COMPLEX ANALYSIS
BANACH CENTER PUBLICATIONS, VOLUME 11
PWN–POLISH SCIENTIFIC PUBLISHERS
WARSAW 1983

EIN VERALLGEMEINERTER TRANSFINITER DURCHMESSER IM ZUSAMMENHANG MIT EINER QUASIKONFORMEN NORMALABBILDUNG

SIEGFRIED KIRSCH

Sektion Mathematik der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg
Universitätsplatz 8/9, DDR-402 Halle an der Saale, DDR

1. Einleitung und Resultate

I. Beim Gaußschen Prinzip minimaler Energie wird eine Charakterisierung elektrostatischer Gleichgewichtsverteilungen von z.B. positiven Ladungen auf Leiteroberflächen durch eine Extremaleigenschaft gegeben. Im Falle eines ebenen Problems mit einheitlicher konstanter Dielektrizitätskonstante gelangt man dabei zur Charakterisierung des konformen Abbildungsradius einfach zusammenhängender Gebiete. Die Diskretisierung des Energieintegrals führt bekannterweise zum Begriff des transfiniten Durchmessers nach Fekete [2], [10]. Im Zusammenhang damit stehen auch die Begriffe wie Tschebyschewpolynom und Tschebyschewsche Konstante. Im folgenden sollen diese Begriffe wie Abbildungsradius, transfiniter Durchmesser und Tschebyschewsche Konstante auf den Fall mit ortsabhängiger Dielektrizitätskonstante verallgemeinert werden im Anschluß an [4], wo u.a. der Abbildungsradius einer quasikonformen Kreisschlitzabbildung charakterisiert wird.

II. In der vorliegenden Arbeit spielen die Differentialgleichung

$$w_{\bar{z}} = -q(z)\overline{w_z} \tag{1}$$

und eine Grundlösung $w(z) = \log r(z, \zeta)$ eine zentrale Rolle. Gegeben sei ein einfach zusammenhängendes Gebiet G in der komplexen z-Ebene, das den unendlich fernen Punkt im Innern enthält. Durch $\mathfrak{E}$ sei die Komplementärmenge von G bezüglich der z-Ebene bezeichnet, die noch eine *Regularitätsbedingung A* erfüllen möge: Zu jedem Randpunkt P von E existiere ein ganz in $\mathfrak{E}$ liegender Kreissektor mit dem Scheitel in P.

$q(z) = \big(p(z)-1\big)/\big(p(z)+1\big)$ sei eine in der ganzen z-Ebene erklärte, beschränkte reellwertige Funktion mit $|q(z)| \leqslant q_0 < 1$, die folgender *Glattheitsvoraussetzung B* genüge:

Die z-Ebene zerfalle in endlich viele von stückweise analytischen Jordankurven berandete Teilbereiche, von denen einer $z = \infty$ im Innern enthalte. In jedem Teilbereich besitze $q(z)$ stetige partielle Ableitungen erster Ordnung, in $z = \infty$ nach ausgeführter Stürzung. Weiterhin sei $q(z)$ derart, daß $\mathfrak{E}$ ganz im Innern eines der Glattheitsteilbereiche von $q(z)$ liege.

Im folgenden wird ein Satz benutzt, der die Existenz einer Grundlösung mit logarithmischer Singularität der Differentialgleichung (1) sicherstellt. (Vgl. Satz 5 in [5], [7]).

II.1. Satz. *Zu jeder komplexen Zahl ζ gibt es genau eine Funktion* $\mathfrak{r}(z, \zeta)$ *mit folgenden Eigenschaften*:

(a) $\mathfrak{r}$ *ist stetig, schlicht in der z-Ebene und in jedem der von den oben genannten Ausnahmelinien berandeten Teilbereiche zweimal stetig differenzierbar* $(z \neq \zeta)$;

(b) $\mathfrak{r}(\zeta, \zeta) = 0$, $\mathfrak{r}(\infty, \zeta) = \infty$;

(c) $w = \log\mathfrak{r}(z, \zeta)$ *erfüllt* (1);

