SPECTRAL THEORY
BANACH CENTER PUBLICATIONS, VOLUME 8
PWN–POLISH SCIENTIFIC PUBLISHERS
WARSAW 1982

# О МЕТОДЕ ЛОЖНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

Б. В. ЛОГИНОВ, Д. Г. РАХИМОВ

*Институт Математики им. В. И. Романовского, АН УзССР, Ташкент, СССР*

Предложенный профессором М. К. Гавуриным [1], [2] способ разыскания собственных чисел и элементов линейных операторов получил дальнейшее развитие в работах [3]–[8]; в [4]–[8] метод ложных возмущений применяется для уточнения изолированных фредгольмовских точек оператор-функций $A(t)$ спектрального параметра $t$. Основная идея метода заключается во введении специального оператора возмущения, при котором заданные приближения к собственным числам, векторам и жордановым цепочкам становятся точными для возмущённого оператора.

В данной работе рассматривается уточнение кратных собственных чисел и обобщённых жордановых элементов ([9], гл. IX) достаточно гладких, для простоты изложения ограниченных, оператор-функций при использовании (как и в работе [8] для простых точек спектра) идеи ложного возмущения и итерационного процесса Ньютона–Канторовича. Применяются обозначения и терминология [9]. Мы опускаем громоздкие выкладки, связанные с выяснением условий квадратичной сходимости метода.

## 1. Кратные точки спектра без жордановых цепочек

Пусть $\lambda$ изолированная фредгольмовская точка задачи на собственные значения

$$A(t)\varphi = 0, \quad A(t)\in L\{E_1 \to E_2\}, \quad t\in(a,b) \tag{1}$$

$E_1$ и $E_2$ вещественные банаховы пространства, $\{\varphi_i\}_1^n$ — базис подпространства нулей $N(A(\lambda))$, $\{\psi_i\}_1^n \in E_2^*$ базис дефектного подпространства $N^*(A(\lambda))$ и $\det\left\|(\psi_i, A_t'(\lambda)\varphi_j)\right\| = k \neq 0$, т.е. обобщённые жордановы элементы отсутствуют. По заданным достаточно хорошим приближениям $\varphi_{i0}, \psi_{i0}$, $i = 1, \ldots, n$, и $\Lambda$,

$$\|\varphi_i - \varphi_{i0}\| \leqslant \varepsilon, \quad \|\psi_i - \psi_{i0}\| \leqslant \varepsilon, \quad |\lambda - \Lambda| \leqslant \varepsilon,$$

требуется найти точные значения $\varphi_i, \psi_i$ и $\lambda$.

Применяя теорему Руше, можно показать [7], что уравнение

$$F^{(0)}(t-\Lambda) \equiv f^{(0)}(t) \equiv \det\left\|(\psi_{i0}, A(t)\varphi_{j0})\right\| = 0 \tag{2}$$

в окрестности $t = \Lambda'$ имеет $n$ близких между собой корней. В качестве приближения $\lambda_0$ выберем одно из решений уравнения (2). В силу малости $\varepsilon$, $k_0 = \det\left\|(\psi_{i0}, A_t'(\lambda_0)\varphi_{j0})\right\| \neq 0$ и можно определить системы элементов $\{\gamma_{i0}\}_1^n \in E_1^*$ и $\{z_{j0}\}_1^n \in E_2$ биортогональные соответственно $\{\varphi_{i0}\}_1^n$ и $\{\psi_{j0}\}_1^n$ в виде

$$\gamma_{i0} = \frac{1}{k_0}\sum_{s=1}^{n} K_{si}^0 A_t^{*\prime}(\lambda_0)\psi_{s0}, \qquad z_{i0} = \frac{1}{k_0}\sum_{s=1}^{n} K_{is}^0 A_t'(\lambda_0)\varphi_{s0},$$

где $K_{is}^0$ алгебраическое дополнение $k_{is}^0 = (\psi_{i0}, A_t'(\lambda_0)\varphi_{s0})$.

