PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS
BANACH CENTER PUBLICATIONS, VOLUME 10
PWN—POLISH SCIENTIFIC PUBLISHERS
WARSAW 1983

О ВЫРОЖДЕННОЙ ЗАДАЧЕ РИМАНА–ГИЛЬБЕРТА

З. ПРЁСДОРФ

Akademie der Wissenschaften der DDR, Zentralinstitut für Mathematik und Mechanik Berlin, D.D.R.

1. Введение

Пусть G — ограниченная и, для простоты, односвязная область в комплексной плоскости C. Предположим, что граница $\Gamma = \partial G$ является кривой Ляпунова, ориентированной против часовой стрелки, и пусть $0 \in G$.

Рассмотрим следующую краевую задачу для эллиптической системы первого порядка, известную под названием обобщённой задачи Римана–Гильберта [1]:

$$W_{\bar{z}} + AW + B\overline{W} = F(z), \quad z \in G, \tag{1}$$

$$\operatorname{Re}\{CW\} = \Phi(z), \quad z \in \Gamma. \tag{2}$$

Здесь A, B, C — заданные квадратные, комплекснозначные матрицы-функции порядка n точки $z = x+iy$; F, Φ — заданные n-мерные вектор-функции, а W — искомая комплекснозначная вектор-функция. Производную

$$W_{\bar{z}} = \partial_{\bar{z}} W = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial x} + i\frac{\partial W}{\partial y}\right)$$

в дальнейшем всегда будем понимать в смысле обобщённой производной по Соболеву. Уравнение $W_{\bar{z}} = 0$ представляет собой систему Коши–Римана.

Заметим, что к задаче (1), (2) можно привести, например, следующую краевую задачу для эллиптического уравнения второго порядка (см. [1], [4]):

$$\Delta u + a_1(z)\frac{\partial u}{\partial x} + b_1(z)\frac{\partial u}{\partial y} + c_1(z)u = f_1(z), \quad z \in G,$$

$$a_2(z)\frac{\partial u}{\partial x} + b_2(z)\frac{\partial u}{\partial y} + c_2(z)u = f_2(z), \quad z \in \Gamma,$$

с вещественными данными.

В случае, когда выполняется условие Лопатинского

(3) $$\det C(z) \neq 0, \quad z \in \Gamma,$$

задача (1), (2) впервые полностью была решена И. Н. Векуа [1] с помощью теории сингулярных интегральных уравнений при $n = 1$. Случай $n > 1$ был исследован Б. Боярским [3], Д. Паскали [4] и др. (см. [5]). В. Вендланд [5], [6] и П. Копп [7] рассмотрели случаи, когда условие (3) нарушается в конечном числе точек кривой Γ. Использовав методы, развитые автором данной статьи в [8] и [9] для сингулярных интегральных уравнений с вырожденным символом, Вендланд и Копп построили теорию Нётера для задачи (1), (2) в некоторых естественных парах пространств типа Гёльдера. Цель предлагаемой статьи — с одной стороны, обобщить результаты последних авторов и, с другой стороны, дать обоснование некоторых методов приближённого решения задачи (1), (2).

2. Случай, когда выполняется условие Лопатинского

В дальнейшем будем обозначать через $C^{m,\lambda}(\overline{G})$ ($m \geqslant 0$ — целое число, $0 < \lambda < 1$) банахово пространство n-мерных комплексно-значных вектор-функций, частные производные до m-го порядка которых в замкнутой области $\overline{G} = G \cup \Gamma$ удовлетворяют условию Гёльдера с показателем λ (см. [1]). Далее, положим $C^{\lambda}(\overline{G}) = C^{0,\lambda}(\overline{G})$ и $C^{\lambda}_{\bar z}(\overline{G}) := \{W \mid W_{\bar z} \in C^{\lambda}(\overline{G})\}$. С нормой

$$\|W\|_{C^{\lambda}_{\bar z}(\overline{G})} = \|W_{\bar z}\|_{C^{\lambda}(\overline{G})}$$

пространство $C^{\lambda}_{\bar z}(\overline{G})$ становится банаховым. Пересечение $C^{\lambda}(\overline{G}) \cap C^{\lambda}_{\bar z}(\overline{G})$ превращается в банахово пространство, если в нём норму определить формулой

$$\|W\|_{\cap} = \|W\|_{C^{\lambda}(\overline{G})} + \|W_{\bar z}\|_{C^{\lambda}(\overline{G})}.$$

