SPECTRAL THEORY
BANACH CENTER PUBLICATIONS, VOLUME 8
PWN–POLISH SCIENTIFIC PUBLISHERS
WARSAW 1982

КРАТНАЯ ПОЛНОТА ЧАСТИ КОРНЕВЫХ ВЕКТОРОВ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРНЫХ ПУЧКОВ

С. С. МИРЗОЕВ

Институт Математики и Механики АН АзССР, Баку, СССР

В известной работе М. В. Келдыша [1] были указаны признаки кратной полноты системы корневых векторов полиномиальных операторных пучков. Различные обобщения теоремы М. В. Келдыша даны в работах [2], [3], [4] и т.д.

Оказывается, что при решении многих задач в математической физики возникает необходимость кратной полноты части корневых векторов операторных пучков. Существуют различные подходы к исследованию этой задачи, которые изложены в [5]–[10].

Одним из подходов при рассмотрении полиномиальных пучков является изучение операторно-дифференциального уравнения, соответствующего операторному пучку [3], [6].

Рассмотрим в гильбертовом пространстве H полиномиальный операторный пучок

(1) $$P(\lambda) = \lambda^n I + \lambda^{n-1} A_1 + \ldots + \lambda A_{n-1} + A_n + A^n,$$

где A_j $(j = 1, \ldots, n)$ линейные операторы, а A — положительно определённый самосопряженный оператор. С этим полиномиальным пучком свяжем задачу

(2) $$P(d/dt)u(t) = f(t),$$

(3) $$u^{(j)}(+0) = \varphi_j, \quad j = 0, 1, \ldots, m-1, m < n,$$

в пространстве $L_2(0, \infty; H)$. Следуя работы [3], [6] задачи (2)–(3) назовем *m-регулярной задачей*, если при любом $f(t)$ из $L_2(0, \infty; H)$ и при любом наборе m векторов $\varphi_j \in \mathcal{D}(A^{n-j-1/2})$, $j = 0, 1, \ldots, m-1$ уравнение (2) имеет решение $u(t)$ такое, что

1) $u(t)$ имеет сильно непрерывные производные до $(n-1)$ порядка включительно при $t > 0$;
2) $u^{(n)}(t) \in L_2(0, \infty; H)$, $A^n u \in L_2(0, \infty; H)$;
3) $P(d/dt)u(t) = f(t)$ почти всюду при $t > 0$;
4) $u^{(j)}(+0) = \varphi_j$, $j = 0, \ldots, m-1$.

В данной работе найдены достаточные условия на коэффициенты полиномиального операторного пучка (1), при выполнении которых задача (2)–(3) имеет единственное m-регулярное решение и система $K(\Pi_-)$ — корневых векторов его, отвечающих собственным значениям из левой полуплоскости m-кратно полна в H.

Имеют место следующие теоремы

Теорема 1. *Пусть $n = 2k$ и пучок $P(\lambda)$ имеет вид*

$$P(\lambda) = \sum_{j=0}^{2k} (i\lambda)^j A_{2k-j} + A^{2k} \tag{4}$$

где $A_0 = I$, A — положительно определенный самосопряженный оператор, а A_j $(j = 1, \ldots, n)$ — замкнутые линейные операторы в H. Далее, операторы A_jA^{-j} $(j = 1, \ldots, n)$ суть ограниченные операторы в H и выполняется неравенство

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \|A_jA^{-j}\| < 1,$$

где

$$c_j = \begin{cases} 2^{(kj(k-j)-j)/2k}, & j = 1, \ldots, k-1, \\ 2^{-1}, & j = k, \\ 2^{-(2k-j)/2k}, & j = k+1, \ldots, n. \end{cases}$$

Тогда задача (2)–(3) имеет единственное k-регулярное решение.

Теорема 2. *Пусть пучок $P(\lambda)$ определяется формулой (1) и $n = 4k+1$ $(k = 1, 2, \ldots)$, операторы A_jA^{-j} $(j = 1, \ldots, n)$ суть ограниченные операторы и*

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \|A_jA^{j}\| < 1,$$

где

$$c_j = \begin{cases} \left(\frac{n-j}{n}\right)^{1/2} 2^{\frac{j[n(n-j)-(2k+2)(2k+3)]}{2n}}, & j = 1, \ldots, 2k-1, \\ \left(\frac{2k+1}{n}\right)^{1/2} 2^{\frac{k(4k^2-1)}{n}}, & j = 2k, \\ \left(\frac{j}{n}\right)^{1/2} 2^{\frac{(n-j)(2k^2-k)}{n}}, & j = 2k+1, \ldots, n. \end{cases}$$

Тогда задача (2)–(3) имеет единственное $(2k+1)$-регулярное решение.

