COMPLEX ANALYSIS
BANACH CENTER PUBLICATIONS, VOLUME 11
PWN–POLISH SCIENTIFIC PUBLISHERS
WARSAW 1983

FONCTIONS PRESQUE HOLOMORPHES

STANČO DIMIEV

Institut de Mathématiques, Académie Bulgare des Sciences
POB 373, BG-1090 Sofia, Bulgaria

Sommaire

0. Introduction

Les fonctions presque-holomorphes apparaissent naturelement sur les variétés presque-complexes. A présent elles ne sont pas étudiées systématiquement.

Le but de cet article est de développer les propriétés générales des fonctions presque-holomorphes et de donner quelques constructions concrètes. On décrira encore le domaine d'applications possibles. C'est surtout la possibilité de developper l'analyse sur les variétés presque-hermitiennes et presque-kähleriennes non-compacts (M, g, J) (J non-integrable) en utilisant les fonctions presque-holomorphes au lieu des fonctions holomorphes, liées naturelement avec les variétés hermitiennes et kähleriennes (J integrable).

Premièrement, il s'agit d'établir l'existence de fonctions presque-holomorphes sur différentes classes de variétés presque-complexes plus larges que possible. Rappélons que d'après un résultat non-publié d'Ehresmann il n'existent pas de fonctions presque-holomorphes sur les ouverts de la sphère six-dimensionel munie de la structure presque-complexe déterminée par les nombres de Kelley.

Deuxièmement, en considérant d'abord l'espace vectoriel $\boldsymbol{R}^{2n}$ muni d'une structure presque-complexe non-intégrable et puis en prenant des images difféomorphes, on se propose de développer certaines idées d'analyse complexe pour $(\boldsymbol{R}^{2n}, J)$ et ses images difféomorphes.

1. Rappel des structures presque-complexes

Soit M une variété indéfiniment différentiable de dimension égale à $2n$. On désignera par TM le fibré tangent de M et par T_mM l'espace tangent au point $m\in M$. Une structure presque-complexe J sur M est déterminée par la donnée d'un automorphisme fibré indéfiniment différentiable $J\colon TM\to TM$, vérifiant pour tout $m\in M$ la condition $J_m^2=-I$, I étant l'identité et J_m — l'opérateur linéaire déterminé par la restriction de J sur T_mM. Dans un système de coordonés locales $(U,x=(x^k))$ de M, l'action de J_m sur T_mM s'exprime par une matrice $J(x)=\|J_q^p(x)\|$ dont les éléments $J_q^p(x)$ sont des fonctions indéfiniment différentiables sur le domain U. Comme l'opérateur J_m est un tenseur de type (1,1), la structure presque-complexe J peut être considérée comme déterminée par un champ tensoriel sur M de type (1,1), vérifiant localement la condition

$$\sum_{q=1}^{2n} J_q^k(x)J_l^q(x)=\delta_l^k \quad \text{(indice de Kroneker)}$$

pour tout $k,l=1,\ldots,2n$. La variété M munie de la structure J est dite variété presque-complexe, notée (M,J).

L'automorphisme J se prolonge sur la complexification $TM_c=TM\otimes_R C$ du fibré tangent comme un automorphisme fibré C-linéaire verifiant le méme propriété $J^2=-I$. Pour tout $m\in M$ les valeures propres de J_m sont $+i$ et $-i$. On a

(1.1) $$T^*M_c=T^*M_c^{1,0}\oplus T^*M_c^{0,1},$$

$T^*M_c^{1,0}$ étant le fibré dual du fibré vectoriel $TM_c^{1,0}$ de base M dont les fibres sont les sous-espaces $(+i)$-invariants et, respectivement, $T^*M_c^{0,1}$ étant le fibré dual du fibré vectoriel $TM_c^{0,1}$ de base M dont les fibres sont les sous-espaces $(-i)$-invariants. Pour l'espace vectoriel $\mathscr{E}_r^*$ des formes différentielles sur M à valeures complexes de degré r ($\mathscr{E}_r^*=\Gamma(M,\Lambda^rT^*M_c)$) et l'espace vectoriel $\mathscr{E}_{p,q}^*$, des formes différentielles sur M de type (p,q) ($\mathscr{E}_{p,q}^*=\Gamma(M,\Lambda^{p,q}T^*M_c)$) on a la décomposition directe

