Indeed, put in Theorem 3 $H(z) = (z_1, \ldots, z_n)$. Then, by the continuity of $M$, we have $M \circ H(z) = 1$ for $z \in \partial\Omega_M$. From this and Theorem 3 we obtain (10).

This result is some analogue to the lemma of [5] for $\nu = 1$.

Assume that $L$ satisfies the same assumptions as $M$ in (f). Then $\Omega_L = \{z \in \boldsymbol{C}^m: L(z) < 1\}$ is a bounded domain. Let $m = n$.

Directly from Corollary 4 we obtain

COROLLARY 5 (cf. [5]). *If $F$ is a biholomorphic mapping of $\Omega_M$ onto $\Omega_L$, and $F(0) = 0$, then*

$$L \circ F(z) = M(z) \quad \text{for} \quad z \in \Omega_L.$$

## 6. Concluding remarks

The results obtained in the preceding section are connected with those of J. Siciak. In some cases Theorem 3 is a generalization of the lemma of [5]. For example, when the functions $T$ and $S$ of [5] satisfy, respectively, such conditions as $L$ and $M$ do, Theorem 3 is stronger than the lemma of [5]. Namely, $\Omega$ may be any domain, not necessarily circular, the function $M \circ H$ may possess more than one zero, in contradistinction to the function $S^\nu$ of [5].

## References


[1] J. Chądzyński, *Extremum principle for the quotient of plurisubharmonic functions (I)*, Bull. Soc. Sci. Lettres Łódź 27, 5 (1977), 13 pp.

[2] —, *Some generalization of the maximum principle for the quotient of plurisubharmonic functions*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 26 (1978), 695–699.

[3] R. C. Gunning and H. Rossi, *Analytic functions of several complex variables*, Englewood Cliffs 1965.

[4] M. Hervé, *Several complex variables. Local theory*, Oxford 1963.

[5] J. Siciak, *A generalization of Schwarz's lemma and of Hadamard's three circles theorem*, Colloq. Math. 21 (1964), 203–207.

[6] Б. В. Шабат, *Введение в комплексный анализ*, Москва 1969.


*Presented to the Semester*
*COMPLEX ANALYSIS*
*February 15–May 30, 1979*

---

COMPLEX ANALYSIS
BANACH CENTER PUBLICATIONS, VOLUME 11
PWN–POLISH SCIENTIFIC PUBLISHERS
WARSAW 1983

# НЕКОТОРЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ФОРМУЛЫ В МНОГОМЕРНОМ КОМПЛЕКСНОМ АНАЛИЗЕ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Ш. А. ДАУТОВ

*Институт Физики Сибирского Отделения АН СССР*
*Академгородок, SU-660036 Красноярск 36, СССР*

В этой статье приводится обзор некоторых работ красноярских математиков по теории функций многих комплексных переменных. Здесь рассматриваются 1) приложение формального решения уравнения $\bar{\partial}u = f$, пригодного для правых частей $f$, имеющих рост конечного порядка около границы области, к описанию множества нулей функций из класса Неванлинны–Джрбашяна; 2) различные приложения многомерных аналогов логарифмического вычета; 3) утверждение о том, что только голоморфные функции представимы интегралом Мартинелли–Бохнера.

Отметим, что в статье не приводятся все ссылки на предшествующие и близкие работы, а также полные доказательства. Всё это можно найти в оригинальных работах, а также в книгах [3] и [5].

## 1. Нули голоморфных функций конечного порядка

Здесь будут изложены результаты статьи [12]. Пусть $D$ — ограниченная область в $\boldsymbol{C}^n$ с дважды гладкой границей, т.е. $D = \{z \in \boldsymbol{C}^n: \varrho(z) < 0\}$, где $\varrho$ — функция класса $C^2$ в $\boldsymbol{C}^n$, причём $\operatorname{grad}\varrho|_{\partial D} \neq 0$. Через $N_\alpha(D)$ $(\alpha > 0)$ обозначим класс голоморфных в области $D$ функций, для которых

$$(1.1) \qquad \int_D |\varrho(z)|^{\alpha-1}\ln^+|F(z)|\,d\sigma_{2n} < \infty.$$

Здесь $d\sigma_k$ — элемент $k$-мерного объёма Лебега.

В классической работе М. М. Джрбашяна [13], [14] приведен следующий результат: если $D$ — единичный круг на комплексной плоскости, то при любом $\alpha > 0$ дискретная последовательность $\{a_j\}$ точек из $D$ является множеством нулей функции из $N_\alpha(D)$ тогда и только тогда, когда

$$\sum_j (1-|a_j|)^{\alpha+1} < \infty.$$

Теорема 1.1 (Даутов–Хенкин [12]). *Пусть $D$ — строго выпуклая область в $\mathbf{C}^n$, т.е. второй дифференциал функции $\varrho$, определяющей область $D$, строго положительно определён. Для того, чтобы $(n-1)$-мерное аналитическое множество $M$ в $D$ было множеством нулей функции класса Неванлинны–Джрбашяна $N_\alpha(D)$, $\alpha > 0$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\int\limits_M |\varrho(z)|^{\alpha+1} d\sigma_{2n-2} = \sum_j \gamma_j \int\limits_{M_j} |\varrho(z)|^{\alpha+1} d\sigma_{2n-2} < \infty, \tag{1.2}$$

*где $M_j$ — неприводимые компоненты множества $M$, $\gamma_j$ — кратности компонент $M_j$.*

Основным местом в доказательстве этой теоремы является построение голоморфной функции, имеющей заданные нули. По различным причинам способ построения функции по её нулям, применяемый в теории функций одного комплексного переменного, — бесконечные произведения — трудно реализуется в многомерном комплексном анализе, поэтому для построения голоморфных функций многих переменных используется следующее рассуждение, предложенное П. Лелоном [27].