(d) $\log\mathfrak{r}(z, \zeta)$ *hat den Entwicklungstypus*

$$(1+q(\infty))^{-1}(\log z - q(\infty)\overline{\log z}) + \varepsilon(z, \zeta) \quad \text{in } z = \infty,$$

$$(1+q(\zeta))^{-1}(\log(z-\zeta) - q(\zeta)\overline{\log(z-\zeta)}) + c(\zeta) + \varepsilon_1(z, \zeta) \quad \text{in } z = \zeta,$$

wobei noch $z^{\alpha}\varepsilon$ und $(z-\zeta)^{-\alpha}\varepsilon_1$ nach Null streben, wenn z nach ∞ bzw. nach ζ geht, $0 < \alpha < 1$.

Es werden zunächst einige Eigenschaften der Funktion $\log\mathfrak{r}(z, \zeta)$ angegeben.

II.2. Die Funktion $\log\mathfrak{r}(z, \zeta)$ ist stetig in z und ζ (vierdimensional reell) für $z \neq \zeta$, und damit auch $|\mathfrak{r}(z, \zeta)|$.

II.3. Die Funktion $\varepsilon(z, \zeta)$ aus II.1. (d) strebt gleichmäßig bezüglich ζ mit $|\zeta| < R$ nach Null, wenn z nach ∞ geht.

II.4. Die Pseudodistanz $[z, \zeta] = |\mathfrak{r}(z, \zeta)|$ ist symmetrisch; siehe [4].

III. Sei K eine beliebige abgeschlossene beschränkte unendliche Punktmenge der z-Ebene. Für K wird wie folgt eine Ausmessung angegeben. Man setzt

$$V(z_1, \ldots, z_n) = \prod_{\substack{k,l=1\\k<l}}^{n} [z_k, z_l], \quad n \geqslant 2, \quad z_k \in K.$$

V_n sei das Maximum von $V(z_1, \ldots, z_n)$ in bezug auf alle Wertesysteme $z_1, \ldots, z_n$ von n beliebigen Punkten auf K. Da $V(z_1, \ldots, z_n)$ stetig von von seinen Argumenten abhängt und K abgeschlossen ist, so existiert das Maximum $V_n = V(z_1^n, \ldots, z_n^n)$ (siehe [8]).

III.1. Die Zahlenfolge

$$d_n = V_n^{1/\binom{n}{2}}$$

nimmt mit wachsendem n nicht zu und ist durch Null nach unten beschränkt und besitzt daher einen endlichen Grenzwert.

Definition. $d = d(K, p) = \lim\limits_{n\to\infty} d_n$ heißt der *verallgemeinerte transfinite Durchmesser* von K.

Dieser stimmt für $p(z) \equiv 1$ mit dem gewöhnlichen, zuerst von Fekete angegebenen transfiniten Durchmesser überein.

IV. Der verallgemeinerte transfinite Durchmesser steht im Zusammenhang mit der verallgemeinerten Tschebyschewschen Konstanten. Es werden verallgemeinerte "Polynome" $P_n(z)$ n-ten Grades der Form

$$P_n(z) = \prod_{i=1}^{n} \mathfrak{r}(z, z_i), \quad z_i \in C \quad \text{und} \quad \mu(p_n(z)) = \max_{z\in K}|P_n(z)|$$

auf K betrachtet. Desweiteren bezeichne

$$m_n = \inf_{P_n(z)} \mu(P_n(z)).$$

Zu jedem n existiert ein verallgemeinertes "Polynom" $T_n(z)$ mit kleinstem Maximum des absoluten Betrages auf K (siehe z.B. [8]).

Definition. $T_n(z)$ heißt das *verallgemeinerte Tschebyschewsche Polynom n-ten Grades* bezüglich der Menge K.

Die eindeutige Bestimmtheit von T_n läßt sich zunächst nur für den Spezialfall $p(z) \equiv 1$ feststellen ([10], S. 72).

IV.1. Setzt man $t_n = m_n^{1/n}$, dann existiert der Grenzwert $t = t(K, p) = \lim\limits_{n\to\infty} t_n$.

