N}_{N,k}$ строится аналогично тому, как это было сделано в доказательстве теоремы 2. Матрица A разбивается на полосы строк, содержащих не более l угловых клеток (параметр l будет определен в зависимости на k). Определяется значение соответствующей клетки в соответствующей полосе. Таким же способом разбивается матрица A на полосы столбцов и определяется значение клетки в соответствующей полосе. Полосы строк и столбцов определяют разбиение матрицы A на непересекающиеся подматрицы. Определяется значение соответствующей клетки в рамках соответствующей подматрицы и четность числа угловых клеток ,,до начала'' этой подматрицы. Значение клетки матрицы A получается суммированием по (mod 2) значений этой клетки в полосе строк и в полосе столбцов, в подматрице и четности числа угловых клеток ,,до начала'' соответствующей подматрицы.

Из того, что в этом случае $\log C_{N^2}^{k} \sim k\log(N^2/k) \approx k\log N$, кодом матрицы A служит список координат угловых клеток матрицы. (Код матрицы представляют фактически три списка координат угловых клеток (в общем случае разных) — для полос строк, полос столбцов и подматриц). Сеть для реализации матрицы A строится из трех аналогичных частей (см. теорему 2).

Рассмотрим два случая:

(1) $N \leqslant k \leqslant N^{3/2}$;

(2) $k > N^{3/2}$.

В случае (1) в отличии от схемы для реализации матриц из классов $\mathfrak{N}_{k+1,k}$ не вводятся параметры u_r', u_r'' потому, что все элементы покрытий T', T'' одинаковой природы — полосы строк или полосы столбцов. При определении параметра l в зависимости от k

$$l = \ulcorner k/\log k \urcorner,$$

выполнены условия теоремы 1, и сложность блока, выделяющего соответствующий кусок кода (например, для полосы строк) асимптотически не превосходит

$$c_{13}\frac{h_1}{\log h_1} \leqslant c_{14}\frac{k\log N}{\log(k\log N)} \leqslant c_{15}\frac{k\log(N^2/k)}{\log(k\log(N^2/k))}. \tag{24}$$

Такая же оценка имеет место и для блоков, выделяющих соответствующие куски кода для полосы столбцов и подматриц. Сложность всей сети для реализации произвольной матрицы A из класса $\mathfrak{N}_{N,k}$ в этом случае удовлетворяет неравенству

$$L(A) \lesssim 3.c_{16}\frac{k\log(N^2/k)}{\log(k\log(N^2/k))} \sim c_{17}\frac{\log C_{N^2}^{k}}{\log\log C_{N^2}^{k}}. \tag{25}$$

В случае (2) объединяются элементы покрытий T', T'' и T, т.е. полосы строк, полосы столбцов и подматрицы разбиения матрицы, определенного полосами строк и полосами столбцов, на группы таким способом, чтобы длина кода для одной группы была асимптотически равной некотогору параметру p, который будет определен позже. Сеть для реализации матрицы состоит из трех основных блоков A', A'' и A_0, вычисляющих значение соответствующей клетки в рамках полосы строк, полосы столбцов и подматрицы, соответственно. Блок C определяет четность угловых клеток матрицы ,,до начала'' данной подматрицы. Последний блок, это сумматор по (mod 2) с четырьмя входами. Функциональная блочная запись имеет вид

$$a_{i,j} = A_0\big(A_2'(i,j), A''(i,j)\big) \oplus C\big(A_3'(i,j), A''(i,j)\big) \oplus A_1'(i,j) \oplus A''(i,j), \tag{IV}$$