Рассмотрим пространство $\mathscr{D}'_{p,q}(D)$ внешних дифференциальных форм типа $(p, q)$

$$f = \sum_{\substack{i_1<\ldots<i_q \\ j_1<\ldots<j_p}} a_{i_1,\ldots,i_q,j_1,\ldots,j_p}(z) d\bar z_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\bar z_{i_q} \wedge dz_{j_1} \wedge \ldots \wedge dz_{j_p},$$

коэффициенты которых — обобщённые функции в $D$. Элементы $\mathscr{D}'_{p,q}(D)$ будем называть потоками типа $(p, q)$. Пространство $\mathscr{D}'_{p,q}(D)$ можно отождествить (см. [19]) с пространством линейных непрерывных функционалов на $\mathscr{D}_{n-p,n-q}(D)$ — пространстве бесконечно дифференцируемых форм типа $(n-p, n-q)$ с компактным носителем. На пространстве $\mathscr{D}'_{p,q}(D)$ обычным образом вводятся операторы $d$, $\bar\partial$ и $\partial$, причём $d = \bar\partial + \partial$. Введём ещё оператор $d^c = i(\bar\partial - \partial)$.

Аналитическое множество $M$ размерности $n-1$ определяет поток $[M]$ типа $(1, 1)$ следующим образом: если $\varphi \in \mathscr{D}_{n-1,n-1}(D)$, то

$$([M], \varphi) = \sum_j \gamma_j \int\limits_{M_j} \varphi(z).$$

$M_j$ и $\gamma_j$ определяются так же как в теореме 1.1. Можно доказать, что $d[M] = 0$. Если $M_j$ — многообразия без особенностей, то утверждение $d[M] = 0$ означает, что аналитическое множество $M$ не имеет относительно компактных компонент.

Нам понадобится формула Пуанкаре–Лелона: если $F$ голоморфна в $D$ и $M_F$ — множество её нулей, то (см. [27], а также [11], стр. 20)

$$\frac{1}{2\pi} dd^c \ln|F| = [M_F], \tag{1.3}$$



равенство понимается как равенство двух потоков. Если $n = 1$ и $F = z$, то равенство (1.3) переходит в известное утверждение о том, что $\ln|z|$ — фундаментальное решение уравнения Лапласа. Отметим, что если каждая компонента аналитического множества $M_F$ — многообразие без особенностей, то главная часть доказательства (1.3) — отмеченный частный случай равенства (1.3) (см. [11], стр. 21).

Теперь докажем, что если $M$ — аналитическое множество, являющееся множеством нулей функции, голоморфной в $D$, то для любого решения $u$ уравнения

$$\frac{1}{2\pi} dd^c u = [M] \tag{1.4}$$

найдётся голоморфная в $D$ функция $\Phi$, для которой $M_\Phi = M$ и $u = \ln|\Phi|$. В самом деле, по условию $M = M_F$ для некоторой голоморфной в $D$ функции $F$, то вычитая (1.3) из (1.4), получим, что $dd^c(u - \ln|F|) = 0$. Это в точности означает, что $u - \ln|F|$ плюригармонична в $D$, т.е. $u - \ln|F| = \operatorname{Re}\psi$, и $\psi$ голоморфна в $D$. Отсюда $u = \ln|\Phi|$, где $\Phi = F \cdot \exp\psi$.

При решении уравнения (1.4) удобно следовать схеме, изложенной в [9], стр. 83. Область $D$ выпукла, поэтому найдется $g$-действительная форма степени 1, коэффициенты которой — меры, удовлетворяющая уравнению $dg = [M]$. Решение этого уравнения можно записать с помощью стандартного оператора гомотопии Пуанкаре–Картана (см., например, [17], стр. 225). Анализ этого решения (нужные рассуждения можно найти в [21]), показывает, что если форма $[M]$ удовлетворяет условию (1.2), то $g = f + \bar f$, где $f$ — поток типа (0,1) с коэффициентами — мерами, удовлетворяющий условию:

(1.5) мера $|\varrho(z)|^\alpha\big(|f(z)| + |\varrho^{-1/2}(z)|\,|f(z) \wedge \bar\partial\varrho(z)|\big)$ имеет конечную массу,

а $\bar f$ — поток, комплексно сопряженный потоку $f$.

Далее $dg = (\bar\partial + \partial)(f + \bar f) = \bar\partial f + \partial f + \overline{\partial f} + \partial\bar f = [M]$. Отсюда и из того, что потоки $\partial f$, $\overline{\partial f}$ и $[M]$ имеют тип (1,1), а потоки $\bar\partial f$ и $\partial\bar f$ — тип $(0, 2)$ и $(2, 0)$ соответственно, следует, что $\bar\partial f = 0$. Решая в выпуклой области $D$ уравнение $\bar\partial u_1 = f$ и обозначив $u = (2i)^{-1}(u_1 - \bar u_1)$, получим

$$[M] = d(f + \bar f) = \partial f + \overline{\partial f} = \partial\bar\partial u_1 + \bar\partial\partial\bar u_1 =$$

$$= \partial\bar\partial(u_1 - \bar u_1) = dd^c \frac{u_1 - \bar u_1}{2i} = dd^c u.$$

Итак, для того, чтобы решить уравнение (1.4), осталось решить уравнение $\bar\partial u_1 = f$, где $f$ — поток типа (0,1) удовлетворяющий условию (1.5). Приведем формулу для решения уравнения $\bar\partial u = f$, пригодную для правых частей $f$, имеющих рост конечного порядка около границы области.

Для строго выпуклой области $D$ положим

$$P(\zeta) = (P_1, \ldots, P_n) = \left(\frac{\partial\varrho}{\partial\zeta_1}(\zeta), \ldots, \frac{\partial\varrho}{\partial\zeta_n}(\zeta)\right),$$

$$\tilde\Phi(\zeta, z) = P_1(\zeta)(\zeta_1 - z_1) + \ldots + P_n(\zeta)(\zeta_n - z_n) - \varrho(\zeta).$$

Для потока $f$ типа (0,1), заданного в $D$, определим оператор

$$(G^k f)(z) = -\frac{(n+k)!}{k!(2\pi i)^n} \int\limits_{\substack{\zeta \in D \\ \lambda \in [0,1]}} f(\zeta) \wedge \left(-\frac{\lambda \varrho(\zeta)}{\tilde{\Phi}(\zeta, z)}\right)^k d\left((1-\lambda)\frac{\bar{\zeta}-\bar{z}}{|\zeta - z|^2} + \lambda \frac{\varrho}{\tilde{\Phi}}\right) \wedge d\zeta,$$

где $d\eta = d\eta_1 \wedge \ldots \wedge d\eta_n$.