Definition. Der Grenzwert $t = t(K, p)$ heißt die *verallgemeinerte Tschebyschewsche Konstante der Menge K*.

Diese fällt im Spezialfall $p(z) \equiv 1$ mit der gewöhnlichen zusammen (siehe [2], [10]).

V. M_K sei die Menge aller positiven, volladditiven Mengenfunktionen v, die auf ebenen Borelmengen erklärt sind und $v(K) = 1$ und $\operatorname{supp} v \subset K$ erfüllen. Im folgenden wird das Energieintegral

$$I(v) = -\int \log|\mathfrak{r}(z, \zeta)|\, dv \times v, \quad v \in M_K.$$

Es existiert eine sogenannte Gleichgewichtsverteilung v_p, für die gilt

$$I(v_p) = \inf_{v\in M_K} I(v).$$

Definition. Die Kapazität $\operatorname{cap}(K, p)$ einer beliebigen abgeschlossenen beschränkten Punktmenge K der z-Ebene wird erklärt durch

$$\operatorname{cap}(K, p) = \exp(-I(v_p)).$$

VI. Satz 1. *Es gilt* $d(K, p) = t(K, p) = \operatorname{cap}(K, p)$ (siehe [8]).

VII. Satz 2. *Es gibt genau eine Funktion* $E(z)$ (siehe z.B. [3]) *mit folgenden Eigenschaften*

(a) $E(z)$ *ist stetig und schlicht in G für* $z \neq \infty$;

(b) $w = \log E(z)$ *erfüllt die Differentialgleichung* (1) *in* G;

(c) *In $z = \infty$ liegt folgende Entwicklung vor*

$$\log E(z) = (1+q(\infty))^{-1}(\log z - q(\infty)\overline{\log z}) + \varepsilon^*(z),$$

wobei $\varepsilon^*(z)$ eine Funktion bezeichnet, für die mit jedem reellen α, $0 < \alpha < 1$, $z^\alpha \varepsilon^*(z)$ nach Null konvergiert, wenn z nach ∞ geht.

(d) *Das Bild der Randkomponente von G ist ein zum Ursprung konzentrischer Kreis mit dem Radius R, wobei gilt*

$$R = \operatorname{cap}(\mathfrak{E}, p) = d(\mathfrak{E}, p) = t(\mathfrak{E}, p).$$

(e) *$E(z)$ ist darstellbar in der Form*

$$E(z) = \exp(-U(z) - iV(z)) = \exp\Big(\int \log \mathfrak{r}(z, \zeta) dv_p(\zeta)\Big),$$

wobei v_p die Gleichgewichtsverteilung der Einheitsmasse auf E ist und $K(z) = U(z) + iV(z)$ das zugehörige komplexe Gleichgewichtspotential bezeichnet.

Es gilt die Ungleichung

$$\int \log|\mathfrak{r}(z, \zeta)| dv \times v \leqslant \log R, \quad v \in M_{\mathfrak{E}}.$$

Das Gleichheitszeichen trifft für $v = v_p$ zu. Man kann auch zeigen, daß es nur für $v = v_p$ zutrifft. (Siehe [4].)

DEFINITION. $R = R(G, p)$ heißt *p-quasikonformer* Abbildungsradius des Gebietes G in bezug auf den unendlich fernen Punkt.

VIII. SATZ 3. *Für eine abgeschlossene beschränkte ebene Punktmenge K mit* $\operatorname{cap}(K, p) = 0$, *die ganz im Innern eines der Glattheitsbereiche von $p(z)$ liegt, ist notwendig, daß ihr äußerer linearer Jordanscher Inhalt der orthogonalen Projektion von K auf eine beliebige Gerade bzw. ihr äußerer Jordanscher Inhalt Null ist. Die Eigenschaft* $\operatorname{cap}(K, p) = 0$ *der Menge K ist unabhängig von der Funktion $p(z)$.*