где

$$A'(i,j) = \big(A_1'(i,j), A_2'(i,j), A_3'(i,j)\big);$$

$$A''(i,j) = \big(A_1''(i,j), A_2''(i,j), A_3''(i,j)\big).$$

Более подробно опишем действие блока A' (блоки A'', A_0 аналогичны). По координате i клетки (i,j) матрицы A определяются номер группы полос строк и длина кода этой группы. По номеру группы и координате i клетки (i,j) определяются номер полосы данной группы и длина ее кода. По номеру группы выделяется код соответствующей группы. По номеру полосы и длине ее кода выделяется из кода группы код соответствующей полосы. Из-за того, что кодирование тривиальное, можно координаты угловых клеток в данной полосе прямо сравнивать с координатами клетки (i,j) и определить так число ,,влияющих'' угловых клеток в данной полосе на клетку (i,j), т.е. значение клетки (i,j) в данной полосе. Блок A' строится в соответствии с выше сказанным и функциональная блочная запись имеет вид

$$A'(i,j) = H_7\Big(H_6\big(H_5(H_1(i), H_2(i)), H_4(H_1(i), i), H_3(H_1(i), i), i, j\big)\Big).$$

Опишем более подробно блоки H_1–H_7 и оценим их сложности. Блок H_1 определяет номер соответствующей группы. Групп асимптотически не больше $h_1/p = q + w(N)$, где h_1 — длина кода матрицы для полос строк и $w(N) \to 0$ с ростом N. Из этого следует, что блок H_1 — это монотонный $(\ulcorner\log N\urcorner, \ulcorner\log q + w(N)\urcorner)$-оператор и его сложность удовлетворяет неравенству (лемма 3.7 в [6])

$$L(H_1) \lesssim c_{18}q\log N. \tag{26}$$

Блок H_2 определяет длину кода соответствующей группы. Это $(\ulcorner\log N\urcorner, \ulcorner\log h_1\urcorner)$-оператор и (теорема 1 в [5]) имеет место

$$L(H_2) \leqslant c_{19}\log h_1 \frac{N}{\log N}. \tag{27}$$

Блок H_3 определяет длину кода полосы, которая не превосходит $2l\ulcorner\log N\urcorner$ (содержит не больше l угловых клеток). Это делает некоторый $(\ulcorner\log N\urcorner, \ulcorner\log(2l\ulcorner\log N\urcorner)\urcorner)$-оператор, сложность которого удовлетворяет неравенству

$$(28) \qquad L(H_3) \leqslant c_{20}\log(2l\log N)\frac{N}{\log N}.$$

Блок H_4 определяет номер полосы в данной группе. Это один монотонный $(\ulcorner\log N\urcorner, \ulcorner\log k/l\urcorner)$-оператор (число всех полос не превосходит k/l), один монотонный $\big(\ulcorner\log N\urcorner, \ulcorner\log(q+w(N))\urcorner\big)$ -оператор (число групп не больше $q+w(N)$, где $w(N)\to 0$ с ростом N), один монотонный $\big(\ulcorner\log(q+w(N))\urcorner, \ulcorner\log k/l\urcorner\big)$-оператор и оператор вычитания ($\ulcorner k/l\urcorner$-разрядный). На основе леммы 3.7 в [6] сложность блока H_4 удовлетворяет неравенству

$$(29) \qquad L(H_4) \lesssim c_{21}\frac{k}{l}\log N + c_{22}q\log N + c_{23}\frac{k}{l}\log q + c_{24}\frac{k}{l}.$$

Блок H_6 выделяет из кода группы кусок кода — код соответствующей полосы. Он состоит из схемы для $\big(\ulcorner\log(q+w(N))\urcorner+\ulcorner\log k/l\urcorner, \ulcorner\log q\urcorner\big)$-оператора, определяющего начало кода данной полосы в соответствующей группе и схемы для оператора выделения части набора. Из того, что длина кода группы асимптотически равна p, по теореме 1 в [5] и лемме 2.3 в [6] следует