Из определения оператора $G^k$ и неравенства $|\tilde{\Phi}(\zeta, z)| \geqslant \gamma|\varrho(z)|$, где $\gamma$ — константа, $z, \zeta \in \bar{D}$, следует, что оператором $G^k$ можно действовать на потоки $f$, удовлетворяющие условию (1.5), если $k \geqslant \alpha$.

Теорема 1.2 (Даутов–Хенкин [12]). *Пусть $D$ — строго выпуклая область в $C^n$ и пусть $\bar{\partial}$ — замкнутый поток $f$ типа (0,1) и число $\alpha > 0$ таковы, что выполняется условие* (1.5). *Тогда при любом $k > \alpha$ функция $u_k = G^k f$ удовлетворяет в $D$ уравнению $\bar{\partial} u = f$, причем*

$$\int\limits_D |u_k(z)|\,|\varrho(z)|^{\alpha-1} d\sigma_{2n} < \infty.$$

Отметим, что описание множества нулей функций класса Неванлинны было дано ранее в работах [20], [21], [30]. В работе [12] теоремы 1.1 и 1.2 перенесены на строго псевдовыпуклые многообразия.

## 2. Формулы многомерного логарифмического вычета и некоторые их приложения

1°. *Многомерные аналоги логарифмического вычета дают число нулей голоморфного отображения в $C^n$.* Так же, как формула Коши, формула логарифмического вычета допускает много обобщений на многомерный случай, различающихся как размерностью множества интегрирования, так и видом подинтегрального выражения (см., например, [25], [2]). Наибольший интерес представляют формулы „обобщенного" логарифмического вычета, содержащие весовую функцию и включающие в себя как частный случай интегральные представления голоморфных функций. Укажем некоторые из них.

Теорема 2.1 (Айзенберг [2]). *Пусть $D$ — ограниченная область в $C^n$ с кусочно гладкой границей, отображение $f\colon \bar{D} \to C^n$, голоморфное на $\bar{D}$, не имеет нулей на $\partial D$, и вектор-функции $w^j\colon \partial D \to C^n$, $j = 1, \ldots, n$, гладкие на $\partial \bar{D}$, удовлетворяют условию $\langle w^j(z), f(z)\rangle = w_1^j(z)f_1(z) + \ldots + w_n^j(z)f_n(z) \neq 0$ на $D$. Тогда для любой функции $\varphi$, голоморфной в $D$ и непрерывной на $\bar{D}$,*

$$\int\limits_{\partial D} \varphi \Omega(w^1, \ldots, w^n, f) = \sum_{a \in E_f} \mu_a(f)\varphi(a), \tag{2.1}$$

*где*

$$\Omega(w^1, \ldots, w^n, f) = \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(2\pi i)^n} \frac{\langle w^1, df\rangle}{\langle w^1, f\rangle} \wedge d\,\frac{\langle w^2, df\rangle}{\langle w^2, f\rangle} \wedge \ldots \wedge d\,\frac{\langle w^n, df\rangle}{\langle w^n, f\rangle};$$

*$E_f$ — множество нулей отображения $f$ в области $D$, $\mu_a(f)$ — кратность нуля $a \in E_f$ (степень отображения $f$ в точке $a$).*



При $w^j = w$ и $f = z-a$ формула (2.1) превращается в интегральное представление Коши–Фантапье.

Если положить $w^j = \bar{f}$, то формула (2.1) переходит в формулу, полученную Южаковым [24], [25], и Расом [29]

$$\int\limits_{\partial D} \varphi \cdot \omega(\bar{f}, f) = \sum_{a \in E_f} \mu_a(f)\varphi(a), \tag{2.2}$$

где

$$\omega(\bar{f}, f) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n |f|^{2n}} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \bar{f}_j d\bar{f}_1 \wedge \ldots [j] \ldots \wedge d\bar{f}_n \wedge df_1 \wedge \ldots \wedge df_n.$$

Следующая теорема содержит вариант теоремы Руше и формулы логарифмического вычета.

Теорема 2.2 (Южаков [24], [25]). *Пусть $f, g\colon G \to C^n$ — голоморфные отображения области $G \subset C^n$ и $D$ — связная компонента множества $\{z \in G\colon |f_j(z)| < \varrho_j, j = 1, \ldots, n\}$, причем $D \Subset G$. Тогда, если на остове $\Gamma = \{z \in \partial D\colon |f_j(z)| = \varrho_j, j = 1, \ldots, n\}$ области $D$ выполняются неравенства $|g_j(z) - f_j(z)| < \varrho_j$, $j = 1, \ldots, n$, то отображения $f$ и $g$ имеют в $D$ одинаковое число нулей с учетом их кратностей, и для любой функции $\varphi$, голоморфной в $D$ и непрерывной на $\bar{D}$*

$$\frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\Gamma} \varphi \frac{dg_1}{g_1} \wedge \ldots \wedge \frac{dg_n}{g_n} = \sum_{b \in E_g \cap D} \mu_b(g)\varphi(b). \tag{2.3}$$

В основе доказательства теоремы 2.2 лежат 2 утверждения.

Лемма. *В условиях теоремы 2.2 цикл $\Gamma$ гомологичен циклу $\gamma_\varepsilon = \{z \in D\colon |g_1(z)| = \ldots = |g_n(z)| = \varepsilon\}$ при достаточно малых $\varepsilon > 0$.*

Теорема 2.3 (Мартинелли [28], Сорани [31]). *Пусть отображение $f\colon G \to C^n$, голоморфное в области $G \subset C^n$, имеет дискретное множество нулей в $G$, и цикл $\gamma$ гомологичен циклу $\sum_{a \in E_f} n_a \gamma_a$, где $\gamma_a = \{z \in U_a\colon |f_1(z)| = \ldots = |f_n(z)| = \varepsilon\}$, $U_a$ — окрестность точки $a \in E_f$; $\varepsilon$ — достаточно малое число, $n_a$ — целые числа. Тогда для любой функции $\varphi$, голоморфной в $G$,*

$$\frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\gamma} \varphi \frac{df_1}{f_1} \wedge \ldots \wedge \frac{df_n}{f_n} = \sum_{a \in E_f} n_a \mu_a(f)\varphi(a).$$

Цикл $\gamma$, гомологичный сумме $\sum_{a \in E_f} n_a \gamma_a$, называется циклом, разделяющим аналитические множества $T_j = \{z \in G\colon f_j(z) = 0\}$, $j = 1, \ldots, n$. В [28], [31] отмечено, что цикл, разделяющий множества $T_1, \ldots, T_n$, гомологичен 0 в $G \setminus (T_1 \cup \ldots [j] \ldots \cup T_n)$, $j = 1, \ldots, n$. В самом деле, цикл $\gamma_a$ является границей цепи $\sigma_a^j = \{|f_k(z)| = \varepsilon$ при $k \neq j$ и $|f_j(z)| < \varepsilon\}$. Следующая теорема показывает, что это необходимое условие является и достаточным.