2. Beweise

Beweis von Behauptung II.2. In Verbindung mit allgemeinen Verzerrungssätzen, vgl. [6], S. 233–243, für quasikonforme Abbildungen ergibt sich zunächst die Beschränktheit von $\log \mathfrak{r}(z, \zeta)$, sofern z und ζ in beschränkten kreisförmigen Umgebungen mit positiven Abstand variieren und daraus zusammen mit dem Häufungsprinzip für pseudoanalytische Funktionen die Behauptung II.2. Seien z_0 und ζ_0 zwei beliebige Punkte der z-Ebene und $K[z_0]$, $K[\zeta_0]$ abgeschlossene Kreisumgebungen von z_0 und $\zeta_0 \neq z_0$, so daß $0 < d = \min|z-\zeta|$, $D = \max|z-\zeta|$, $z \in K[z_0]$, $\zeta \in K[\zeta_0]$. Sei $\zeta \in K[\zeta_0]$, dann werde zunächst die z-Ebene vermittels $h = 1/(z-\zeta)$ auf die h-Ebene bezogen, die w-Ebene auf die H-Ebene durch eine Affinität in der log-Ebene

$$H(w) = \exp\big(-(1-q(\infty))^{-1}(\log w + q(\infty)\overline{\log w})\big).$$

Die zusammengesetzte Abbildung

$$H(h, \zeta) = \exp\{-(1+q(\infty))^{-1}(\log \mathfrak{r}(\zeta+h^{-1}, \zeta) + q(\infty)\overline{\log \mathfrak{r}(\zeta+h^{-1}, \zeta)})\}$$

ist eine schlichte Abbildung der h-Ebene auf die H-Ebene, die die Punkte 0 und ∞ festläßt.

H erfüllt die Differentialgleichung

$$H_{\bar{h}} = \varkappa(h, \zeta)\overline{H_h} \tag{2}$$

mit

$$\varkappa(h, \zeta) = -\frac{(q(\infty) - q(\zeta+h^{-1}))H}{(q(\infty)q(\zeta+h^{-1}) - 1)\overline{H}}, \quad |\varkappa(h, \zeta)| \leqslant \varkappa_0 < 1,$$

und

$$\varkappa_0 = (p_0^2 - 1)(p_0^2 + 1)^{-1}, \quad q_0 = (p_0 - 1)(p_0 + 1)^{-1}.$$

Damit erweist sich H als p_0^2-quasikonforme Abbildung der Ebene auf sich. Aus der vorausgesetzten Glattheit von $q(z)$ in $z = \infty$ folgert man die gleichmäßige Beschränktheit des Ausdruckes

$$\big|(q(\infty) - q(\zeta+h^{-1}))/h\big| \leqslant M \quad \text{für} \quad \zeta \in K[\zeta_0] \text{ und alle } h.$$

Es wird gezeigt, daß das Integral

$$J(r) = (2\pi)^{-1} \iint_{|h|<r} (D(h) - 1)|h|^{-2} d\sigma \quad \text{für alle } r$$

endlich ist und gleichmäßig bezüglich $\zeta \in K[\zeta_0]$ mit r gegen Null geht.

$D(h) = (1 + |\varkappa(h, \zeta)|)/(1 - |\varkappa(h, \zeta)|)$ bezeichnet die Dilatation von H. Wegen $D(h) - 1 = 2|\varkappa(h, \zeta)|(1 - |\varkappa(h, \zeta)|)^{-1} = 2|\varkappa(h, \zeta)|(1 - \varkappa_0)^{-1}$ folgt

$$J(r) \leqslant (\pi(1-\varkappa_0)(1-q_0^2))^{-1} \iint_{|h|<r} |q(\infty) - q(\zeta+h^{-1})|\,|h|^{-2} d_h\sigma \leqslant Cr$$

mit $C = 2M((1-\varkappa_0)(1-q_0^2))^{-1}$.

Somit erfüllt H alle Voraussetzungen des Verzerrungssatzes in [6], so daß $\lim_{h\to 0} H(h)/h = c$ existiert und den Wert $c = 1$ hat.

Letzteres ergibt sich, wenn man den Entwicklungstypus von $\log \mathfrak{r}(z, \zeta)$ in $z = \infty$ berücksichtigt.