Будем предполагать, что данные задачи (1), (2) удовлетворяют следующим условиям:

$$A, B, F \in C^{\lambda}(\overline{G}); \qquad C \in C^{\lambda}(\Gamma); \qquad \Phi \in C^{\lambda}(\Gamma).$$

Решение W будем искать в пространстве $C^{\lambda}(\overline{G}) \cap C^{\lambda}_{\bar z}(\overline{G})$. Через R будем обозначать оператор, определяемый левыми частями уравнений (1) и (2). Оператор R естественно рассматривать как оператор, действующий между следующими пространствами:

(4) $$R\colon\ C^{\lambda}(\overline{G}) \cap C^{\lambda}_{\bar z}(\overline{G}) \to C^{\lambda}(\overline{G}) \times C^{\lambda}_{\boldsymbol{R}}(\Gamma).$$ (1)

(1) Если X некоторое пространство функций, то через $X_{\boldsymbol{R}}$ будем обозначать соответствующее пространство вещественнозначных функций над полем вещественных чисел $\boldsymbol{R}$.

Очевидно, что оператор (4) является $\boldsymbol{R}$-линейным и ограниченным оператором.

Задачу (1), (2) можно свести к эквивалентной системе сингулярных интегральных уравнений с помощью известного интегрального представления И. Н. Векуа для решений уравнения (1):

Лемма 1 ([1]). *Пусть $W \in C^{\lambda}(\overline{G}) \cap C^{\lambda}_{\bar z}(\overline{G})$ является решением уравнения* (1). *Тогда W допускает следующее представление в $\overline{G}$:*

(5) $$W + T(AW + B\overline{W}) = \Psi M + iK + TF.$$

При этом вектор-функция $M \in C^{\lambda}_{\boldsymbol{R}}(\Gamma)$ и вектор $K \in \boldsymbol{R}^n$ однозначно определяются решением W. Интегральные операторы T и Ψ даются следующими формулами:

$$(TW)(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_G \frac{W(\zeta)}{\zeta - z}\, d\xi\, d\eta \qquad (\zeta = \xi + i\eta),$$

$$(\Psi M)(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{M(\tau)}{\tau - z}\, d\tau \qquad (z \in \boldsymbol{C} - \Gamma).$$

Заметим, что однозначность величин M и K в лемме 1 является следствием обобщённой теоремы Гарнака (см. [2], § 30). Для точек $t \in \Gamma$ функция $(\Psi M)(t)$ определена как предельное значение интеграла типа Коши $(\Psi M)(z)$ ($z \in G$) согласно формулам Сохоцкого–Племеля (см. [2], § 16). Оператор $\boldsymbol{T}$ вполне непрерывен в пространстве $C^{\lambda}(\overline{G})$ [1].

Не ограничивая общности, в дальнейшем будем предполагать, что *оператор $UW := W + T(AW + B\overline{W})$ взаимно однозначно отображает пространство $C^{\lambda}(\overline{G})$ на себя.*

Замечание. В случае $n = 1$ это свойство оператора U является следствием принципа подобия для обобщённых аналитических функций (см. [1], гл. 3, § 4, и [7]). В случае $n > 1$ всегда можно построить такой конечномерный $\boldsymbol{R}$-линейный оператор T_1, что $(T_1 W)_{\bar z} = 0$, $\forall W \in C^{\lambda}(\overline{G})$, и оператор $U_1 = U + T_1$ взаимно однозначно отображает $C^{\lambda}(\overline{G})$ на себя (см. [5], стр. 157–159). Следовательно, как легко видеть, все дальнейшие рассуждения остаются в силе, если в них заменить U на U_1.

Учитывая, что $(Tf)_{\bar z} = f$, $\forall f \in L_1(\overline{G})$, легко видеть, что имеет место

Лемма 2 ([7]). *Пусть даны $M \in C^{\lambda}_{\boldsymbol{R}}(\Gamma)$, $K \in \boldsymbol{R}^n$. Тогда уравнение* (5) *имеет единственное решение $W \in C^{\lambda}(\overline{G}) \cap C^{\lambda}_{\bar z}(\overline{G})$, которое одновременно является решением уравнения* (1).