Вычислив невязки $\sigma_{i0} = A(\lambda_0)\varphi_{i0}$, $\tau_{i0} = A^*(\lambda_0)\psi_{i0}$, $i = 1, \ldots, n$, построим малый по норме $(\|D_0\| = O(\max_{i,j}\{\|\sigma_{i0}\|, \|\tau_{j0}\|\}))$ оператор ложного возмущения

$$D_0 x = \sum_{j=1}^{n}(\gamma_{j0}, x)\Big[\sigma_{j0} - \sum_{k=1}^{n}(\psi_{k0}, \sigma_{j0})z_{k0}\Big] + \sum_{j=1}^{n}(\tau_{j0}, x)z_{j0},$$

для которого $D_0\varphi_{i0} = \sigma_{i0}$, $D_0^*\psi_{i0} = \tau_{i0}$, $i = 1, \ldots, n$. Тогда

$$A(\lambda_0)\varphi_{i0} - D_0\varphi_{i0} = 0, \quad A^*(\lambda_0)\psi_{i0} - D_0^*\psi_{i0} = 0, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{3}$$

и применяя лемму Шмидта ([9], гл. VII), $n$ линейно независимых решений уравнения (1) при $t = \lambda$ можно записать в виде

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n}\xi_i\big[I + \Gamma_0\big(A(\lambda) - A(\lambda_0) + D_0\big)\big]^{-1}\varphi_{i0}, \tag{4}$$

$$\xi_j = (\gamma_{j0}, \varphi), \quad j = 1, \ldots, n, \tag{5}$$

где $\Gamma_0 = \big[A(\lambda_0) - D_0 + \sum_{i=1}^{n}(\gamma_{i0}, \cdot)z_{i0}\big]^{-1}$. Подставляя (4) в (5), получаем систему линейных уравнений относительно $\xi_j$, $j = 1, \ldots, n$, ранг матрицы которой равен нулю. Поэтому $\lambda$ является общим корнем уравнений

$$l_{ij}(t - \lambda_0) \equiv \Big(\psi_{i0}, \big(A(t) - A(\lambda_0) + D_0\big)\big[I + \Gamma_0\big(A(t) - A(\lambda_0) + D_0\big)\big]^{-1}\varphi_{j0}\Big) = 0. \tag{6}$$

Метод диаграммы Ньютона показывает, что $\lambda$ является $n$-кратным корнем уравнения

$$f(t) \equiv \det\|l_{ij}(t - \lambda_0)\| = 0. \tag{7}$$

Собственное число (7) можно найти применяя к (7) метод Ньютона–Канторовича для кратных корней (см. например [10], гл. VIII):

$$\lambda^{(\nu)} = \lambda^{(\nu-1)} - n\frac{f(\lambda^{(\nu-1)})}{f'(\lambda^{(\nu-1)})}, \quad \nu = 1, 2, \ldots, \quad \lambda^{(0)} = \lambda_0. \tag{8}$$



При этом на каждом шаге итерационного процесса потребуется решить $2n$ линейных уравнений. Действительно, для вычисления $f'(\lambda^{(\nu-1)})$ нужно найти значения производных

$$\begin{aligned} l_{ij}'(\lambda^{(\nu-1)} - \lambda_0) = {} & \Big(\psi_{i0}, A_t'(\lambda_0^{(\nu-1)})\big[I + \Gamma_0\big(A(\lambda^{(\nu-1)}) - A(\lambda_0) + D_0\big)\big]^{-1}\varphi_{j0}\Big) - \\ & - \Big(\psi_{i0}, \big(A(\lambda^{(\nu-1)}) - A(\lambda_0) + D_0\big)\big[I + \Gamma_0\big(A(\lambda^{(\nu-1)}) - A(\lambda_0) + \\ & + D_0\big)\big]^{-1}\Gamma_0 A_t'(\lambda^{(\nu-1)})\big[I + \Gamma_0\big(A(\lambda^{(\nu-1)}) - A(\lambda_0) + D_0\big)\big]^{-1}\varphi_{j0}\Big) = \\ = {} & \Big(\psi_{i0}, A_t'(\lambda^{(\nu-1)})x_j^{(\nu-1)} - \big(A(\lambda^{(\nu-1)}) - A(\lambda_0) + D_0\big)y_j^{(\nu-1)}\Big), \end{aligned}$$