Die Aussage des Verzerrungssatzes lautet in der für den Beweis geeigneten Fassung

$$|c|\exp(-(J(r) + \varepsilon_2(r))) \leqslant |H(h)/h| \leqslant |c|\exp(J(r) + \varepsilon_2(r)), \tag{3}$$

$$\big|\arg(H(h)/h)\big| \leqslant \varepsilon_3(r), \tag{4}$$

$$|H(h)/h - c| \leqslant |c|\varepsilon_4(r), \tag{5}$$

wobei $r = |h| < \infty$ und die Funktionen $\varepsilon_i(r)$, $i = 2, 3, 4$, nur von p_0^2 und $J(r)$ abhängen, nicht aber von der Abbildung $H(h)$, $\lim_{r\to 0} \varepsilon_i(r) = 0$. Dabei können die $\varepsilon_i(r)$ so gewählt werden, daß sie monoton mit r wachsen.

Für $\log|\mathfrak{r}(z, \zeta)|$ ergibt sich so die Abschätzung

$$(-e + \log d)p(\infty)^{-1} \leqslant \log|\mathfrak{r}(z, \zeta)| \leqslant (e + \log D)p(\infty)^{-1}$$

mit $e = Cd^{-1}+\varepsilon_2(d^{-1})$ und für $\arg\mathfrak{r}(z,\zeta)$

$$|\arg\mathfrak{r}(z,\zeta)| \leqslant |\arg(z-\zeta)-\arg\mathfrak{r}(z,\zeta)|+|\arg(z-\zeta)| \leqslant \varepsilon_3(d^{-1})+m$$

mit $m \geqslant |\arg(z-\zeta)|$ für $z\in K[z_0]$ und $\zeta\in K[\zeta_0]$.

Aus beiden Abschätzungen ergibt sich die Behauptung, daß $\log\mathfrak{r}(z,\zeta)$ gleichmäßig beschränkt bleibt, wenn z und ζ in $K[z_0]$ bzw. $K[\zeta_0]$ variieren.

$z_k\in K[z_0]$ und $\zeta_k\in K[\zeta_0]$ seien irgendwelche Punktfolgen, die gegen z_0 bzw. ζ_0 konvergieren. Die Funktionenfolge $\log\mathfrak{r}(z,\zeta_k)$ ist gleichmäßig für alle $z\in K[z_0]$ beschränkt und eine Folge von Lösungen von (1), so daß auf sie das Häufungsprinzip pseudoanalytischer Funktionen anwendbar ist. Demzufolge kann aus der Folge eine für alle $z\in K[z_0]$ gleichmäßig gegen $\log\mathfrak{r}(z,\zeta_0)$ konvergente Teilfolge herausgegriffen werden, die wiederum mit $\log\mathfrak{r}(z,\zeta_k)$ bezeichnet sei. Somit läßt sich zu jedem $\varepsilon>0$ ein $k_0(\varepsilon)$ angeben, so daß gilt

$$\begin{aligned}&\log\mathfrak{r}(z_k,\zeta_k)-\log\mathfrak{r}(z_0,\zeta_0)|\\ &\qquad\leqslant |\log\mathfrak{r}(z_k,\zeta_k)-\log\mathfrak{r}(z_k,\zeta_0)|+|\log\mathfrak{r}(z_k,\zeta_0)-\log\mathfrak{r}(z_0,\zeta_0)|\end{aligned}$$

für alle $k>k_0(\varepsilon)$.

Der erste Betragsausdruck rechterhand wird klein wegen der gleichmäßigen Konvergenz der Funktionenfolge $\log\mathfrak{r}(z,\zeta_k)$, der zweite aus Stetigkeitsgründen von $\log\mathfrak{r}(z,\zeta_0)$ in z_0.