Леммы 1 и 2 устанавливают взаимно однозначное отображение ω множества решений $W \in C^{\lambda}(\overline{G}) \cap C^{\lambda}_{\bar z}(\overline{G})$ уравнения (1) на множество $C^{\lambda}_{\boldsymbol{R}}(\Gamma) \times \boldsymbol{R}^n$: $\omega(W) = (M, K)$. Вводим теперь следующие сингулярные интегральные операторы ($f \in C^{\lambda}(\Gamma)$):

$$(Pf)(t) = \frac{1}{2}f(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\tau)}{\tau - t}\,d\tau \qquad (t \in \Gamma),$$

$$(Qf)(t) = \frac{1}{2}f(t) - \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\tau)}{\tau - t}\,d\tau \qquad (t \in \Gamma).$$

Имеет место следующая теорема эквивалентности.

Теорема 1 ([7]). (a) *Пусть* $W \in C^{\lambda}(\bar{G}) \cap C^{\lambda}_{\bar{z}}(\bar{G})$ *является решением краевой задачи* (1), (2). *Тогда пара* $(M, K) = \omega(W) \in C^{\lambda}_{\mathbf{R}}(\Gamma) \times \mathbf{R}^n$ *удовлетворяет следующей системе сингулярных интегральных уравнений по кривой* Γ:

(6)
$$\begin{aligned} \Lambda(M, K) :&= CPM + \bar{C}QM + \bar{C}VM + C(U^{-1} - I)\Psi M + \\ &+ \overline{C(U^{-1} - I)\Psi M} + CU^{-1}iK + \overline{CU^{-1}iK} = \\ &= 2\Phi + CU^{-1}TF + \overline{CU^{-1}TF}. \end{aligned}$$

При этом I — *единичный оператор*, VM — *потенциал двойного слоя*

$$(VM)(t) = -\frac{1}{\pi}\int_{\Gamma}\frac{\cos(r, \hat{n})}{r}M(\tau)\,d\sigma \qquad (t \in \Gamma),$$

$r = |t - \tau|$, $d\sigma$ — *элемент дуги на* Γ *и* $(r, \hat{n})$ — *угол между вектором* $\overrightarrow{\tau t}$ *и внешней нормалью* $\hat{n}$ *к кривой* Γ *в точке* $\tau \in \Gamma$.

(b) *Если, обратно, пара* $(M, K) \in C^{\lambda}_{\mathbf{R}}(\Gamma) \times \mathbf{R}^n$ *является решением системы* (6), *тогда вектор-функция* $W = \omega^{-1}(M, K) \in C^{\lambda}(\bar{G}) \cap C^{\lambda}_{\bar{z}}(\bar{G})$ *является решением задачи* (1), (2).

Теорему 1 легко можно доказать, если воспользоваться формулой Сохоцкого–Племеля $(\Psi M)(t) = (PM)(t)$ $(t \in \Gamma)$, а также следующим соотношением (см. [2], § 12):

(7)
$$\overline{PM} = QM + VM.$$

Из теоремы 1 непосредственно следует, что оператор (4) является Φ-оператором(²) тогда и только тогда, когда сингулярный интегральный оператор Λ: $C^{\lambda}_{\mathbf{R}}(\Gamma) \times \mathbf{R}^n \to C^{\lambda}_{\mathbf{R}}(\Gamma)$ является Φ-оператором. Если это имеет место, тогда $\operatorname{Ind} R = \operatorname{Ind} \Lambda$. Пользуясь теоремами

(²) Линейный ограниченный оператор L, действующий между двумя банаховыми пространствами X_1 и X_2 ($L \in \mathscr{L}(X_1, X_2)$), называется *$\Phi$-оператором* (фредгольмовым или нётеровым оператором), если конечны $\dim \operatorname{Ker} L$ и $\operatorname{codim} LX_1$ (отсюда следует замкнутость $\operatorname{im} L := LX_1$). Разность $\operatorname{Ind} L$ этих чисел называется *индексом оператора* L.

Нётера для систем сингулярных интегральных уравнений (см. [2], [9]), отсюда можно заключить, что справедлива

Теорема 2 ([1], [7], [5]). *Пусть* $\Gamma \in C^{2,\lambda}$. *Оператор* (4) *краевой задачи* (1), (2) *является Φ-оператором тогда и только тогда, когда выполняется условие Лопатинского* (3). *Если условие* (3) *выполнено, тогда справедливо равенство*

$$\operatorname{Ind} R = n - 2\operatorname{ind}\det C.$$

При этом $\operatorname{ind} f(t)$ означает индекс функции $f(t)$ (т.е. разделённое на 2π приращение аргумента функции $f(t)$, когда точка t один раз опишет кривую Γ в положительном направлении).

Доказательство теоремы 2 тоже вытекает из доказательства теоремы 3 (см. ниже).