$$(30) \qquad L(H_6) \lesssim c_{25}\log p\frac{qk}{l} + c_{26}p\log p.$$

Блок H_7 сравнивает координаты угловых клеток в данной полосе и вычисляет значение клетки (i, j) в рамках этой полосы. Это делает l штук $(2\ulcorner\log N\urcorner)$-разрядных схем сравнения, сумматор по $(\mathrm{mod}\, 2)$ с l входами. Сложность этого блока удовлетворяет неравенству (лемма 3.1 в [6])

$$(31) \qquad L(H_7) \leqslant c_{27}l\log N + c_{28}l.$$

Выберем параметры l и p следующим образом

$$(32) \qquad l = \left\lfloor\frac{k^{2/3}}{\log N}\right\rfloor; \quad p = \left\lfloor\frac{k\log N}{(\log k)^3}\right\rfloor.$$

Нетрудно убедится в том, что при этом определении параметров l и p, имеет место(⁶) (см. (26)–(31))

$$(33) \qquad (H_v) = \bar{o}\left(\frac{k\log N}{\log k}\right); \quad v = 1, 2, 3, 4, 6, 7.$$

Из (32) следует

$$(34) \qquad \frac{p\log h_1}{h_1} \to 0.$$

(⁶) Сложность блока H_5 оценивается теоремой локального кодирования.

Соотношения (33), (34) означают, что выполнены условия теоремы локального кодирования для непересекающихся кусков кода и

$$(35) \qquad L(A') \lesssim c_{29}\frac{h}{\log h} \lesssim c_{30}\frac{\log C_{N^2}^k}{\log\log C_{N^2}^k}.$$

Из-за того, что блок A'' строится совсем аналогично как блок A', имеет место

$$(36) \qquad L(A'') \lesssim c_{31}\frac{\log C_{N^2}^k}{\log\log C_{N^2}^k}.$$

Схема (сеть) блока A_0 строится на основе того-же алгоритма, как и схемы блоков A', A''. Из-за того, что число подматриц не превосходит $(k/l)^2$ и число групп подматриц не превосходит $q^2+w(N)$, где $w(N)\to 0$ с ростом N, сложность блока H_4' соответствующего блоку H_4 в схеме A', удовлетворяет условию

$$(37) \qquad L(H_4') \lesssim c_{32}(k/l)^2\log N + c_{33}q^2\log N + c_{34}(k/l)^2\log q + c_{35}(k/l)^2.$$

Аналогично сложность блока H_6', соответствующего блоку H_6 в схеме A', удовлетворяет неравенству

$$(38) \qquad L(H_6') \lesssim c_{36}\log p\frac{q^2k^2}{l^2} + c_{37}p\log p.$$

Из определения параметров l и p (см. (32)) следует, что

$$(39) \qquad L(H_v') = \bar{o}\left(\frac{k\log N}{\log k}\right); \quad v = 4, 6.$$

Отсюда следует, что (теорема локального кодирования)

$$(40) \qquad L(A_0) \lesssim c_{38}\frac{\log C_{N^2}^k}{\log\log C_{N^2}^k}.$$

Блок C определяет четность числа угловых клеток до начала соответствующей подматрицы. Это оператор выделения разряда и его сложность удовлетворяет неравенству (лемма 2.2 в [6])

$$(41) \qquad L(C) \leqslant c_{39}(k/l)^2 = \bar{o}\left(\frac{k\log N}{\log k}\right).$$

Из (35), (36), (40) и (41) следует, что сложность схемы (сети) реализующей матрицу $A\in\mathfrak{N}_{N,k}$ в этом случае удовлетворяет неравенству

$$(42) \qquad L(A) \lesssim c_{40}\frac{\log C_{N^2}^k}{\log\log C_{N^2}^k}.$$

Нижняя оценка функции Шеннона удовлетворяет в этом случае условию (теорема Д.1 в [6])

$$(43) \qquad L(\mathfrak{N}_{N,k}) \gtrsim c_{41}\frac{\log C_{N^2}^k}{\log\log C_{N^2}^k}.$$

Из (43) и (42) следует утверждение теоремы 4 в случае (2).