Der Beweis von Behauptung II.3 folgt mit Hilfe von (4). Man setzt

$$H(h)/h-1 = o(h,\zeta). \tag{6}$$

Dann gilt $|o(h,\zeta)| \leqslant \varepsilon_4\big((|z|-R)^{-1}\big)\to 0$, $|z|>R$, $z\to\infty$. Löst man (6) nach $\log\mathfrak{r}(z,\zeta)$ auf, erhält man

$$\log\mathfrak{r}(z,\zeta) = (1+q(\infty))^{-1}\big(\log z-q(\infty)\overline{\log z}\big)+\varepsilon(z,\zeta)$$

mit

$$\begin{aligned}\varepsilon(z,\zeta) = {}&(1+q(\infty))^{-1}\big(\log(1-\zeta/z)-q(\infty)\overline{\log(1-\zeta/z)}\big)+\\ &+(1+q(\infty))^{-1}\Big(\log\big(1+o(h,\zeta)\big)-q(\infty)\overline{\log\big(1+o(h,\zeta)\big)}\Big),\end{aligned}$$

woraus alles folgt.

Einen Beweis von Satz 1 findet man in [8], [9], wo übrigens Satz 1 sogar für allgemeinere Kerne bewiesen wurde.

Bevor der Satz 2 bewiesen wird, soll noch eine lokale Abschätzung der Pseudodistanz $[z,\zeta]$ angegeben werden, die einerseits für eine Kapazitätsungleichung und andererseits für den Beweis des ersten Maximumprinzips für Potentiale

$$U^v(z) = -\int\log|\mathfrak{r}(z,\zeta)|\,dv(\zeta)$$

benötigt wird.

K sei eine beliebige kompakte Menge, die ganz im Innern eines der Glattheitsbereiche von $q(z)$ liege, r_0 sei der Durchmesser von K. Zu einer geeigneten Abschätzung gelangt man, in dem man ähnlich wie beim Beweis von II.2 vorgeht. Statt der Hilfstransformation $h = 1/(z-\zeta)$ wird jetzt $h = (z-\zeta)$ herangezogen. Die Abbildung

$$H(h,\zeta)^* = \exp\Big\{\big(1-q(\zeta)\big)^{-1}\big(\log\mathfrak{r}(\zeta+h,\zeta)+\overline{\log\mathfrak{r}(\zeta+h,\zeta)}\big)\Big\}$$

erfüllt die Voraussetzungen des oben genannten Verzeruungssatzes. Es existiert also

$$\lim_{h\to 0}H(h,\zeta)^*/h = c(\zeta)\neq 0,\infty.$$

Auf Grund der Voraussetzung über $q(z)$ gibt es eine reelle Zahl M^*, so daß

$$\big|\big(q(\zeta+h)-q(\zeta)\big)h^{-1}\big| \leqslant M^* \quad \text{für beliebiges } h,\ \zeta\in K.$$

Setzt man $C^* = 2M^*\big((1-\varkappa_0)(1-q_0^2)\big)^{-1}$, so erhält man aus dem Verzerrungssatz folgende Abschätzung

$$\begin{aligned}|z-\zeta||c(\zeta)|\exp\big(-(C^*r_0+\varepsilon_2(r_0))\big) &\leqslant |\mathfrak{r}(z,\zeta)|^{p(\zeta)}\\ &\leqslant |z-\zeta||c(\zeta)|\exp\big(C^*r_0+\varepsilon_2(r_0)\big).\end{aligned}$$

Aus dem Verzerrungssatz folgt auch eine Abschätzung von $c(\zeta)$,

$$e^{-J(1)}\min_{|h|=1}|H(h)^*| \leqslant |c(\zeta)| \leqslant \max_{|h|=1}|H(h)^*|e^{J(1)},$$

was weiter mit Hilfe der Betrachtungen beim Beweis von II.2 abgeschätzt werden kann zu

$$c^{-1}\leqslant |c(\zeta)|\leqslant c \quad \text{mit} \quad c = \exp\big(C^*+p_0p(\infty)^{-1}(C+\varepsilon_2(1))\big).$$

Somit gilt

$$B\cdot|z-\zeta|^{1/p(\zeta)} \leqslant |\mathfrak{r}(z,\zeta)| \leqslant A\cdot|z-\zeta|^{1/p(\zeta)},\quad z,\zeta\in K, \tag{7}$$

mit

$$A = \max_{\zeta\in K}\big[c\exp\big(Cr_0+\varepsilon_2(r_0)\big)\big]^{1/p(\zeta)},$$
$$B = \min_{\zeta\in K}\big[c^{-1}\exp\big(-Cr_0-\varepsilon_2(r_0)\big)\big]^{1/p(\zeta)},$$

bzw.