(1.2) $$\mathscr{E}_r^*=\sum_{p+q=r}\mathscr{E}_{p,q}^*.$$

Ils existent des réperes locales pour le fibré $T^*M_c^{1,0}$ grace à sa trivialité locale. Si $(w_1,\ldots,w_n)$ est un répere locale pour $T^*M_c^{1,0}$, alors $(\overline{w}_1,\ldots,\overline{w}_n)$ est un répere locale pour $T^*M_c^{0,1}$. Les composantes d'un répere locale de $T^*M_c^{1,0}$, respectivement celles de $T^*M_c^{0,1}$ sont dites formes structurales de la variété presque-complexe M. On remarquera que dw_j, $j=1,\ldots,n$, est une somme de formes de type $(0,2)$, $(1,1)$ et $(2,0)$.

Sur toute variété complexe M existe une structure presque-complexe S (appellée standarde), définie par l'opérateur "multiplication à i" $v\mapsto iv\colon T_mM\to T_mM$, $m\in M$, $v\in T_mM$. Pour tout $m\in M$ cet opérateur est definie par la matrice

$$S=\left(\begin{array}{c|c}0 & -E_n\\ \hline E_n & 0\end{array}\right),$$

E_n étant la $(n\times n)$-matrice unité. La matrice S est dite standard. On dit que la structure S est induite par la structure complexe de M, la dernière étant definie par une classe d'atlass equivalents.

Une structure presque-complexe J sur la variété indéfiniment différentiable M est dite intégrable sur M, si dans un atlas equivalent de M elle est induite par une structure complexe de M.

On rappelera qu'une structure presque-complexe est intégrable si et seulement si toute dw_j ne contient pas de composantes de type $(2,0)$. Tenseur de Nijenhuis N est par définition le champ tensoriel

(1.3) $$N(X,Y)=[X,Y]+J[JX,Y]+J[X,JY]-[JX,JY]$$

où X et Y sont des champs vectoriels sur M et $[\ ,\ ]$ est le crochet de Lie. Si la structure presque-complexe J est intégrable, on à $N\equiv 0$. D'après le théorème de Newlander–Nirenberg [1] la condition $N\equiv 0$ est aussi suffisante pour l'intégrabilité de J.

Soient (M,J_M) et (N,J_N) deux variétés presque-complexes et $F\colon M\to N$ une application de classe $\mathfrak{C}^\infty$. On dit que F est une application presque-holomorphe (ou encore presque-complexe [2]) si pour tout point $m\in M$ on a

(1.4) $$(T_mF)\circ J_{M,m}=J_{N,F(m)}\circ T_mF,$$

T_mF étant l'application linéaire tangente de F dans le point m. Si J_M et J_N sont des structures integrables (i.e. M et N sont des variétés complexes), toute application presque-holomorphe est une application holomorphe. Enfin, on remarquera que la composition de deux applications presque-holomorphes est presque-holomorphe aussi.

2. Propriétés élémentaires des fonctions presque-holomorphes

Soient (M,J) une variété presque-complexe, $f\colon M\to \boldsymbol{C}$ une fonction indéfiniment différentiable et $(w_1,\ldots,w_n)$ des formes structurales sur l'ouvert U de M. On a $df=\partial f+\overline{\partial}f$, où ∂f est une $(1,0)$-forme et $\overline{\partial}f$ est une $(0,1)$-forme sur U (i.e. pour tout point $m\in U$ on a $d_mf=\partial_mf+\overline{\partial}_mf$).

Posons

(2.1) $$\partial f=\sum_{j=1}^{n}L_j'(f)w_j \quad \text{et} \quad \overline{\partial}f=\sum_{j=1}^{n}L_j''(f)w_j,$$

où $L_j'(f)$, respectivement $L_j''(f)$, sont des coefficients indéfiniment différentiables uniquement détérminés sur U ($L_j'(f)=L_j'(f)(m)$, $L_j''(f)=L_j''(f)(m)$, $m\in U$).

Il n'est pas difficile de voir que les applications $f\mapsto L_j'(f)$, $f\mapsto L_j''(f)$ sont des opérateurs différentielles sur $\mathscr{C}^\infty(M)$.