Теорема 2.4 (Цих [22]). *Если $G$ — область голоморфности, то $n$-мерный цикл $\gamma$, лежащий в $G\setminus T_1\cup \ldots \cup T_n$, разделяет аналитические множества $T_1, \ldots, T_n$ тогда и только тогда, когда он гомологичен 0 в $G\setminus(T_1\cup \ldots [j] \ldots \cup T_n)$, $j = 1, \ldots, n$.*

2°. Покажем как можно использовать формулу многомерного логарифмического вычета для решения нелинейных систем уравнений. Рассмотрим систему уравнений

$$f_j(z) = 0, \quad j = 1, \ldots, n, \quad z \in D. \tag{2.4}$$

Здесь функции $f_j$ голоморфны на $\bar D$ и не имеют общих нулей на $\partial D$. Подставляя в формулы (2.1) и (2.2) последовательно $\varphi = 1$, $\varphi = z_1$, $\varphi = z_1^2, \ldots$, можно найти, во-первых, число корней системы (2.4) с учетом их кратностей (при $\varphi = 1$) и, во-вторых, степенные суммы вида $s_j = \sum_{a \in E_f} (a_1)^j$. С помощью рекуррентных формул Ньютона можно найти коэффициенты многочлена $\Omega(z_1)$, корнями которого являются первые координаты корней системы (2.4). Таким образом, найдя многочлен $\Omega(z_1)$, мы исключаем все неизвестные кроме одного, причем корни не добавляются и не исчезают. Отметим, что формула (2.1) содержит произвол в выборе вектор-функций $w^j$. В некоторых случаях этот произвол можно использовать и подобрать подходящие $w^j$ так, чтобы интегралы в (2.1) удалось вычислить точно.

Рассмотрим систему алгебраических уравнений

$$Q_j(z)+P_j(z) = 0, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{2.5}$$

где $Q_j$ — однородные многочлены степени $k_j$, имеющие только один корень — начало координат, $P_j$ — многочлены степени меньше $k_j$, $j = 1, \ldots, n$. Используя теорему 2.2, можно показать, что система (2.5) имеет в $C^n$ конечное число корней. Пусть $m_1, \ldots, m_n$ такие натуральные числа, что уравнение

$$\sum_{j=1}^{n} w_j Q_j = \sum_{j=1}^{n} |z_j|^{2m_j} \tag{2.6}$$

имеет решение вида

$$w_j = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}(z)\bar z_k^{m_k}, \quad j = 1, \ldots, n,$$

где $a_{jk}$ — многочлены от $z$. По известной теореме Мэколея указанному условию заведомо удовлетворяют $m_j = k_1 + \ldots + k_n - n + 1$, но иногда $m_j$ можно выбрать меньшими. Решение системы (2.6) можно найти методом неопределенных коэффициентов. Найденную вектор-функцию $w$ можно использовать в формуле (2.1). В качестве области $D$ берется область $B_r^{(m)} = \{z \in C^n: |z_1|^{2m_1} + \ldots + |z_n|^{2m_n} < r^2\}$.



Теорема 2.5 (Айзенберг [2]). *Пусть $R$ — многочлен степени $\mu$, тогда*

$$\sum_{l} R(z^{(l)}) = \mathfrak{M}\left[R\Delta_1\Delta_2 \sum_{j=0}^{\mu} \frac{(-1)^j}{j!}\langle w, P\rangle^j\right], \tag{2.7}$$

*где суммирование в левой части (2.7) ведется по всем корням $z^{(l)}$ системы (2.5), $\Delta_1$ — якобиан системы (2.5); $\Delta_2 = \det||a_{jk}||$; $\mathfrak{M}$ — линейный функционал на многочленах от $z_1, \ldots, z_n$, $\bar z_1^{m_1}, \ldots, \bar z_n^{m_n}$, заданный равенством*

$$\mathfrak{M}(z_1^{\beta_1}\ldots z_n^{\beta_n}\bar z_1^{m_1\alpha_1}\ldots \bar z_n^{m_n\alpha_n}) = \begin{cases} \alpha_1!\ldots\alpha_n! & \textit{при} \quad \beta_j = m_j\alpha_j+m_j-1,\ j = 1, \ldots, n, \\ 0 & \textit{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Для доказательства заметим, что при достаточно больших $r$ все корни системы (2.5) лежат в $B_r^{(m)}$. Подставим в формулу (2.1) $w^j = w$, после преобразования подинтегрального выражения получим

$$\sum_{l} R(z^{(l)}) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\int_{\partial B_r^{(m)}} \frac{R\Delta_1\Delta_2}{(r^2+\langle w, P\rangle)^n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\bar z_k^{m_k}\times$$
$$\times d\bar z_1^{m_1}\wedge \ldots [k] \ldots \wedge d\bar z_n^{m_n}\wedge dz_1\wedge \ldots \wedge dz_n.$$

Нетрудно показать, что при достаточно больших $r$ на $\partial B_r^{(m)}$ выполняется неравенство $r^2 > |\langle w, P\rangle|$. Используя это, разложим функцию $(r^2+\langle w, P\rangle)^{-n}$ в ряд по $\langle w, P\rangle$ и поменяем местами суммирование и интегрирование. Прямое вычисление полученных интегралов дает формулу (2.7).

Особенно простой вид формула (2.7) принимает в случае системы

$$z_j^{k_j}+P_j(z) = 0, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{2.8}$$

где степень многочленов $P_j$ меньше $k_j$, $j = 1, \ldots, n$. Здесь можно взять $m_j = k_j$, тогда $w_j = \bar z_j^{k_j}$ и $\Delta_2 = 1$.