Теорема 5. *Пусть $\mathfrak{N}_{N,k_N}$ класс квадратных булевых матриц порядка N с k_N угловыми клетками, и пусть последовательность k_N такова, что*

$$N^{7/4}(\log N)^{1/2} \leqslant k_N \leqslant N^2/2.$$

Тогда

$$L(\mathfrak{N}_{N,k_N}) \sim \varrho \frac{\log C_{N^2}^{k}}{\log\log C_{N^2}^{k}}.$$

Кодирование и декодирование в этом случае подобны кодированию и декодированию для ненулевых инвариантных классов, но являются неравно-мерными. Для кодирования выбирается четный параметр d. Для каждого l, $0 \leqslant l \leqslant 2^d$, все булевы матрицы из класса $\hat{\mathscr{R}}_{2^{d/2},l}$ нумеруются наборами длины $\lceil \log C_{2^d}^{l} \rceil$ (их $C_{2^d}^{l}$ штук). Кодом матрицы является список номеров $2^{2\lceil \log N\rceil - d}$ матриц из классов $\hat{\mathscr{R}}_{2^{d/2},l}$ и некоторая дополнительная информация. Таким способом матрица $A \in \mathfrak{N}_{N,k}$ фактически разбивается на подматрицы порядка $2^{d/2}$, кроме, может быть, „крайних”, меньшего размера. К каждому номеру подматрицы из $\hat{\mathscr{R}}_{2^{d/2},l}$ прибавляются значения крайних (извне, сверху и слева относительно подматрицы) клеток соседних подматриц (если таких нет, то добавляются нули). Ко всему этому еще добавляется один разряд — четность числа угловых клеток „до начала” подматрицы. Вычисление значения клетки (i, j) матрицы $A \in \mathfrak{N}_{N,k}$ происходит так: Из последних разрядов (кроме первых $d/2$) координаты i и последних разрядов (кроме первых $d/2$) координаты i определяется число единиц и номер матрицы из класса $\hat{\mathscr{R}}_{2^{d/2},l}$. По этим характеристикам и дополнительной информации в куске кода вычисляется значение соответствующей клетки в подматрице. Оно сумируется по (mod 2) с четностью числа угловых клеток „до начала” подматрицы (из дополнительной информации в конце кода).

Аналогичным способом как в случае II доказательства теоремы 3.4 в [6] доказивается, что для максимального куска кода, его длина удовлетворяет неравенству

$$Q \leqslant 2^d + 2\cdot 2^{d/2} + 1 = 2^{d/2}(2^{d/2}+2)+1 \tag{44}$$

и максимальная длина кода произвольной матрицы $A \in \mathfrak{N}_{N,k}$ в этом случае не превосходит

$$h_A \leqslant 2^{2\lceil \log N\rceil - d} + \log C_{N^2}^{k} + 2^{2\lceil \log N\rceil - d}(2^{d/2}+1),$$

где последний член суммы — дополнительная информация. Будем считать, что для всякой матрицы $A \in \mathfrak{N}_{N,k}$ длина кода равна

$$h_A = \lceil 2^{2\lceil \log N\rceil - d}(2^{d/2}+2) + \log C_{N^2}^{k} \rceil. \tag{45}$$

Делается это так: Пусть d-целое четное число, заключенное между 0 и $2\log N$ (его более точное определение будет дано позже). Пусть $f(x_1, x_2, \ldots, x_{2\lceil \log N\rceil})$-функция алгебры логики из $\mathscr{R}_{2\lceil \log N\rceil, k}$ определенная матрицей $A \in \mathfrak{N}_{N,k}$ ($f(\tilde{x})$ можно доопределить нулями). Рассмотрим функции

$$f_{\tilde{\sigma}'}(y_1, y_2, \ldots, y_d) = f(x_1, x_2, \ldots, x_{d/2}), \sigma_{d/2+1}, \ldots, \sigma_{\lceil \log N\rceil}, x_{\lceil \log N\rceil}, \ldots$$
$$\ldots, x_{\lceil \log N\rceil + d/2}, \sigma_{\lceil \log N\rceil + d/2+1}, \ldots, \sigma_{2\lceil \log N\rceil}),$$