Замечание. В случае $(m+1)$-связной области G имеет место формула

$$\operatorname{Ind} R = n(1 - m) - 2\operatorname{ind}\det C.$$

Это легко следует из того, что в этом случае, согласно обобщённой теореме Гарнака, в лемме 1 каждой функции W соответствуют m линейно независимых функций $M_1, \ldots, M_m$.

3. Случаи, когда нарушается условие Лопатинского

3.1. Предположим теперь, что условие (3) нарушается в конечном числе точек кривой Γ. Пусть точки $a_1, \ldots, a_r$ $(\in \Gamma)$ — нули функции $\det C(z)$ $(z \in \Gamma)$, а целые числа $m_1, \ldots, m_r$ — кратности этих нулей. Допустим, далее, что $\Gamma \in C^{m+2,\lambda}$, $m = \max_k m_k$, $0 < \lambda < 1$, и элементы матрицы-функции $C(z)$ $(z \in \Gamma)$ в окрестности точек a_k обладают производными, соответственно, до порядков m_k $(k = 1, \ldots, r)$ включительно, которые принадлежат классу $C^{\nu}(\Gamma)$, $\lambda < \nu < 1$.

Тогда матрицы-функции C, $\bar{C}$ допускают следующие представления (см. [9], § 8.1):

(8)
$$C(z) = R_-(z)D_-(z)C_1(z), \qquad \overline{C(z)} = S_+(z)D_+(z)D_1(z).$$

При этом $R_-(z)$ $(S_+(z))$ — полиномиальная матрица относительно z^{-1} (z) с постоянным, отличным от нуля определителем; $C_1(z)$, $D_1(z)$ — матрицы-функции класса $C^{\nu}(\Gamma)$ с не обращающимся в нуль на Γ определителем, а $D_{\pm}(z)$ — диагональные матрицы вида

$$D_-(z) = \Big\{\prod_{k=1}^{r}(z^{-1} - a_k^{-1})^{\mu_j^{(k)}}\delta_{jl}\Big\}_{j,l=1}^{n},$$

$$D_+(z) = \Big\{\prod_{k=1}^{r}(z - a_k)^{\mu_j^{(k)}}\delta_{jl}\Big\}_{j,l=1}^{n},$$

где $\mu_1^{(k)} \geqslant \ldots \geqslant \mu_n^{(k)} \geqslant 0$ $(k = 1, \ldots, r)$ — целые числа, которые однозначно определяются матрицей C. Очевидно имеют место соотношения

$$m_k = \sum_{j=1}^{n} \mu_j^{(k)} \quad (k = 1, \ldots, r).$$

Введём в рассмотрение следующее пространство:

$$\bar{C}^\lambda(\Gamma) := \{\psi = (PR_-D_- + QS_+D_+)\varphi \mid \varphi \in C^\lambda(\Gamma)\}$$

с нормой $\|\psi\|_{\bar{C}^\lambda(\Gamma)} = \|\varphi\|_{C^\lambda(\Gamma)}$. Пространство $\bar{C}^\lambda(\Gamma)$ банахово и в него непрерывно вложено пространство $C^\lambda(\Gamma; (a_k, \mu_1^{(k)})_1^r)$, состоящее из всех функций $f \in C^\lambda(\Gamma)$, которые в окрестности точек a_k обладают производными до порядков $\mu_1^{(k)}$ $(k = 1, \ldots, r)$ включительно:

(9) $$C^\lambda(\Gamma; (a_k, \mu_1^{(k)})_1^r) \subset \bar{C}^\lambda(\Gamma)$$

(см. [9], гл. 8).

Оператор $\mathfrak{A} = CP + \bar{C}Q$: $C^\lambda(\Gamma) \to \bar{C}^\lambda(\Gamma)$ является линейным ограниченным Φ-оператором, индекс которого равен

(10) $$\operatorname{Ind}\mathfrak{A} = \operatorname{ind}[\det D_1/\det C_1] = -2\left(\operatorname{ind} c(z) + \sum_{k=1}^{r} m_k\right),$$

где $c(z) = \det C(z)/\prod_{k=1}^{r}(z - a_k)^{m_k}$ (см. [9], гл. 8). В силу предположения $\Gamma \in C^{m+2,\lambda}$ ядро интегрального оператора V принадлежит классу $C_{\boldsymbol{R}}^{m,\lambda}(\Gamma \times \Gamma)$ (см. [2], §§ 7, 12). Тогда в силу (9) V и $\bar{C}V$ являются вполне непрерывными операторами, действующими из $C^\lambda(\Gamma)$ в $\bar{C}^\lambda(\Gamma)$. Следовательно, $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A} + \bar{C}V \in \mathscr{L}(C^\lambda(\Gamma), \bar{C}^\lambda(\Gamma))$ также является Φ-оператором и $\operatorname{Ind}\mathfrak{A}_1 = \operatorname{Ind}\mathfrak{A}$.