Теорема 2.6 (Айзенберг [2]). *Для системы (2.8) и многочлена $R$ степени $\mu$ справедлива формула*

$$\sum_{l} R(z^{(l)}) = \mathfrak{N}\left[\frac{R\Delta_1}{z_1^{k_1-1}\ldots z_n^{k_n-1}}\sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_n=0}^{\mu}(-1)^{\alpha_1+\ldots+\alpha_n}\left(\frac{P_1}{z_1^{k_1}}\right)^{\alpha_1}\ldots\left(\frac{P_n}{z_n^{k_n}}\right)^{\alpha_n}\right]; \tag{2.9}$$

*суммирование в левой части (2.9) производится по всем корням системы (2.8), $\mathfrak{N}$ — линейный функционал на многочленах Лорана (т.е. многочленах от $z_1, \ldots, z_n$, $1/z_1, \ldots, 1/z_n$), который многочлену Лорана ставит в соответствие его свободной член.*

Теоремы 2.5 и 2.6 приводят к методу исключения неизвестных, который в некоторых ситуациях может применяться более просто и эффективно, чем известный классический метод исключения, использующий результанты многочленов. В [4] формула (2.9) перенесена на многочлены более сложного вида, чем (2.8), а также на многочлены, у которых выделяется не однородная, а взвешенно однородная главная часть. В [5] показаны приемы, позволяющие с помощью формул (2.7) и (2.9) находить число действительных корней или число действительных корней, лежащих в заданном эллипсоиде, для системы, имеющей действительные коэффициенты. Следует отметить, что эта методика уже нашла применение к решению систем алгебраических уравнений, возникшых в химии и биологии.

3°. Здесь будут приведены приложения кратного логарифмического вычета к разложению неявных функций многих переменных в функциональные ряды, являющиеся обобщением известных рядов Лагранжа в случае одного комплексного переменного.

Пусть $\Phi(w, z)$ и

$$F_j(w, z), \quad j = 1, \ldots, n, \tag{2.10}$$

— голоморфные функции переменных $w \in \boldsymbol{C}^m$ и $z \in \boldsymbol{C}^n$ в окрестности точки $(0, 0) \in \boldsymbol{C}^{m+n}$, удовлетворяющие условию

$$F_j(0, 0) = 0; \quad \frac{\partial F_j(0, 0)}{\partial z_k} = \delta_{jk}, \quad j, k = 1, \ldots, n. \tag{2.11}$$

В этих обозначениях справедлива

Теорема 2.7 (Южаков [23], [24]). *Функция $\Psi = \Phi(w, \varphi(w))$ где $z = \varphi(w)$ — неявная вектор-функция, определяемая системой уравнений*

$$F_j(w, z) = 0, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{2.12}$$

*в окрестности точки $0 \in \boldsymbol{C}^m$ представляется абсолютно и равномерно сходящимся функциональным рядом*

$$\Psi(w) = \sum_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n} \frac{(-1)^{\alpha_1+\ldots+\alpha_n}}{\alpha_1! \ldots \alpha_n!} \frac{\partial^{\alpha_1+\ldots+\alpha_n}}{\partial z_1^{\alpha_1} \ldots \partial z_n^{\alpha_n}} \Bigg[\Phi(w, z) \times \\ \times g_1^{\alpha_1}(w, z) \cdot \ldots \cdot g_n^{\alpha_n}(w, z) \frac{\partial F}{\partial z}\Bigg]\Bigg|_{z=h(w)}, \tag{2.13}$$

*где $g_j(w, z) = F_j(w, z) - z_j + h_j(w)$, $h = (h_1, \ldots, h_n)$ — произвольная вектор-функция, голоморфная в окрестности точки $(0, 0)$ и $\dfrac{\partial F}{\partial z}$ — якобиан отображения* (2.10).

*Доказательство.* Из (2.11) следует, что найдутся такие числа $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$, что при $w \in U_\delta = \{w \in \boldsymbol{C}^m\colon |w_j| < \delta, \ j = 1, \ldots, m\}$ и $z \in \Gamma = \{z \in \boldsymbol{C}^n\colon |z_j| = \varepsilon, \ j = 1, \ldots, n\}$ выполняются неравенства

$$|g_j(w, z)| < |z_j - h_j(w)|, \quad j = 1, \ldots, n.$$



Тогда по теореме 2.2 в $U_\delta$ существует неявная вектор-функция $z = \varphi(w)$, определяемая системой (2.12), и справедлива формула

$$\Psi(w) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\Gamma} \frac{\Phi(w, z) \dfrac{\partial F}{\partial z} dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_n}{F_1(w, z) \cdot \ldots \cdot F_n(w, z)}.$$

Раскладывая в этой формуле дробь

$$\frac{1}{F_1 \cdot \ldots \cdot F_n} = \frac{1}{[z_1 - h_1(w) - g_1(z, w)] \cdot \ldots \cdot [z_n - h_n(w) - g_n(z, w)]}$$

в ряд кратной геометрической прогрессии, получим (2.13).

При $m = n$, $F_j(w, z) = w_j - f_j(z)$, $h_j(w) = w_j$, $j = 1, \ldots, n$, из (2.13) как следствие получаем обобщение разложения Лагранжа для обращения голоморфного отображения.

Исходя из многомерного аналога леммы Шварца, нетрудно получить оценку области сходимости ряда (2.13). В частности, если функции $F_j$, $j = 1, \ldots, n$, и $\Phi$ голоморфны в поликруге $U_{r,R} = \{(w, z) \in \boldsymbol{C}^{m+n}\colon |w_k| < r, \ k = 1, \ldots, m$ и $|z_j| < R, \ j = 1, \ldots, n\}$, и $\partial F_j(0, 0)/\partial w_k = 0$, то при $h(w) \equiv 0$ ряд (2.13) сходится в поликруге $\{w \in \boldsymbol{C}^m\colon |w_j| < \varrho, \ j = 1, \ldots, m\}$, где $\varrho = \min\{r, rR/M\}$, $M = \max\{|g_j(w, z)|;\ j = 1, \ldots, n, \ (w, z) \in U_{r,R}\}$.

В [24] также дана формула, выражающая однозначную ветвь голоморфной неявной вектор-функции, определяемой системой (2.12) в случае, когда якобиан этой системы обращается в 0.

Болотовым и Южаковым [9] указаны формулы, выражающие коэффициенты ряда Тейлора функции $\Phi(w, \varphi(w))$ через коэффициенты Тейлора функций $F_j$, $j = 1, \ldots, n$, и $\Phi$.