$$B'\cdot|z-\zeta| \leqslant |\mathfrak{r}(z,\zeta)| \leqslant A'\cdot|z-\zeta|^{1/p_0} \tag{8}$$

mit

$$A' = A\cdot r_0^{-1/p_0}\max_{\zeta\in K}r_0^{1/p(\zeta)},\qquad B' = B\cdot r_0^{-1}\cdot\min_{\zeta\in K}r_0^{1/p(\zeta)}.$$

Aus der Doppelungleichung (8) gewinnt man leicht eine Kapazitätsungleichung

$$B'\operatorname{cap}(K,1)\leqslant \operatorname{cap}(K,p)\leqslant A'\big(\operatorname{cap}(K,1)\big)^{1/p_0}. \tag{9}$$

Da für ein Kontinuum $\mathfrak{K}$ gilt $\operatorname{cap}(\mathfrak{K},1)>0$, fließt aus (9)

FOLGERUNG 1. *Ein Kontinuum $\mathfrak{K}$ in der z-Ebene, das ganz im Innern eines der Glattheitsteilbereiche von $q(z)$ liegt, ist von positiver Kapazität* $\operatorname{cap}(\mathfrak{K},p)>0$.

Beweis von Satz 3. Die Behauptung des Satzes 3 ist für den Fall $p(z)\equiv 1$ nach einem Satz von G. Pólya [2], S. 260, wahr. Zusammen mit (9) folgt die Behauptung des Satzes 3.

FOLGERUNG 2. *Für die Pseudodistanz $[z, \zeta]$ gilt in $\mathfrak{K}$ eine verallgemeinerte Dreiecksungleichung*

$$[z, w] = C(\mathfrak{K}, p)\cdot\big([z, \zeta]+[\zeta, w]\big).$$

Dies folgt aus (7), denn es ist

$$\frac{[z, w]}{[z, \zeta]+[\zeta, w]} \leqslant \frac{A}{B}\,\frac{(|z-\zeta|+|\zeta-w|)^{1/p(w)}}{|z-\zeta|^{1/p(\zeta)}+|\zeta-w|^{1/p(w)}}.$$

Die gleichmäßige Beschränktheit des rechten Ausdruckes gewinnt man durch elementare Rechnung unter Berücksichtigung der Glattheitseigenschaft von $p(z)$ in $\mathfrak{K}$. Die obere Schranke des rechten Ausdruckes ist eine Konstante $C(\mathfrak{K}, p)$, die nur von $\mathfrak{K}$ und $p(z)$ abhängt.

Beweis von Satz 2. Auf Grund der Regularitätsbedingung A für $\mathfrak{E}$ ergibt sich aus der Folgerung 1 und der Monotonieeigenschaft der Kapazität $\operatorname{cap}(\mathfrak{E}, p) > 0$, so daß eine Gleichgewichtsverteilung $v_p \in M_{\mathfrak{E}}$ auf E existiert.

Das zugehörige komplexe Gleichgewichtspotential $K(z)$ erfüllt in G die Differentialgleichung (1). Da man durch Bildung von finiten Näherungssummen des Integrals $K(z)$ Folgen von Lösungen von (1) gewinnen kann, die punktweise zu festem $z \in G$ gegen dieses Integral konvergieren und lokal gleichmäßig beschränkt sind wegen der Stetigkeit von $\log\mathfrak{r}(z, \zeta)$ in z und ζ, ergibt sich nach dem Häufungsprinzip für pseudoanalytische Funktionen, daß $K(z)$ in G die Differentialgleichung (1) erfüllt.

$U(z)$ genügt demnach $\operatorname{div} p(z) \operatorname{grad} U = 0$ in G.

$U(z)$ genügt ferner dem ersten Maximumprinzip. Der Beweis gelingt wie im konformen Fall nach dem Beweisprinzip von Maria [10], S. 53, wenn man dabei die Folgerung 2 anwendet.