Из теоремы 1 легко следует, что оператор R: $C^\lambda(\bar{G}) \cap C^\lambda_{\bar{z}}(\bar{G}) \to C^\lambda(\bar{G}) \times \bar{C}^\lambda_{\boldsymbol{R}}(\Gamma)$ является Φ-оператором тогда и только тогда, когда оператор Λ: $C^\lambda_{\boldsymbol{R}}(\Gamma) \times \boldsymbol{R}^n \to \bar{C}^\lambda_{\boldsymbol{R}}(\Gamma)$ является Φ-оператором; если это имеет место, тогда $\operatorname{Ind} R = \operatorname{Ind} \Lambda$.

В дальнейшем мы выделим два типа условий на данные задачи (1), (2), обеспечивающих полную непрерывность оператора $C(U^{-1} - I)$: $C^\lambda(\Gamma) \to \bar{C}^\lambda(\Gamma)$ в формуле (6) и, следовательно, Φ-свойство оператора Λ.

3.2. Допустим, что элементы матриц-функций $A(z)$ и $B(z)$ $(z \in G)$ исчезают в окрестности точек a_k $(k = 1, \ldots, r)$.

При таком предположении имеет место

Теорема 3. *Сингулярный интегральный оператор Λ: $C^\lambda_{\boldsymbol{R}}(\Gamma) \times \boldsymbol{R}^n \to \bar{C}^\lambda_{\boldsymbol{R}}(\Gamma)$ является Φ-оператором, индекс которого равен*

(11) $$\operatorname{Ind}\Lambda = n - 2\left(\operatorname{ind} c(z) + \sum_{k=1}^{r} m_k\right).$$

Доказательство. Положим

$$\mathfrak{A}_2 M = \mathfrak{A}_1 M + C(U^{-1} - I)\Psi M + \overline{C(U^{-1} - I)\Psi M}.$$

Известно, что $\Psi \in \mathscr{L}(C^\lambda(\Gamma), C^\lambda(\bar{G}))$ (см. [1]). В силу предположения 3.2 функции TAg, TBg $(g \in C^\lambda(\bar{G}))$ можно продифференцировать под знаком интеграла в окрестности точек a_k $(k = 1, \ldots, n)$. Учитывая полную непрерывность оператора $T \in \mathscr{L}(C^\lambda(\bar{G}))$, а также вложение (9) отсюда заключаем полную непрерывность оператора

(12) $$U^{-1} - I = -T(AU^{-1} + \overline{BU^{-1}}): C^\lambda(\bar{G}) \to \bar{C}^\lambda(\Gamma).$$

Из равенства (7) легко видеть, что $\mathfrak{A}_1 M$ принимает вещественные значения для любых $M \in C^\lambda_{\boldsymbol{R}}(\Gamma)$. Обозначим через $\mathfrak{A}_{1\boldsymbol{R}}$, $\mathfrak{A}_{2\boldsymbol{R}}$ сужения операторов $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ на вещественное пространство $C^\lambda_{\boldsymbol{R}}(\Gamma)$. Тогда $\mathfrak{A}_{1\boldsymbol{R}}$, $\mathfrak{A}_{2\boldsymbol{R}} \in \mathscr{L}(C^\lambda_{\boldsymbol{R}}(\Gamma), \bar{C}^\lambda_{\boldsymbol{R}}(\Gamma))$. Легко видеть, что операторы $\mathfrak{A}_1 \in \mathscr{L}(C^\lambda(\Gamma), \bar{C}^\lambda(\Gamma))$ и $\mathfrak{A}_{1\boldsymbol{R}}$ одновременно являются Φ-операторами и их индексы совпадают. В силу полной непрерывности оператора $\mathfrak{A}_{2\boldsymbol{R}} - \mathfrak{A}_{1\boldsymbol{R}}$: $C^\lambda_{\boldsymbol{R}}(\Gamma) \to \bar{C}^\lambda_{\boldsymbol{R}}(\Gamma)$ оператор $\mathfrak{A}_{2\boldsymbol{R}}$ также является Φ-оператором и $\operatorname{Ind}\mathfrak{A}_{2\boldsymbol{R}} = \operatorname{Ind}\mathfrak{A}_{1\boldsymbol{R}}$. Наконец, операторы $\mathfrak{A}_{2\boldsymbol{R}}$ и $\Lambda: C^\lambda_{\boldsymbol{R}}(\Gamma) \times \boldsymbol{R}^n \to \bar{C}^\lambda_{\boldsymbol{R}}(\Gamma)$ одновременно являются Φ-операторами и имеет место формула $\operatorname{Ind}\Lambda = n + \operatorname{Ind}\mathfrak{A}_{2\boldsymbol{R}}$ (см., например, [11]). Учитывая формулу (10), получим утверждение теоремы 3.