где

$$\tilde{\sigma} = (\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2), \quad (|\tilde{\sigma}_1| = i,\ |\tilde{\sigma}_2| = j),$$
$$\tilde{\sigma}' = (\sigma_{d/2+1}, \ldots, \sigma_{\lceil \log N\rceil}, \sigma_{\lceil \log N\rceil + d/2+1}, \ldots, \sigma_{2\lceil \log N\rceil}).$$

Это $2^{2\lceil \log N\rceil - d}$ функций. Пусть $\tilde{\pi}_{\tilde{\sigma}'} = (f_{\tilde{\sigma}'}(0, \ldots, 0), \ldots, f_{\tilde{\sigma}'}(1, \ldots, 1))$ — набор значений функции $f_{\tilde{\sigma}'}$ на всех наборах значений ее аргументов в естественном порядке. (Длина этого набора 2^d). Пусть $l_{\tilde{\sigma}'}$ — число единиц в $\tilde{\pi}_{\tilde{\sigma}'}$.

Очевидно, что „единичные наборы” f распределяются по функциям $f_{\tilde{\sigma}'}$: каждый единичный набор функции f определяет в точности один единичный набор в точности одной функции $f_{\tilde{\sigma}'}$. Поэтому

$$k = \sum_{\tilde{\sigma}'} l_{\tilde{\sigma}'}.$$

Набор $\tilde{\pi}_{\tilde{\sigma}'}$ принадлежит множеству $B_{2^d, l_{\tilde{\sigma}'}}$ (множество $B_{n,l}$ содержит наборы с l единицами длины n — всего C_n^l наборов, которые занумерованы в порядке возрастания их значений). Согласно нумерации наборов из $B_{2^d, l_{\tilde{\sigma}'}}$, набору $\tilde{\pi}_{\tilde{\sigma}'}$ соответствует некоторый набор $\tilde{\nu}_{\tilde{\sigma}'}$ длины 2^d, причех единицы в наборе $\tilde{\nu}_{\tilde{\sigma}'}$, могут встречатся лишь на первых $\lceil \log C_{2^d}^{l_{\tilde{\sigma}'}} \rceil$ местах [6]. Пусть $\tilde{\mu}_{\tilde{\sigma}'}$ набор, состоящий из первых $\lceil \log C_{2^d}^{l_{\tilde{\sigma}'}} \rceil$ разрядов набора $\tilde{\nu}_{\tilde{\sigma}'}$. Кодом функции f объявим набор $(\tilde{\mu}(0, \ldots, 0), \ldots, (\tilde{\mu}(1, \ldots, 1))$, составленный из всех наборов $\tilde{\mu}_{\tilde{\sigma}'}$, расположенных в естественном порядке. Очевидно, что длина этого кода равна

$$\sum_{\tilde{\sigma}'} \lceil \log C_{2^d}^{l_{\tilde{\sigma}'}} \rceil$$

(всего $2^{2\lceil \log N\rceil - d}$ слагаемых). Кусками кода являются наборы $\tilde{\mu}_{\tilde{\sigma}'}$ плюс значения клеток матрицы A на краях подматрицы („извне, сверху и слева” — если таких нет, то считаются нулевыми). Отсюда следует (44). Из леммы 3.11 в [6] следует (45).