где элементы $x_j^{(\nu-1)}$ и $y_j^{(\nu-1)}$ определятся из уравнений

$$\begin{aligned} &\Big[A(\lambda^{(\nu-1)}) + \sum_{i=1}^{n}(\gamma_{i0}, \cdot)z_{i0}\Big]x_j^{(\nu-1)} = z_{j0}, \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad j = 1, \ldots, n, \\ &\Big[A(\lambda^{(\nu-1)}) + \sum_{i=1}^{n}(\gamma_{i0}, \cdot)z_{i0}\Big]y_j^{(\nu-1)} = A_t'(\lambda^{(\nu-1)})x_j^{(\nu-1)}, \end{aligned}$$

и согласно (6), (7)

$$f(\lambda^{(\nu-1)}) = \det\left\|\Big(\psi_{i0}, \big(A(\lambda^{(\nu-1)}) - A(\lambda_0) + D_0\big)x_j^{(\nu-1)}\Big)\right\|.$$

После определения собственного числа $\lambda$ собственные элементы разыскиваются согласно формулам вида (4) из уравнений

$$\begin{aligned} &\Big[A(\lambda) + \sum_{s=1}^{n}(\gamma_{s0}, \cdot)z_{s0}\Big]x = z_{i0}, \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad i = 1, \ldots, n. \\ &\Big[A^*(\lambda) + \sum_{s=1}^{n}(\cdot, z_{s0})\gamma_{s0}\Big]y = \gamma_{i0}, \end{aligned}$$

## 2. Точки спектра с жордановыми цепочками

Для краткости изложения рассмотрим более простую задачу о нахождении изолированной фредгольмовской точки $\lambda$ линейной по $t$ оператор-функции $A(t) = A_0 - tA_1$, такой что $N(A(\lambda)) = \{\varphi^{(1)}\}$, $N^*(A(\lambda)) = \{\psi^{(1)}\}$ с $A_1$-жордановыми цепочками длины $p$, т.е. [11]

$$\begin{gathered} (A_0 - \lambda A_1)\varphi^{(1)} = 0, \quad (A_0 - \lambda A_1)\varphi^{(s)} = A_1\varphi^{(s-1)}, \\ (A_0^* - \lambda A_1^*)\psi^{(1)} = 0, \quad (A_0^* - \lambda A_1^*)\psi^{(s)} = A_1^*\psi^{(s-1)}, \quad s = 2, \ldots, p, \\ (\psi^{(1)}, A_1\varphi^{(s)}) = 0, \quad s = 1, \ldots, p-1, \quad k = (\psi^{(1)}, A_1\varphi^{(p)}) \neq 0, \\ K = \det\|(\psi^{(i)}, A_1\varphi^{(p+1-j)})\| \neq 0. \end{gathered} \tag{9}$$

Предполагаются известными достаточно хорошие приближения $\Lambda$, $\varphi_0^{(i)}$ и $\psi_0^{(i)}$: $|\lambda - \Lambda| \leqslant \varepsilon$, $\|\varphi^{(i)} - \varphi_0^{(i)}\| \leqslant \varepsilon$, $\|\psi^{(i)} - \psi_0^{(i)}\| \leqslant \varepsilon$, $i = 1, \ldots, p$. Тогда $k_0 = (\psi_0^{(1)}, A_1\varphi_0^{(p)}) \neq 0$, $K_0 = \det\|(\psi_0^{(i)}, A_1\varphi_0^{(p+1-j)})\| \neq 0$, и можно положить

$$\lambda_0 = \frac{(\psi_0^{(1)}, A_1\varphi_0^{(p)}) - (\psi_0^{(1)}, A_1\varphi_0^{(p-1)})}{(\psi_0^{(1)}, A_1\varphi_0^{(p)})}.$$