В книге Егорычева [15] рассмотрены применения кратных вычетов к вычислению производящих функций и комбинаторных сумм. В частности, приводится следующее обобщение главной теоремы Мак-Магона.

Теорема 2.8 (Егорычев–Южаков [15], [16]). *Пусть члены $n$-кратной числовой последовательности $\{c_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n}\}$ можно представить в виде*

$$c_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n} = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\varphi(z)[f_1(z)]^{\alpha_1\beta_1} \cdot \ldots \cdot [f_n(z)]^{\alpha_n\beta_n} dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_n}{z_1^{\beta_1(\alpha_1+1)} \cdot \ldots \cdot z_n^{\beta_n(\alpha_n+1)}},$$

*где $\varphi$, $f_1, \ldots, f_n$ — голоморфные функции, $\Gamma_\varepsilon = \{z\colon |z_j| = \varepsilon, \ j = 1, \ldots, n\}$. Тогда производящая функция последовательности $\{c_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n}\}$*

$$F(t) = \sum_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n} c_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n} t_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot t_n^{\alpha_n}$$

*выражается интегралом*

$$F(t) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\varphi(z) dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_n}{[z_1^{\beta_1} - t_1 f_1^{\beta_1}(z)] \cdot \ldots \cdot [z_n^{\beta_n} - t_n f_n^{\beta_n}(z)]}.$$

*Если* $\beta_1 = \ldots = \beta_n = 1$, *то*

$$F(t) = \frac{\varphi(z)}{\det\left\|\delta_{jk} - t_j \dfrac{\partial f_j(z)}{\partial z_k}\right\|}\Bigg|_{z=z(t)},$$

*где* $z = z(t)$ — *решение системы уравнений* $z_j - t_j f_j(z) = 0$, $j = 1, \ldots, n$.

*Если* $f_j(0) = 0$, *то*

$$F(t) = \sum_\alpha \frac{\varphi(z)}{\dfrac{\partial w}{\partial z}(z)}\Bigg|_{z=z_\alpha(t)};$$

*здесь*

(2.14) $$w_j = z_j^{\beta_j} - t_j f_j^{\beta_j}(z), \quad j = 1, \ldots, n,$$

$z_\alpha(t)$ — *нули отображения* (2.14), *лежащие в окрестности точки* $0 \in \boldsymbol{C}^n$.

Теорема 2.8 доказывается аналогично теореме 2.2.

## 3. Голоморфность функций, представимых интегралом Мартинелли–Бохнера

Пусть $D$ — ограниченная область в $\boldsymbol{C}^n$ с кусочно гладкой границей. Хорошо известно, что всякую функцию $f$, голоморфную в $D$ и непрерывную на $\overline{D}$, можно представить по формуле Мартинелли–Бохнера

(3.1) $$f(z) = \int_{\partial D} f(\zeta)U(\zeta, z), \quad z \in D,$$

где

$$U(\zeta, z) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1}\frac{\overline{\zeta}_k - \overline{z}_k}{|\zeta - z|^{2n}}\, d\overline{\zeta}_1 \wedge \ldots [k] \ldots \wedge d\overline{\zeta}_n \wedge d\zeta_1 \wedge \ldots \wedge d\zeta_n.$$

Ядро Мартинелли–Бохнера $U(\zeta, z)$ не голоморфно, а гармонично по $z$. Поэтому естественно возникает задача: описать класс гармонических функций $f$, представимых в области $D$ по формуле (3.1). Неожиданно оказалось, что этот класс совпадает с классом голоморфных функций.

Теорема 3.1 (Аронов [6], Аронов–Кытманов [7], Кытманов–Айзенберг [18]). *Если функция* $f\colon \overline{D} \to \boldsymbol{C}$ *удовлетворяет условию* (3.1), *то* $f$ *голоморфна в каждом из случаев*

1. $D$ — *область с кусочно гладкой границей и* $f$ *непрерывно дифференцируема на* $\overline{D}$;
2. $D$ — *область с дважды гладкой границей и* $f$ *непрерывна на* $\overline{D}$.

Приведем доказательство пункта 1 теоремы 3.1. Доказательство пункта 2 усложнено техническими трудностями, связанными с тем, что $f$ только непрерывна. Стандартными методами нетрудно показать, что скачок интеграла типа Мартинелли–Бохнера (так же, как и интеграла типа Коши) для произвольной функции $F$, непрерывно дифференцируемой на $\partial D$, равен $F$. Точнее, если обозначить



$$\int_{\partial D} F(\zeta)U(\zeta, z) = \begin{cases} F^+(z), & \text{при} \quad z \in D;\\ F^-(z), & \text{при} \quad z \notin \overline{D},\end{cases}$$

то функции $F^\pm$ непрерывно продолжаются на $\partial D$ и

(3.2) $$F^+(z) - F^-(z) = F(z), \quad z \in \partial D.$$

Так как для нашей функции $f^+ = f$, то по формуле (3.2) $f^-|_{\partial D} = 0$, а следовательно

(3.3) $$f^-(z) \equiv 0, \quad z \in \boldsymbol{C}^n \setminus \overline{D},$$

потому что $f^-$ гармонична в $\boldsymbol{C}^n \setminus \overline{D}$ и $\lim\limits_{|z|\to\infty} f^-(z) = 0$.

Поскольку $f$ гармонична в $D$, то для нее справедлива формула Грина. Нам она понадобится в комплексной записи

(3.4) $$\int_{\partial D} f(\zeta)U(\zeta, z) - \frac{(n-2)!}{(2\pi i)^n}\cdot\frac{\mu_f(\zeta)}{|\zeta - z|^{2n-2}} = \begin{cases} f(z), & z \in D,\\ 0, & z \notin \overline{D},\end{cases}$$

где

$$\mu_f(\zeta) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+n}\frac{\partial f}{\partial \overline{\zeta}_k}\, d\zeta_1 \wedge \ldots [k] \ldots \wedge d\zeta_n \wedge d\overline{\zeta}_1 \wedge \ldots \wedge d\overline{\zeta}_n.$$

Из (3.1)–(3.4) следует, что

(3.5) $$\int_{\partial D} \frac{\mu_f(\zeta)}{|\zeta - z|^{2n-2}} = 0, \quad z \notin \partial D.$$

По известной теореме Келдыша–Лаврентьева линейное многообразие, порождаемое функциями вида $\zeta \to \dfrac{1}{|\zeta - z|^{2n-2}}$, $\zeta \in \partial D$, $z \notin \partial D$, плотно в пространстве функций, непрерывных на $\partial D$. Поэтому из (3.5) имеем

$$\mu_f(\zeta)|_{\partial D} = 0.$$

Отсюда по формуле Стокса, пользуясь гармоничностью функции $f$, получим

$$0 = \int_{\partial D} \overline{f}(\zeta)\mu_f(\zeta) = \int_D d\overline{f} \wedge \mu_f = (-1)^{n-1}\int_D \sum_{k=1}^n \left|\frac{\partial f}{\partial \overline{\zeta}_k}\right|^2 d\zeta \wedge d\overline{\zeta}.$$

Это равенство влечет голоморфность $f$.