Теорема 3. *Пусть пучок $P(\lambda)$ определяется формулой (1), $n = 4k-1$, и операторы A_jA^{-j} $(j = 1, \ldots, n)$ суть ограниченные операторы и*

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \|A_jA^{-j}\| < 1,$$

где

$$c_j = \begin{cases} \left(\frac{n-j}{n}\right)^{1/2} 2^{\frac{j[n(n-j)-2k(2k-1)]}{2n}}, & j = 1, \ldots, 2k, \\ \left(\frac{j}{n}\right)^{1/2} 2^{\frac{(n-j)k(2k-1)}{n}}, & j = 2k+1, \ldots, n. \end{cases}$$

Тогда (2)–(3) имеет единственное $(2k-1)$-регулярное решение.

Замечание. Аналогичные теоремы имеют место, если $n = 2k+1$ и пучок $P(\lambda)$ имеет вид:

$$P(\lambda) = -\lambda^n I + \lambda^{n-1} A_1 + \ldots + A_n + A^n.$$

Наметим краткое доказательство, например, теоремы 1.

Известно, что относительно скалярного произведения $(x,y)_1 = (A^n x, A^n y)$, $x, y \in \mathscr{D}(A^n)$ множество $\mathscr{D}(A^n)$ становится гильбертовым пространством. Обозначим через $\mathscr{D}(0, \infty; H_1)$ множество бесконечно число раз дифференцируемых функций со значениями в H_1, которые имеют компактные носители и $u^{(j)}(0) = 0$, $j = 0, \ldots, k-1$. Линейное множество $\mathscr{D}(0, \infty; H_1)$, снабжённое нормой

$$\|u\|_W = (\|u^{(2k)}\|^2_{L_2} + \|A^{2k}u\|^2_{L_2})^{1/2}$$

является предгильбертовым пространством. Пополнение его обозначим через $W_k(0, \infty; H_1)$. Тогда при выполнении условия теоремы 1 для всех функций $u(t) \in W_k(0, \infty; H_1)$ справедливо неравенство

$$\gamma\|u\|_W \geqslant \|P_\tau u\|_{L_2} \geqslant \mu\|u\|_W, \tag{5}$$

где $\tau \in [0, 1]$, $P_\tau = P_0 + \tau P_1$ и

$$P_0 \equiv (-1)^k \frac{d^{2k}}{dt^{2k}} + A^{2k}, \quad P_1 = \sum_{j=1}^{2k} \left(i\frac{d}{dt}\right)^j A_{2k-j}.$$

Здесь положительные числа γ и μ не зависят от $u(t)$ и от параметра τ. Сперва доказывается, что уравнение $P_0 u = f$ однозначно разрешимо при всех f из $L_2(0, \infty; H)$. Далее, используя неравенства (5) и применяя метод продолжения по параметру τ находится, что уравнение $Pu = f$ имеет единственное решение из $W_k(0, \infty; H_1)$ при всех $f(t) \in L_2(0, \infty; H)$. Наконец отметим, что задача (2)–(3) очевидным образом приводится к уравнению $Pu = f$, где $u \in W_k(0, \infty; H_1)$, а $f \in L_2(0, \infty; H)$.

В работах [3], [6] М. Гасымов показал, что если задача (2)–(3) имеет m-регулярное решение при $f(t) \equiv 0$ и пучок $P(\lambda) \in K_{\varrho,\sigma}$ (определение класса $K_{\varrho,\sigma}$ имеется, например, в [3]), то система $K(\Pi_-)$ m-кратно полна в H. Используя этот результат мы укажем следующие теоремы о кратной полноте системы $K(\Pi_-)$.

Теорема 4. *Пусть выполняются условия теоремы 1 и $A^{-1} \in C_p$ $(0 < p < \infty)$, $A_jA^{-j} \in C_\infty$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ или $A^{-1} \in C_{k+\varepsilon}$ при достаточно малом $\varepsilon > 0$, тогда система $K(\Pi_-)$ образует k-кратно полную систему в H.*

При $k = 1$ из этой теоремы мы получаем теорему М. Г. Гасымова [3] и А. Г. Костюченко, которая обобщает результат М. Г. Крейна и Г. К. Лангера [5] при самосопряженных операторных пучков второго порядка.

Отметим, что при выполнении условия теоремы 4 корневые векторы $K(\Pi_+)$ пучка $P(\lambda)$ отвечающих собственным значениям из правой полуплоскости также образует k-кратно полную систему в H.

Теорема 5. *Пусть выполняются условия теоремы 2 (теоремы 3) и* $A^{-1} \in C_p$ $(0 < p < \infty)$, $A_j A^{-j} \in C_\infty$ $(j = 1, \ldots, n)$. *Тогда система* $K(\Pi_-)$ *пучка* (1) $(2k+1)$-*кратно* ($(2k-1)$-*кратно*) *полна в* H.