Из теорем 1 и 3 непосредственно вытекает

Теорема 4. *Пусть выполнено условие 3.2. Тогда оператор R: $C^\lambda(\bar{G}) \cap C^\lambda_{\bar{z}}(\bar{G}) \to C^\lambda(\bar{G}) \times \bar{C}^\lambda_{\boldsymbol{R}}(\Gamma)$ является Φ-оператором, индекс которого равен*

(13) $$\operatorname{Ind} R = n - 2\left(\operatorname{ind} c(z) + \sum_{k=1}^{r} m_k\right).$$

Замечания. 1. Условие 3.2 можно несколько ослабить. А именно, достаточно потребовать, чтобы для любых точек $z \in \Gamma$ и $\zeta \in G$ из достаточно малой окрестности точек a_k $(k = 1, \ldots, r)$ функции $A(\zeta)/(\zeta - z)^{\mu_1^{(k)}}$, $B(\zeta)/(\zeta - z)^{\mu_1^{(k)}}$ принадлежали классу C^λ (как функции от ζ).

Действительно, как легко видеть, при таком условии функции TAg, TBg $(g \in C^\lambda(\bar{G}))$ в окрестности точек a_k обладают производными до порядка $\mu_1^{(k)}$ $(k = 1, \ldots, r)$, которые можно получить дифференцированием под знаком интеграла. Отсюда опять следует полную непрерывность оператора (12) (см. также (9)).

2. Из теоремы 4 с помощью простых соображений (см. [9], § 4.5) легко заключить следующий результат, принадлежащий В. Вендланцу (см. [5], §§ 3.5, 5.1 и [6]):

Пусть выполнены условия $\operatorname{supp} A(z) \subset G$, $\operatorname{supp} B(z) \subset G$. Положим

$$X := \{W \in C^\lambda(\bar{G}) \mid W_{\bar{z}} \in C^{m-1,\lambda}(\bar{G})\}, \qquad m = \max_k m_k.$$

Тогда замкнутый оператор R: $X \to C^{m-1,\lambda}(\bar{G}) \times C_{\mathbf{R}}^{m,\lambda}(\Gamma)$ (с плотной областью определения) является Φ-оператором, индекс которого вычисляется по формуле (13).

3. Используя свойства оператора T в пространствах $L_p(G)$, $1 < p < \infty$ (см. [1], гл. 1), легко перенести все результаты настоящей работы с пространств C^λ на пространства L_p.

3.3. Предположим теперь, что в представлении (8) $R_-(z)$ — вещественная матрица.

Легко видеть, что при таком условии $R_-(z)$ является постоянной матрицей (см. [7]) и, следовательно, в (8) можно принять $S_+ = R_-$. Учитывая равенство $D_+(z) = D_-(z)\tilde{D}(z)$, где

$$\tilde{D}(z) = \Big\{\prod_{k=1}^{r}(-za_k)^{\mu_j^{(k)}}\delta_{jl}\Big\}_{j,l=1}^{n},$$

получим следующие представления [9]:

$$\begin{aligned} S_+D_+ &= (PR_-D_- + QS_+D_+)(P\tilde{D} + Q), \\ R_-D_- &= (PR_-D_- + QS_+D_+)(P + Q\tilde{D}^{-1}). \end{aligned} \tag{14}$$

Отсюда непосредственно заключаем, что операторы умножения на матрицы-функции C, $\bar{C}$ принадлежат классу $\mathscr{L}(C^\lambda(\Gamma), \bar{C}^\lambda(\Gamma))$ и, следовательно, $\mathfrak{A}_{2\mathbf{R}} - \mathfrak{A}_{1\mathbf{R}}$: $C_{\mathbf{R}}^\lambda(\Gamma) \to \bar{C}_{\mathbf{R}}^\lambda(\Gamma)$ опять является вполне непрерывным оператором. Повторяя рассуждения из доказательства теоремы 3, мы убедимся в том, что *при условии* 3.3 *теоремы* 3 *и* 4 *полностью остаются в силе.*