Из формулы (3.2) для скачка интеграла типа Мартинелли–Бохнера следует, что пункт 2 теоремы 3.1 эквивалентен следующему утверждению.

Теорема 3.2 (Кытманов–Айзенберг [18]). *Пусть $D$ — область в $C^n$ с дважды гладкой границей и функция $F$ непрерывна на $\partial D$, тогда если*

$$\int_{\partial D} F(\zeta)U(\zeta, z) = 0, \quad z \notin \overline{D}, \tag{3.6}$$

*то существует функция $f$, непрерывная на $\overline{D}$ и голоморфная в $D$, сужение которой на $\partial D$ совпадает с $F$.*

Теорема 3.2 усиливает известные интегральные критерии Виноградова [10] и Вайнстока [33] о существовании голоморфного продолжения функции, заданной на границе области. В теореме Вайнстока для существования такого продолжения требуется ортогональность функции $F$ всем $\bar\partial$-замкнутым формам типа $(n, n-1)$, а не только ядрам $U(\zeta, z)$; а в теореме Виноградова кроме условия, эквивалентного (3.6), используется ортогональность $F$ формам вида

$$d\frac{1}{|\zeta-z|^{2n-2}} \wedge d\bar\zeta_1 \wedge \ldots [k, m] \ldots \wedge d\bar\zeta_n \wedge d\zeta_1 \wedge \ldots \wedge d\zeta_n, \quad z \notin \partial D.$$

Приведем еще одно утверждение, полученное первоначально в [26].

Следствие 3.1 (Фолланд–Кон [26], Аронов–Кытманов [7]). *Пусть $D$ — область с гладкой границей и функция $f$ непрерывно дифференцируема на $\overline{D}$ и гармонична в $D$. Тогда если*

$$N_f = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \bar\zeta_k} \frac{\partial \varrho}{\partial \zeta_k} = 0$$

*на $\partial D$, то $f$ голоморфна в $D$.*

Доказательство немедленно следует из того, что

$$\mu_f|_{\partial D} = \frac{1}{|\operatorname{grad} \varrho|} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \bar\zeta_k} \frac{\partial \varrho}{\partial \zeta_k} d\sigma = \frac{N_f d\sigma}{|\operatorname{grad} \varrho|},$$

где $d\sigma$ — элемент поверхности $\partial D$.

$N_f$ можно назвать „производной функции $f$ вдоль комплексной нормали к $\partial D$". В [26] равенство $N_f = 0$ названо $\bar\partial$-условием Неймана.

Покажем теперь, как из теоремы 3.2 можно вывести один результат Стоута [32]. Для шара в $C^n$ это утверждение получено Аграновским и Вальским [1].

Пусть $D$ — ограниченная область с гладкой границей и функция $f$ непрерывна на $\partial D$. Будем говорить, что $f$ *обладает одномерным свойством голоморфного продолжения*, если для любой комплексной прямой $l$ сужение $f_l = f|_{\partial D \cap l}$ продолжается до функции, непрерывной на $\overline{D} \cap l$ и голоморфной во внутренних точках $\overline{D} \cap l$.

Следствие 3.2 (Стоут [32], Аграновский-Вальский [1]). *Если $D$ — область с дважды гладкой границей, а $f$ непрерывна на $\partial D$ и обладает одномерным свойством голоморфного продолжения, то $f$ голоморфно продолжается в $D$.*



Пусть $z$ лежит в неограниченной компоненте дополнения к области $D$. Сделаем ортогональное преобразование и сдвиг так, чтобы точка $z$ перешла в 0, и плоскость $\{z\colon z_1 = 0\}$ не пересекала $\overline{D}$. Это можно сделать для точек, достаточно удаленных от $D$. При этом ядро $U(\zeta, z)$ перейдет в $U(\zeta, 0)$. Произведем замену переменных: $\zeta_1 = v_1^{-1}$, $\zeta_j = v_j v_1^{-1}$, $j = 2, \ldots, n$. Нетрудно подсчитать, что

$$U(\zeta, 0) = a_n \frac{dv_1}{v_1} \wedge \frac{d\bar v[1] \wedge dv[1]}{(1+|v_2|^2+ \ldots +|v_n|^2)^n} = \frac{dv_1}{v_1} \wedge \lambda(v');$$

здесь $v' = (v_2, \ldots, v_n)$. При рассматриваемой замене прямые $\{\zeta\colon \zeta_1 = t, \zeta_2 = c_2 t, \ldots, \zeta_n = c_n t\}$ переходят в прямые $\{v\colon v_2 = c_2, \ldots, v_n = c_n\}$, граница области $D$ перейдет в некоторый цикл $\Gamma$. Если $f$ обладает одномерным свойством голоморфного продолжения, то после замены переменных эта функция (теперь ее обозначим $\tilde f$) будет обладать одномерным свойством голоморфного продолжения вдоль комплексных прямых $\{v\colon v_2 = c_2, \ldots, v_n = c_n\}$. Далее

$$\int_{\partial D} f(\zeta)U(\zeta, 0) = \int_{\Gamma} \tilde f(v) \frac{dv_1}{v_1} \wedge \lambda(v') = \int_{\pi(\Gamma)} \lambda(v') \int_{\pi^{-1}(v') \cap \Gamma} \tilde f(v) \frac{dv_1}{v_1},$$

где $\pi$ — проекция $v \to v'$. Точка 0 лежит вне области, ограниченной $\Gamma$, поэтому внутренний интеграл равен 0 для почти всех $v'$. Это означает, что равенство (3.6) выполнено для $z$, принадлежащих неограниченной компоненте $C^n \setminus \overline{D}$. Применение теоремы 3.2 завершает доказательство для области $D$ со связным дополнением. В общем случае это доказательство небольшим видоизменением распространяется на все компоненты дополнения к $\overline{D}$.