Wie im konformen Fall weist man auch nach, daß gilt

$U(z) \leqslant I(v_p)$ in der z-Ebene,

$U(z) = I(v_p)$ auf $\mathfrak{E}$ ohne Ausnahme wegen der Regularitätsbedingung A.

Auf dem Rand von G gilt demnach

$$|E(z)| = \exp\big(-U(z)\big) = \operatorname{cap}(\mathfrak{E}, p).$$

Sei C eine beliebige geschlossene Jordankurve, die in G liege und $\mathfrak{E}$ umschlinge. Bei einem vollen Umlauf von $z \in C$ in mathematisch positiver Richtung nimmt $\arg\mathfrak{r}(z, \zeta)$ um 2π zu, $\zeta \in \mathfrak{E}$. Dabei kehrt $E(z)$ in den Ausgangspunkt zurück:

$$-\int_C dV(z) = \int [\arg\mathfrak{r}(z, \zeta)]_C\, dv_p(\zeta) = 2\pi \int dv_p = 2\pi.$$

Somit bildet $E(z)$ den Rand von G auf den zum Ursprung konzentrischen Kreis mit dem Radius $R = \operatorname{cap}(E, p)$ ab. Weiterhin gilt

$$\lim_{z\to\infty}\big[\log E(z) - (1+q(\infty))^{-1}\big(\log z - q(\infty)\overline{\log z}\big)\big]$$
$$= \lim_{z\to\infty}\int \varepsilon(z, \zeta)\, dv_p(\zeta) = \int \lim_{z\to\infty} \varepsilon(z, \zeta)\, dv_p(\zeta) = 0 \quad \text{wegen II.3.}$$

Nun ist noch

$$\lim_{z\to\infty} z^{\alpha}\varepsilon^*(z) = \int \lim_{z\to\infty} z^{\alpha}\varepsilon(z, \zeta)\, dv_p(\zeta) = 0, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Die Eigenschaft, daß $E(z)$ das Gebiet G schlicht auf $|z| > R$ abbildet, ergibt sich, wenn man berücksichtigt, daß auf $E(z)$ als quasikonforme Abbildung vermittels des Darstellungstheorems das Argumentprinzip anwendbar ist und $E(z)$ in $z = \infty$ eine Entwicklung gemäß Satz 2(c) aufweist.

Literaturverzeichnis

[1] O. Frostman, *Potentiel d'équilibre et capacité des ensembles*, Meddelanden Mat. Sem. Univ. Lund 3 S. (1935), 115.

[2] G. M. Golusin, *Geometrische Funktionentheorie*, Berlin 1957 [Übers. a.d. Russ.].

[3] R. Kühnau, *Identitäten bei quasikonformen Normalabbildungen und eine hiermit zusammenhängende Kernfunktion*, Math. Nachr. 73 (1976), 73–106.

[4] —, *Gauß–Thomsonsches Prinzip minimaler Energie, verallgemeinerter transfiniter Durchmesser und quasikonforme Abbildungen*, Proc. III Romanian–Finnish Seminar on Complex Analysis (Bukarest 1976).

[5] —, *Zur Methode der Randintegration bei quasikonformen Abbildungen*, Ann. Polon. Math. 31 (1976), 269–289.

[6] O. Lehto und K. S. Virtanen, *Quasikonforme Abbildungen*, Berlin–Heidelberg–New York 1965.

[7] M. M. Schiffer and G. Schober, *Representation of fundamental solutions for generalized Cauchy–Riemann equations by quasiconformal mappings*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I. Math. 2 (1976), 501–531.

[8] A. Szybiak, *On some constants related to the generalized potentials*, Ann. Polon. Math. 6 (1959), 265–268.

[9] —, *Investigation of some measures and sequences related to the extreme points*, ibid. 10 (1961), 279–291.

[10] M. Tsuji, *Potential theory in modern function theory*, Tokyo 1959.

Presented to the Semester
COMPLEX ANALYSIS
February 15–May 30, 1979