L'opérateur conjugé $J_m^*\colon T_m^*M\to T_m^*M$ de l'opérateur J_m est defini par l'equalité $(J_m^*w)X=w(JX)$, $X\in T_mM$, $w\in T_m^*M$. Ainsi est déterminé l'automorphisme conjugé $J^*: T^*M \to T^*M$, defini par $(J^*w)X = w(JX)$, $X \in \mathfrak{X}(M)$, $w \in \mathscr{E}^*(M)$. (¹) Comme les sous-espaces $T_m^* M^{1,0}$ et $T_m^* M^{0,1}$ sont respectivement $(+i)$-invariants et $(-i)$-invariants pour l'opérateur J_m^*, on conclut qu'on a

$$J^*\partial f = i\partial f \quad \text{et} \quad J^*\bar{\partial} f = -i\bar{\partial} f,$$

et encore $J^*df = i(\partial f - \bar{\partial} f)$. Alors on obtient les formules

$$\begin{aligned} \partial f &= \tfrac{1}{2}(I - iJ^*)df, \\ \bar{\partial} f &= \tfrac{1}{2}(I + iJ^*)df. \end{aligned} \tag{2.2}$$

On dira que la fonction f: $M \to C$ est une fonction presque-holomorphe à valeures complexes sur l'ouvert $U \subset M$, si pour tout point $m \in U$ on a

$$d_m f(iX) = id_m f(X) \quad \text{pour tout vecteur tangent } X \in T_m M^{1,0}. \tag{2.3}$$

Les equalités suivantes (2.4) et (2.5) sont equivalent

$$d_m f J_m = id_m f \quad \text{pour tout } m \in U, \tag{2.4}$$

$$\bar{\partial}_m f = 0 \quad \text{ou} \quad L_j''(f)(m) = 0, \quad j = 1, \ldots, n, \quad m \in U. \tag{2.5}$$

Designons par $AH_J(U)$ l'ensemble des fonctions presque-holomorphes sur U. On voit aisement que $AH_J(U)$ est une algèbre sur C. Particulierement c'est vrai pour $AH_J(M)$.

La notion de la fonction presque-holomorphe vectorielle s'introduit de la même façon. Soit E un espace de Banach complexe. On dira que f: $M \to E$ est une fonction presque-holomorphe vectorielle à valeures dans l'espace E (brievement E-vectorielle), si pour tout point $m \in U$ on a les équalités equivalantes (2.3), (2.4) et (2.5).

Pour les fonctions presque-holomorphes E-vectorielles on peut demontrer un théorème de type Danford. Pour ce but on introduira la notion de la presque-holomorphie faible: on dira que f est une fonction presque-holomorphe E-vectorielle dans le sens faible, si pour toute forme linéaire $\varphi \in E'$ on a que $\varphi \circ f$ est une fonction presque-holomorphe à valeures complexes (E' est l'espace dual de E).

THÉORÈME (2.6). *Pour qu'une fonction f soit presque-holomorphe E-vectorielle il est necessaire et suffisante qu'elle soit presque-holomorphe dans le sens faible.*

Démonstration. Comme on a $d_m(\varphi \circ f) = \varphi \circ d_m f$ l'assertion est évidement necessaire. Inversement, si f est presque-holomorphe dans le sens faible on a (2.3) pour tout $\varphi \circ f$ et par consequence $\varphi(d_m f(iX)) = \varphi(id_m f(X))$ pour tout $\varphi \in E'$, qui implique (2.3) pour f.

COROLLAIRE. *Une application f: $U \to C^n$ est presque-holomorphe si et seulement si ses fonctions coordonnées sont des fonctions presque holomorphes à valeures complexes.*

Maintenant considerons des applications f: $M \to C^n$ pour lesquelles les différentiel df_j, $f = (f_1, \ldots, f_n)$, sont C-linéairement independants. On voit que l'application inverse f^{-1} est presque-holomorphe. En effet, il suffit de prendre en vue le théorème des fonctions implicites pour les applications indéfiniment differentiables et le fait que pour le différentiel $d_m f$, $m \in M$, on a $(d_m f)^{-1} = d_{f(m)}(f^{-1})$. Donc

$$id_m(f^{-1}) = J_{f^{-1}(f(m))} d_m(f^{-1}),$$

qui suit de (2.4). Le théorème suivant appartient à R. Hermann [3].

THÉORÈME (2.7). *Pour que la structure J de la variété presque-complexe (M, J) soit integrable il est necessaire et suffisant que la condition suivante soit remplie:*

pour tout point $m \in M$, il exist un voisinage U du point m et n fonctions presque-holomorphes f_j: $U \to C$, $j = 1, \ldots, n$, pour lesquelles les différentiels df_j sont C-linéairement independantes.