В заключение хочу поблагодарить А. М. Кытманова, А. К. Циха и А. П. Южакова за помощь в подготовке обзора.

## Литература

[1] М. Л. Аграновский, Р. Е. Вальский, *Максимальность инвариантных алгебр функций*, Сиб. матем. журн. 12(1) (1971), 3–12.

[2] Л. А. Айзенберг, *Об одной формуле обобщенного многомерного логарифмического вычета и решении систем нелинейных уравнений*, Докл. АН СССР 234 (3) (1977), 505–508.

[3] Л. А. Айзенберг, Ш. А. Даутов, *Дифференциальные формы, ортогональные голоморфным функциям или формам, и их свойства*, Наука, Новосибирск, 1975.

[4] Л. А. Айзенберг, А. К. Цих, *О применении многомерного логарифмического вычета к системам нелинейных алгебраических уравнений*, Сиб. матем. журн. 20 (5) (1979).

[5] Л. А. Айзенберг, А. П. Южаков, *Интегральные представления и вычеты в многомерном комплексном анализе*, Наука, Новосибирск, 1979.

[6] А. М. Аронов, *О функциях, представимых интегралом Мартинелли–Бохнера*,

в сб. *Некоторые свойства голоморфных функций многих комплексных переменных*, ИФ СО АН СССР, Красноярск, 1973, 35–39.

[7] А. М. Аронов, А. М. Кытманов, *О голоморфности функций, представимых интегралом Мартинелли–Бохнера*, Функц. анализ и его прил. 9 (3) (1975), 83–84.

[8] В. А. Болотов, А. П. Южаков, *Обобщение формул обращения систем степенных рядов на системы неявных функций*, Матем. заметки 23 (1) (1978), 47–54.

[9] А. Вейль, *Введение в теорию кэлеровых многообразий*, ИЛ, Москва, 1961.

[10] В. С. Виноградов, *Об аналоге интеграла типа Коши для аналитических функций многих комплексных переменных*, Докл. АН СССР 178 (2) (1968), 282–285.

[11] Ф. Гриффитс, Дж. Кинг, *Теория Неванлинны и голоморфные отображения алгебраических многообразий*, Мир, Москва, 1976.

[12] Ш. А. Даутов, Г. М. Хенкин, *Нули голоморфных функций конечного порядка и весовые оценки $\bar{\partial}$-уравнения*, Матем. сб. 107 (2) (1978), 163–174.

[13] М. М. Джрбашян, *О каноническом представлении мероморфных в единичном круге функций*, Докл. АН Арм. ССР 3 (1) (1945), 3–9.

[14] —, *К проблеме представимости аналитических функций*, Сообщ. Инст. матем. и мех. АН Арм. ССР, вып. 2 (1948), 3–40.

[15] Г. П. Егорычев, *Интегральное представление и вычисление комбинаторных сумм*, Наука, Новосибирск, 1977.

[16] Г. П. Егорычев, А. П. Южаков, *О нахождении производящих функций и комбинаторных сумм с помощью многомерных вычетов*, Сиб. матем. журн. 15 (5) (1974), 1049–1061.

[17] А. Картан, *Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы*, Мир, Москва, 1971.

[18] А. М. Кытманов, Л. А. Айзенберг, *О голоморфности непрерывных функций, представимых интегралом Мартинелли–Бохнера*, Изв. АН Арм. СССР, Математика, 13 (2) (1978), 158–169.

[19] Ж. де Рам, *Дифференцируемые многообразия*, ИЛ, Москва, 1956.

[20] Г. М. Хенкин, *Решения с оценками уравнений Г. Леви и Пуанкаре–Лелона. Построение функций класса Неванлинны с заданными нулями в строго псевдовыпуклой области*, Докл. АН СССР 224 (4) (1975), 771–774.

[21] —, *Уравнение Г. Леви и анализ на псевдовыпуклом многообразии, II*, Матем. сб. 102 (1) (1977), 71–108.

[22] А. К. Цих, *О циклах, разделяющих нули аналитических функций в* $C^n$, Сиб. матем. журн. 16 (5) (1975), 1118–1121.

[23] А. П. Южаков, *Элементы теории многомерных вычетов*, Изд-во КрасГУ, Красноярск, 1975.

[24] —, *О применении кратного логарифмического вычета для разложения неявных функций в степенные ряды*, Матем. сб. 97 (2) (1975), 177–192.

[25] А. П. Южаков, А. В. Куприков, *О логарифмическом вычете в* $C^n$, в кн. *Некоторые свойства голоморфных функций многих комплексных переменных*, ИФ СО АН СССР, Красноярск, 1973, 181–191.

[26] G. B. Folland and J. J. Kohn, *The Neumann problem for the Cauchy–Riemann complex*, Ann. Math. Stud. 75 (1972).

[27] P. Lelong, *Fonctions plurisous-harmoniques et formes differentielles positive*, Gorgon, Breach, Paris 1968.

[28] E. Martinelli, *Contributi alla teoria dei residui per le funsioni di due variabili complesse*, Ann. Mat. Pura Appl., serie 4, 39 (1955), 335–343.

[29] G. Roos, *Formules integrales pour les formes differentielles sur* $C^n$, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 26 (1972), 171–179.



[30] H. Skoda, *Zéros des fonctions de la classe de Nevanlinna dans les ouverts strictement pseudo-convexes*, C. R. Acad. Sci., Paris A, 280 (1975), 633–636.

[31] G. Sorani, *Sull'indicatore logaritmico per le funsioni di piu variabili complesse*, Rend. Mat. e Appl., Roma, serie 5, 19 (1960), 130–142.

[32] E. L. Stout, *The boundary values of holomorphic functions of several complex variables*, Duke Math. J. 44 (1977), 105–108.

[33] B. M. Weinstock, *Continuous boundary values of analytic functions of several complex variables*, Proc. Amer. Math. Soc. 21 (1969), 463–466.

*Presented to the Semester*
*COMPLEX ANALYSIS*
*February 15–May 30, 1979*