Введем теперь в рассмотрение пространство

$$\tilde{C}^\lambda(\Gamma) := \{f = S_+D_+g \mid g \in C^\lambda(\Gamma)\}$$

с нормой $\|f\|_{\tilde{C}^\lambda(\Gamma)} = \|g\|_{C^\lambda(\Gamma)}$. Очевидно, что $\tilde{C}^\lambda(\Gamma)$ является банаховым пространством, непрерывно вложенным в пространство $\bar{C}^\lambda(\Gamma)$.

Из представления

$$\mathfrak{A} = CP + \bar{C}Q = S_+D_+(\tilde{D}^{-1}C_1P + D_1Q)$$

следует, что $\mathfrak{A} \in \mathscr{L}(C^\lambda(\Gamma), \tilde{C}^\lambda(\Gamma))$ является Φ-оператором с индексом, равным

$$\operatorname{Ind}\mathfrak{A} = \operatorname{Ind}(\tilde{D}^{-1}C_1P + D_1Q) = \operatorname{ind}[\det D_1/\det C_1] + \sum_{k=1}^{r} m_k.$$

Повторяя рассуждения из доказательства теоремы 3, мы получим следующую теорему.

Теорема 5 ([7]). *Пусть выполнено условие* 3.3. *Тогда оператор* R: $C^\lambda(\bar{G}) \cap C_{\bar{z}}^\lambda(\bar{G}) \to C^\lambda(\bar{G}) \times \tilde{C}_{\mathbf{R}}^\lambda(\Gamma)$ *является Φ-оператором с индексом, равным*

$$\operatorname{Ind}R = n - 2\operatorname{ind}c(z) - \sum_{k=1}^{r} m_k.$$

Замечания. 1. В случае $n = 1$ условие 3.3, очевидно, выполнено.

2. Легко показать, что $\tilde{C}^\lambda(\Gamma)$ $(\tilde{C}_{\mathbf{R}}^\lambda(\Gamma))$ является замкнутым подпространством пространства $\bar{C}^\lambda(\Gamma)$ $(\bar{C}_{\mathbf{R}}^\lambda(\Gamma))$ коразмерности $\sum_{k=1}^{r} m_k$.

4. О приближённом решении задачи Римана–Гильберта

Сингулярное интегральное уравнение (6), эквивалентное задаче (1), (2), позволяет построить методы приближённого решения задачи (1), (2).

Допустим, что уравнение (6) имеет единственное решение $(M, K) \in C_{\mathbf{R}}^\lambda(\Gamma) \times \mathbf{R}^n$ при любой правой части $g \in \bar{C}_{\mathbf{R}}^\lambda(\Gamma)$. Самому уравнению (6) можно придать вид

$$\mathfrak{A}_2 M + aK = g, \qquad a = 2\operatorname{Re}(CU^{-1}i).$$

Рассмотрим некоторый проекционный метод $\{P_l, Q_l\}_{l=1}^\infty$ такой, что операторы $A_l = Q_l\mathfrak{A}_2P_l$: $\operatorname{im}P_l \to \operatorname{im}Q_l$ обратимы (например, метод редукции, коллокации, механических квадратур или др., см. [10]). За приближённое уравнение уравнения (6) примем уравнение

$$A_lM_l + Q_laK_l = Q_lg \tag{15}$$

с искомыми векторами $M_l \in \operatorname{im}P_l$, $K_l \in \mathbf{R}^n$.

Если данные A, B, C достаточно гладки, то матрица-функция a также будет достаточно гладкой и, следовательно, принадлежит линеалу сходимости оператора $\mathfrak{A}_2$ относительно $\{P_l, Q_l\}$ (см. [10]). Отсюда следует

$$\delta_l := \|A_l^{-1}Q_la - \mathfrak{A}_2^{-1}a\|_{C_{\mathbf{R}}^\lambda(\Gamma)} \xrightarrow[l\to\infty]{} 0.$$