Операторы A_1, A_2, A_3 аналогичные соответствующим операторам $A_N^{(1)}$, $A_N^{(2)}$ и $A_N^{(3)}$ в случае II доказательства теоремы 3.4 в [6], строятся следующим способом:

Оператор A_1 по $\tilde{\sigma}' = (\sigma_{d/2+1}, \ldots, \sigma_{\lceil \log N\rceil}, \sigma_{\lceil \log N\rceil + d/2+1}, \ldots, \sigma_{2\lceil \log N\rceil})$, т.е. по $2\lceil \log N\rceil - d$ разрядам набора $\tilde{\sigma}$, вычисляет номер начального разряда соответствующего куска кода — набор длины $p = \lceil \log h_A \rceil$. Это $(2\lceil \log N\rceil - d, p)$-оператор и его сложность удовлетворяет неравенству (теорема Д.5 в [6])

$$L(A_1) \leqslant \frac{p 2^{2\lceil \log N\rceil - d}}{\log(p 2^{2\lceil \log N\rceil - d})} + p. \tag{46}$$

Оператор A_2 вычисляет по $\tilde{\sigma}'$ длину соответствующего куска кода — точнее, его двоичную запись — набор длины d. Это $(2\lceil \log N\rceil - d, d)$-оператор и по теореме Д.5 в [6] имеет место

$$L(A_2) \leqslant \frac{d 2^{2\lceil \log N\rceil - d}}{\log(d 2^{2\lceil \log N\rceil - d})} + d. \tag{47}$$

Оператор A_3 является основным оператором декодирования. Он по набору $\tilde{\sigma}$ и куску кода вычисляет значение клетки (i, j) в рамках соответствующей подматрицы. Схема (сеть) для A_3 строится в соответствии со следующим алгоритмом:

(1) По набору $\tilde{\sigma}'$ вычисляется набор $\tilde{\varkappa}_{\tilde{\sigma}'}$, длины d-двоичная запись числа $l_{\tilde{\sigma}'}$ единиц у функции $f_{\tilde{\sigma}'}$, т.е. число угловых клеток в соответствующей подматрице. Это делает оператор $A_\varkappa$ — $(2\lceil\log N\rceil - d,\, d)$-оператор, сложность которого удовлеторяет неравенству (теорема Д.5 в [6])

$$L(A_\varkappa) \leqslant c_{42}\,\frac{d2^{2\lceil\log N\rceil-d}}{\log(d2^{2\lceil\log N\rceil-e})} + c_{43}d. \tag{48}$$

(2) По набору $\tilde{\varkappa}_{\tilde{\sigma}'}$ и куску кода $\tilde{\mu}_{\tilde{\sigma}'}$ вычисляется набор $\tilde{\pi}_{\sigma'}$ значений функции $f_{\tilde{\sigma}'}$. Это делает оператор D_{2^d}, сложность которого по лемме 3.10 в [6] удовлетворяет неравенству

$$L(D_{2^d}) \leqslant c_{44}\,\frac{2^{3d}}{2}. \tag{49}$$

(3) Оператор C вычисляет сумму по $(\mathrm{mod}\,2)$ единиц в $\tilde{\pi}_{\tilde{\sigma}'}$ до клетки с координатами определенными набором $\tilde{\sigma}'' = (\tilde{\sigma}_1'', \tilde{\sigma}_2'')$, $\tilde{\sigma}_1'' = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{d/2})$, $\tilde{\sigma}_2'' = (\sigma_{\lceil\log N\rceil+1}, \sigma_{\lceil\log N\rceil+2}, \ldots, \sigma_{\lceil\log N\rceil+d/2})$. Это два дешифратора (для каждой координаты $\tilde{\sigma}_1''$, $\tilde{\sigma}_2''$ один) наборов длины 2^d, два оператора K_{2^d}, отображающие набор длины 2^d с одной единицей на v-том месте ($v = 1, 2, \ldots, 2^d$) в набор длины 2^d, где на первых v местах стоят единицы и на остальных нули, система 2^d конъюнкторов, оставляющих единицы в наборе $\tilde{\pi}_{\sigma'}$ (матрица порядка $2^{d/2}$) только до клетки с координатами, определенными набором $\tilde{\sigma}'$, и сумматором по $(\mathrm{mod}\,2)$ с 2^d входами. Сложность этого оператора удовлетворяет неравенству (лемма 2.1 в [6])