Отметим, что если в теоремах 4 и 5 оператор $A^{-1} \in C_1$, то для любого набора m векторов $(m = k, 2k+1, (2k-1))$, $f_j \in \mathscr{D}(A^{n-j-1/2})$ разложение по системе $K(\Pi_-)$ m-кратно суммируема методом Абеля.

Литература

[1] М. В. Келдыш, *О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений*, ДАН СССР, 77 (1) (1951), 11–14.

[2] Дж. Э. Аллахвердиев, *О многократно полных системах и несамосопряженных операторах зависящих от параметра*, ДАН СССР 166 (1) (1966), 11–14.

[3] М. Г. Гасымов, *О кратной полноте части собственных и присоединенных векторов полиномиальных операторных пучков*, Изв. АН Арм. ССР, математика VI, 2–3 (1971), 131–147.

[4] Ю. А. Палант, *Об одном признаке полноты системы собственных и присоединенных векторов полиномиального пучка операторов*, ДАН СССР 141 (3) (1961), 558–560.

[5] М. Г. Крейн, Г. К. Лангер, *О некоторых математических принципах линейной теории демпфированных колебаний континумов*, Труды Международного симпозиума по применению теории функций комплексного переменного в механике сплошной среды, Москва 1965, 283–322.

[6] М. Г. Гасымов, *К теории полиномиальных операторных пучков*, ДАН СССР 199 (4) (1971), 747–750.

[7] A. Friedman, M. Shinbrot, *Nonlinear eigenvalue problems*, Acta. Math. 121 (1–2) (1968), 77–125.

[8] R. E. L. Turner, *A class of nonlinear eigenvalue problems*, J. Funct. Anal. 2 (1968), 297–322.

[9] С. С. Мирзоев, *Двукратная полнота части собственных и присоединенных векторов полиномиальных пучков четвертого порядка*, Изв. АН Азерб. ССР, сер. физ. мат. наук 6 (1974).

[10] Г. Е. Радзиевский, *Об одном методе доказательства полноты векторов оператор функций*, ДАН СССР 214 (2) (1974), 291–294.

Presented to the semester
Spectral Theory
September 23–December 16, 1977

SPECTRAL THEORY
BANACH CENTER PUBLICATIONS, VOLUME 8
PWN–POLISH SCIENTIFIC PUBLISHERS
WARSAW 1982

A NOTE ON GENERAL DILATION THEOREMS

W. MLAK

Institute of Mathematics of the Polish Academy of Sciences,
Kraków, Poland

Summary. Positive definite scalar functions on homogeneous spaces are one of the main objects of representation theory of groups. Functions of this type are on the other hand closely related to induced representations of groups. Several generalizations of results concerning such functions to the case of operator functions have been extensively studied by Kunze in [1], whose paper inspired the investigations discussed below. Inspiration goes also back to recent trends of general dilation theory as presented in [2], [3], [6].

We introduce the notation: Let E be a complex Banach space and E^* its topological dual. By $\overline{L}(E)$ we denote the space of all antilinear bounded operators from E into E^*. Given two Banach spaces M, N, we denote by $L(M, N)$ the space of all linear bounded operators from M into N. We write $L(M) \overset{\text{df}}{=} L(M, M)$.

Definition (see [2], [6]). Let Z be a set and $B(\cdot, \cdot)\colon Z \times Z \to \overline{L}(E)$ an operator valued function. We say that $B(\cdot, \cdot)$ is *positive definite* (abbreviated: p.d.) and write $B \gg 0$ if for every n, every $f_1, \ldots, f_n \in E$ and every $z_1, \ldots, z_n$ the inequality

$$\sum_{i,k=1}^{n} \big(B(z_i, z_k) f_i\big)(f_k) \geqslant 0$$

holds true.

The factorization property of positive definite functions presented below plays a basic role. For p.d. scalar functions it is atributed to Aroszajn and Kolmogorov, and its abstract operator version appears in papers [1] and [7] for Hilbert space valued operator functions. In both these papers the factorization is used essentially in connection with certain dilation problems. The extension of factorization theorem to Banach space valued operator functions and an explicit use of it to dilation problems appears in [2] and [6] and reads as follows:

(A–K) Let $B(\cdot, \cdot)\colon Z \times Z \to \overline{L}(E)$ be a positive definite operator valued function. Then there is a Hilbert space K and an operator valued function $X(\cdot)\colon Z \to L(K)$ such that $B(u, v) = X(v)^* X(u)$ for all $u, v \in Z$. If K is minimal, i.e. $K = \bigvee_{u \in Z} X(u) E$,