Определив элементы

$$z_0^{(1)} = A_1\varphi^{(p)}, \quad \gamma_0^{(i)} = \frac{1}{K_0}\sum_{s=1}^{p} K_{is}^0 A_1^*\psi_0^{(s)}, \quad (\gamma_0^{(i)}, \varphi_0^{(p+1-j)}) = \delta_{ij},$$

где $K_{is}^0$ — алгебраические дополнения членов определителя $K_0$, вычислим невязки

$$\sigma_0^{(1)} = (A_0-\lambda_0A_1)\varphi_0^{(1)}, \quad \sigma_0^{(i)} = (A_0-\lambda_0A_1)\varphi_0^{(i)} - A_1\varphi_0^{(i-1)}, \quad i = 2, \ldots, p$$

и построим оператор ложного возмущения

$$D_0x = \sum_{j=1}^{p} (\gamma_0^{(p+1-j)}, x)\sigma_0^{(j)}, \quad \|D_0\| = O(\max_j \|\sigma_0^{(j)}\|),$$

для которого $D_0\varphi_0^{(s)} = \sigma_0^{(s)}$, $s = 1, \ldots, p$. Теперь

$$(A_0-\lambda_0A_1-D_0)\varphi_0^{(1)} = 0, \quad (A_0-\lambda_0A_1-D_0)\varphi_0^{(s+1)} = A_1\varphi_0^{(s)}, \quad s = 1, \ldots, p-1.$$

Равенства (9) приведём к системам

(10) $$\varphi^{(1)} = [I+\Gamma_0((\lambda_0-\lambda)A_1+D_0)]^{-1}\varphi_0^{(1)}, \quad 1 = (\gamma_0^{(p)}, \varphi^{(1)}),$$

(11) $$\varphi^{(s)} = [I+\Gamma_0((\lambda_0-\lambda)A_1+D_0)]^{-1}\varphi_0^{(1)} + \sum_{\sigma=1}^{s-1}[I+\Gamma_0((\lambda_0-\lambda)A_1+ D_0)]^{-1}\left(\Gamma_0A_1[I+\Gamma_0((\lambda_0-\lambda)A_1+D_0)]^{-1}\right)^{\sigma}\varphi_0^{(1)},$$

$$1 = (\gamma_0^{(p)}, \varphi^{(s)}), \quad s = 2, \ldots, p,$$

где оператор $\Gamma_0 = [A_0-\lambda_0A_1-D_0+(\gamma_0^{(p)}, \cdot)z_0^{(1)}]^{-1}$ существует при достаточной точности начальных приближений согласно лемме Шмидта и общей теории возмущений. Подставляя значения $\varphi^{(1)}$ и $\varphi^{(s)}$ в (10) и (11) получаем уравнения для определения $\lambda$

(12) $$f_1(t) \equiv \left(\gamma_0^{(p)}, \{I-[I+\Gamma_0((\lambda_0-t)A_1+D_0)]^{-1}\}\varphi_0^{(1)}\right) = 0,$$

(13) $$f_s(t) \equiv \left(\gamma_0^{(p)}, [I+\Gamma_0((\lambda_0-t)A_1+D_0)]^{-1}\left(\Gamma_0A_1[I+\Gamma_0((\lambda_0-t)A_1+ D_0)]^{-1}\right)^{s-1}\varphi_0^{(1)}\right) = 0$$

причём

$$-\frac{1}{s!}\cdot\frac{d^sf_1(t)}{dt^s} = f_{s+1}(t), \quad s = 1, \ldots, p-1, \quad \text{и} \quad -\frac{1}{p!}\cdot\frac{d^pf_1(\lambda)}{dt^p} = f_{p+1}(\lambda) \neq 0,$$

т.е. $\lambda$ является $p$-кратным корнем (12).