Так как оператор A: $C_{\mathbf{R}}^\lambda(\Gamma) \times \mathbf{R}^n \to \bar{C}_{\mathbf{R}}^\lambda(\Gamma)$ обратим, то, следовательно, уравнение (15) имеет единственное решение при всех $l > l_0$. Легко видеть, что имеет место оценка

$$\|M - M_l\|_{C_{\mathbf{R}}^\lambda(\Gamma)} + |K - K_l| \leqslant d(\delta_n + \|A_l^{-1}Q_lg - \mathfrak{A}_2^{-1}g\|_{C_{\mathbf{R}}^\lambda(\Gamma)}),$$

где $d = \mathrm{const}$. В частности,

$$\|M - M_l\|_{C_{\mathbf{R}}^\lambda(\Gamma)} \to 0, \qquad |K - K_l| \to 0, \qquad l \to \infty,$$

если g принадлежит линеалу сходимости оператора $\mathfrak{A}_2$ относительно $\{P_l, Q_l\}$.

Заметим, что проекционные методы приближённого решения систем сингулярных интегральных уравнений с оператором вида $\mathfrak{A}_2$ достаточно хорошо разработаны [10].

Литература

[1] И. Н. Векуа, *Обобщённые аналитические функции*, Москва 1959.

[2] Н. И. Мусхелишвили, *Сингулярные интегральные уравнения*, Москва 1968.

[3] Б. В. Боярский, *Теория обобщенного аналитического вектора*, Ann. Polon. Math. 17 (1966), 281–320.

[4] D. Pascali, Revue Roumaine de Math. pures et appl. 10 (1965), 779–808; 12 (1967), 685–689.

[5] W. Wendland, *Elliptic systems in the plane*, Pitman, London, San Francisco, Melbourne 1979.

[6] —, *Elliptic systems in the plane*, Vortrag Jyväskylä, Colloquium on Mathematical Analysis (1973).

[7] P. Kopp, *Über eine Klasse von Randwertproblemen mit verletzter Lopatinski-Bedingung für elliptische Systeme erster Ordnung in der Ebene*, Dissertation D17, TH Darmstadt 1977.

[8] S. Prössdorf, Math. Ann. 183 (1969), 130–150.

[9] —, *Einige Klassen singulärer Gleichungen*, Akademie-Verlag, Berlin 1974 (Русский перевод: Мир, Москва 1979).

[10] S. Prössdorf, B. Silbermann, *Projektionsverfahren und die näherungsweise Lösung singulärer Gleichungen*, Teubner-Texte zur Mathematik, Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1977.

[11] D. Przeworska-Rolewicz, S. Rolewicz, *Equations in linear spaces*, Warszawa 1968.

Presented to the Semester
Partial Differential Equations
September 11–December 16, 1978

PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS
BANACH CENTER PUBLICATIONS, VOLUME 10
PWN – POLISH SCIENTIFIC PUBLISHERS
WARSAW 1983

AN ANALYTICAL INDEX FORMULA FOR ELLIPTIC PSEUDO-DIFFERENTIAL BOUNDARY PROBLEMS IN THE HALF-SPACE

STEPHAN REMPEL

Akademie der Wissenschaften der DDR,
Zentralinstitut für Mathematik und Mechanik, Berlin, D.D.R.

1. Introduction

In this note we give an analogue to a nice analytical index formula derived by B. V. Fedosov [2] (cf. also L. Hörmander [4]) for elliptic pseudo-differential operators (pdo) in $\boldsymbol{R}^n$, resp. on closed compact manifolds with trivial normal bundle. We consider a class of pd boundary problems introduced by L. Boutet de Monvel [1] (cf. also [7] or [5]). It is assumed that the reader is familiar with standard facts of the theory of pd boundary problems.

Our starting point is the so-called "coarse" index formula (Theorem 1) from [6]. Using homotopy arguments it is possible to reduce the number of derivatives involved in this formula in the expressions for densities on the half-space and on the boundary. The result is formulated in Theorem 2. A proof will be published elsewhere. Also the case of manifolds with a boundary will be treated in another paper.

The author would like to thank the organisation committee of the Banach semester "Partial Differential Equations" in autumn 1978 in Warsaw for giving the opportunity of spending a very profitable time; a good deal of the work for this note was done there.

2. Preparations

Denote by $S^m(\boldsymbol{R}^n_+, \boldsymbol{R}^n)$ the space of pd symbols of order m having an extension to S^m-symbols in some open neighbourhood of $\boldsymbol{R}^n_+$. In the following we shall assume everywhere that the symbols considered are independent of x_n near $x_n = 0$ ((x', x_n) are the coordinates in $\boldsymbol{R}^n_+ = \{x_n \geqslant 0\}$). Remark that this is not an essential restriction, as regards the index,