$$L(C) \leqslant c_{45}2^d. \tag{50}$$

(4) По дополнительной информации вычисляется сумма по $(\mathrm{mod}\,2)$ крайних клеток соседних пoматриц (сверху и слева) до клетки с координатами $|\tilde{\sigma}_1''|$, $|\tilde{\sigma}_2''|$. Это делает блок C_1 представляющий два $2^{d/2}$-дешифратора, два оператора $K_{2^{d/2}}$ и сумматор по $(\mathrm{mod}\,2)$ с $2^{d/2+1}$ входами. Сложность этого блока удовлетворяет неравенству

$$L(C_1) \leqslant c_{46}2^{d/2}. \tag{51}$$

(5) По $(\mathrm{mod}\,2)$ суммируется значение соответствующей клетки в данной подматрице, результат обработки дополнительной информации и четность числа единиц (угловых клеток) до начала подматрицы. Это делает сумматор по $(\mathrm{mod}\,2)$ с тремя входами. Очевидно, что его сложность не больше некоторой константы.

Из (48)–(51) следует, что

$$L(A_3) \leqslant \frac{d2^{2\lceil\log N\rceil-d}}{\log(d2^{2\lceil\log N\rceil-d})} + \frac{2^{3d}}{2}. \tag{52}$$

Положим

$$d = 2\lceil\tfrac{1}{6}\log k - \tfrac{1}{5}\log\log k\rceil. \tag{53}$$

Тогда можно убедится в том, что таким образом выполнены условия теоремы неравномерного кодирования для непересекающихся кусков кода (теорема 1) и в этом случае имеет место

$$L(\mathfrak{N}_{N,k}) \lesssim \varrho\,\frac{\log C_{N^2}^k}{\log\log C_N^k}. \tag{54}$$

Нижняя оценка функции Шеннона получается по теореме Д.1 в [6]

$$L(\mathfrak{N}_{N,k}) \gtrsim \varrho\,\frac{\log C_{N^2}^k}{\log\log C_{N^2}^k}. \tag{55}$$

Из (54) и (55) прямо следует утверждение теоремы 5.

Литература

[1] [И. Гаверлик] I. Haverlik, *Matematický náčrt automatizácie spracovania dát z hľadiska tvorby tématických máp*, Sb. *Automatizácia tvorby kartografických diel*, Bratislava 1971.

[2] [И. Гаверлик, Й. Крхо] I. Haverlik, J. Krcho, *Theoretical problems of isoline maps construction by means of computers*, ICA Commision III, Budapest 1974.

[3] —, —, *The use of computers in the morphometric analysis of relief isolation with an elaborating program in Algol for maps construction*, Acta Geol. Geograph. Univ. Comenianae, Geograph. Physica 1 (1973), Bratislava.

[4] Е. П. Липатов, *Об одном случае неравномерного локального кодирования*, Сб. *Проблемы кибернетики* 26 (1973) Москва.

[5] О. Б. Лупанов, *О синтезе некоторых классов управляющих систем*, Сб. *Проблемы кибернетики* (1963), Москва.

[6] —, *О одном подходе к синтезу управляющих систем — принципе локального кодирования*, Сб. *Проблемы кибернетики* 14 (1965), Москва.

[7] В. И. Фиников, *Об одном семействе классов функций алгебры логики и их реализации в классе П-схем*, ДАН СССР 115, 2 (1957), Москва.

[8] [Б. Этниф] F. Attneave, *Informational aspects of visual perception*, Psych. Rev. 61 (1954), N.Y.

Presented to the Semester
Discrete Mathematics
(February 15–June 16, 1977)