Собственное число $\lambda$ можно найти теперь итерационным процессом (8) при $n = p$. Тогда каждый шаг потребует решения двух линейных уравнений, т.к.

$$f(\lambda^{(\nu-1)}) = 1-(\gamma_0^{(p)}, x^{(\nu-1)}), \quad f'(\lambda^{(\nu-1)}) = -(\gamma_0^{(p)}, y^{(\nu-1)}),$$



где $x^{(\nu-1)}$ и $y^{(\nu-1)}$ определяются соответственно из уравнений

$$[A_0-\lambda^{(\nu-1)}A_1+(\gamma_0^{(p)}, \cdot)z_0^{(1)}]x^{(\nu-1)} = z_0^{(1)},$$
$$[A_0-\lambda^{(\nu-1)}A_1+(\gamma_0^{(p)}, \cdot)z_0^{(1)}]y^{(\nu-1)} = A_1x^{(\nu-1)}.$$

Элементы жордановой цепочки определяются из уравнений

(14) $$[A_0-\lambda A_1+(\gamma_0^{(p)}, \cdot)z_0^{(1)}]x_1 = z_0^{(1)},$$
$$[A_0-\lambda A_1+(\gamma_0^{(p)}, \cdot)z_0^{(1)}]x_s = A_1x_{s-1}, \quad s = 2, \ldots, p,$$

в следующем виде $x_1 = \varphi^{(1)}$, $\varphi^{(s)} = x_1+\ldots+x_s$.

Если искать $\lambda$ как простой корень уравнения $f_p(t) = 0$ основным методом Ньютона

$$\lambda^{(\nu)} = \lambda^{(\nu-1)} - \frac{f_p(\lambda^{(\nu-1)})}{f_p'(\lambda^{(\nu-1)})}, \quad \nu = 1, 2, \ldots, \quad \lambda^{(0)} = \lambda_0,$$

то на каждом шаге нужно решить $p+1$ линейных уравнений, т.к. $f_p(\lambda^{(\nu-1)}) = (\gamma_0^{(p)}, x_p)$, т.е. $f_p(\lambda^{(\nu-1)})$ определяется из (14) при $\lambda = \lambda^{(\nu-1)}$, а $f_p'(\lambda^{(\nu-1)}) = (\gamma_0^{(p)}, x_{p+1})$, где $x_{p+1}$ решение уравнения

$$[A_0-\lambda^{(\nu-1)}A_1+(\gamma_0^{(p)}, \cdot)z_0^{(1)}]x_{p+1} = A_1x_p.$$

При применении же модифицированного метода Ньютона каждый шаг потребует решения $p$ линейных уравнений.

Элементы $\psi^{(1)}, \psi^{(2)}, \ldots, \psi^{(p)}$ определяются на основе тех же начальных приближений введением оператора ложного возмущения и аналогичными построениями для сопряжённой оператор-функции.

## Литература


[1] М. К. Гаврин, ЖВМиМФ, 1 (5) (1961), 757–770.

[2] —, ibid. 2 (3) (1962), 387–397.

[3] F. Kuhnert, Math. Forschungsberichte 26 (1971), 1–119.

[4] Б. В. Логинов, Н. А. Сидоров, Математические заметки 19 (1) (1976), 105–108.

[5] R. Lehman, Beiträge zur Numerische Mathematik 3 (1975), 57–79.

[6] Д. Г. Рахимов, В сб. *Дифференциальные уравнения с частными производными и их приложения*, Изд-во „Фан" АН УзССР, Ташкент 1977, 107–120.

[7] Б. В. Логинов, Д. Г. Рахимов, Известия АН УзССР, сер. физ.-мат. наук, 1 (1977), 12–20.

[8] Б. В. Логинов, Н. А. Сидоров, ibid. 5 (1977), 26–29.

[9] М. М. Вайнберг, В. А. Треногин, *Теория ветвления решений нелинейных уравнений*, „Наука", Москва 1969.

[10] А. М. Островский, *Решение уравнений и систем уравнений*, Москва 1963.

[11] Б. В. Логинов, Ю. Б. Русак, *Обобщённая жорданова структура аналитической оператор-функции и её роль в теории ветвления*, 1–81, Депонированная рукопись № 1782–77 деп (РЖ Мат 11Б800, 1977).


*Presented to the semester*
*Spectral Theory*
*September 23–December 16, 1977*