Démonstration. Si J est integrable, elle est induite par une structure complexe et pour les fonctions cherchées on peut prendre les fonctions de tout système de coordonnées locales de la structure complexe en question. Inversement, designons par F_U l'application déterminée par les fonctions f_j: $U \to C$ correspondantes au point $m \in U$. D'après le corollaire de (2.6) l'application F_U est presque-holomorphe. Comme l'application inverse $F_{U_1}^{-1}$: $F(U_1) \to M$ est aussi presque-holomorphe, si $m \in U_1 \cap U_2$ on a que $F_{U_2} \circ F_{U_1}^{-1}$ est une application presque-holomorphe entre les domaines $F(U_1)$ et $F(U_2)$ de C^n, donc c'est une application holomorphe. Les couples (U, F_U) forment un atlas de M déterminant une structure complexe.

3. Fonctions presque-pluriharmoniques [4]

Les formules (2.2) peut être ecrites sous la forme equivalente suivante

$$\begin{aligned} \partial f &= \frac{1}{2}(Idu + J^*dv) + \frac{i}{2}(Idv - J^*du), \\ \bar{\partial} f &= \frac{1}{2}(Idu - J^*dv) + \frac{i}{2}(Idv + J^*du), \end{aligned} \tag{3.1}$$

où la fonction u est la partie réelle de f et v est sa partie imaginaire ($f = u + iv$). Alors la condition (2.5) est equivalante au système

$$du = J^*dv, \quad dv = -J^*du, \tag{3.2}$$

qui donne une autre forme de la définition de fonction presque-holomorphe. Avec la condition $J^2 = -I$ et par consequence $(J^*)^2 = -I$, les deux equations ci-dessus ne sont pas independants. Inversement, si l'on a ces deux equations, on recoit la condition $(J^*)^2 = -I$.

Une consequence immediat de (3.2) est la suivante: si la fonction $f = u + iv$ est presque-holomorphe on a

$$dJ^*du = dJ^*dv = 0.$$

On dira qu'une fonction à valeures réelles de classe $\mathfrak{C}^2$ est une fonction presque-pluriharmonique sur la variété presque-complexe (M, J), si l'on a

$$dJ^*du = 0. \tag{3.3}$$

On verra qu'inversement, si u est une fonction presque-pluriharmonique sur (M, J), alors u est partie réelle d'une fonction presque-holomorphe sur (M, J).

(¹) $\mathfrak{X}(M)$ est l'algèbre des shamps vectoriels sur M, $\mathscr{E}^*(M)$ est l'espace vectoriel des formes différentielles sur M, $\mathscr{E}^*(M) = \sum \mathscr{E}_r^*(M)$.

En effet, si (3.3) est remplie, la 1-forme J^*du est fermé et d'après la lemme de Poincaré il existe localement une fonction v de classe $\mathfrak{C}^2$ pour laquelle on a $dv = -J^*du$. Comme on recoit encore que $J^*dv = du$, en vue de la deuxième formule de (3.1) on obtient $\bar{\partial}(u+iv) = 0$, ou que la fonction $u+iv$ est presque-holomorphe.

Pour une structure J intégrable on a

$$dJ^*du = i\partial\bar{\partial}u,$$

qui montre que l'opérateur dJ^*d est une géneralisation de l'opérateur de Laplace.

Ayant en vue la representation matricielle de la structure J dans un système de coordonés locales $(U, x = (x^k))$ de (M, J) on peut trouver l'expression locale de la 2-forme dJ^*du. Comme on a

$$(3.4)\qquad J^*dx^p = \sum_{q=1}^{2n} J_q^p dx^q \quad \text{et} \quad J^*du = \sum_{p,q=1}^{2n} J_q^p \partial u/\partial x^p dx^q$$

on peut calculer qu'on a

$$(3.5)\qquad dJ^*du = \sum_{s,q=1}^{2n} \Big(\sum_{p=1}^{2n} \partial(J_q^p \partial u/\partial x^p)/\partial x^s\Big) dx^s \wedge dx^q.$$

THÉORÈME (3.6). *Toute fonction presque-pluriharmonique sur la variété presque-complexe (M, J) vérifie localement une equation différentielle élliptique de deuxième ordre.*

Démonstration. [2] Ayant en vue (3.5) on voit que l'equation (3.3) est equivalent au système suivant

$$\sum_{p=1}^{2n} \partial(J_q^p \partial u/\partial x^p)/\partial x^s = \sum_{p=1}^{2n} \partial(J_s^p \partial u/\partial x^p)/\partial x^q, \qquad s, q = 1, \ldots, 2n.$$

Du système ci-dessus il suit qu'on a encore

$$\sum_{s,p=1}^{2n} (J_q^s J_q^p + \delta_q^s \delta_q^p)\, \partial^2 u/\partial x^s \partial x^p + \\ + \sum_{s,p=1}^{2n} J_q^s \partial u/\partial x^p (\partial J_q^s/\partial x^s - \partial J_s^p/\partial x^q) = 0, \qquad q = 1, \ldots, 2n.$$

En effet, il suffit, après une différentiation, de multiplier le système de deuxième ordre obtenu par J_q^s et après la sommation par rapport de l'indice s de prendre en vue qu'on a

$$\sum_{s,p=1}^{2n} \delta_q^s \delta_q^p \partial^2 u/\partial x^s \partial x^p = -\sum_{s,p=1}^{2n} J_q^s J_s^p \partial^2 u/\partial x^q \partial x^p.$$

Enfin, après la sommation par rapport de l'indice q on recoit l'equation unique

$$(3.7)\qquad \sum_{q,s,p=1}^{2n} (J_q^s J_q^p + \delta_q^s \delta_q^p)\, \partial^2 u/\partial x^s \partial x^p + \sum_{q,s,p=1}^{2n} J_q^s \partial u/\partial x^p (\partial J_q^s/\partial x^s - \partial J_s^p/\partial x^q) = 0.$$

[2] La démonstration exposée est inspirée par [5].

On verra que (3.7) est une equation éliptique. Pour ce but on désignera par A_{sp} la somme $\sum_{q=1}^{2n} (J_q^s J_q^p + \delta_q^s \delta_q^p)$. Comme on a

$$\sum_{s,p=1}^{2n} A_{sp} \xi_s \xi_p = \sum_{q=1}^{2n} \Big(\sum_{s=1}^{2n} J_q^s \xi_s\Big)^2 + \sum_{q=1}^{2n} \Big(\sum_{s=1}^{2n} \delta_q^s \xi_s\Big)^2 \geqslant \sum_{q=1}^{2n} \xi_q^2$$

on conclut que la forme quadratique $\sum_{s,p=1}^{2n} A_{sp} \xi_s \xi_p$ est positivement définie. La démonstration est finie.

COROLLAIRES. (1) *Toute fonction presque-pluriharmonique est indéfiniment différentiable.* (2) *Toute fonction presque-pluriharmonique vérifie le principe du maximum, la variété M étant connexe.* (3) *Les corollaires* (1) *et* (2) *sont remplis et pour les fonctions presque-holomorphes.*

En supposant que la variété sous-jacent M est une variété analytique réelle et encore que la structure presque-complexe J est aussi analytique réelle (i.e. les coefficients de la matrice correspondante sont des fonctions analytiques réelles) on recoit les consequences suivantes.

COROLLAIRES. (4) *Toute fonction presque-pluriharmonique sur la variété presque-complexe analytique réelle (M, J), avec J analytique réelle, est une fonction analytique réelle.* (5) *Si M est connexe, on affirme que toute fonction presque-pluriharmonique sur M vérifie la principe d'unité de la prolongation.* (6) *Les corollaires* (4) *et* (5) *restent valables et pour les fonctions presque-holomorphes.*

Les corollaires (1), (2) et (3) suivant des propriétés générales des solutions d'equations différentielles élliptiques de deuxième ordre. La condition complementaire d'analyticité réelle implique que les coefficients de (3.7) sont analytiques réelles, donc d'après le théorème d'analyticité des solutions (voir par exemple [6], les corollaires (4), (5) et (6) ont lieu.

4. Quelques constructions concrètes

L'espace vectoriel $\boldsymbol{R}^{2n}$ muni d'une structure presque-complexe J peut être considérér comme une variété presque-complexe, notée $(\boldsymbol{R}^{2n}, J)$. En employant deux sortes de variables, ca signifie qu'à tout point $(x, y) = (x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^n)$ de $\boldsymbol{R}^{2n}$ il est attaché une matrice anti-involutive $J(x, y)$ $(J^2(x, y) = -E_{2n})$ dépendant différentiablement des variables (x^k, y^l). Particuliement on peut considerer des matrices $J(x, y)$ dépendants analytiquement des variables (x^k, y^l).

Dans ce paragraphe on considerera les fonctions presque-holomorphes définies sur un domain D de $\boldsymbol{R}^{2n}$, $D \subset \boldsymbol{R}^{2n}$, muni de la structure presque-complexe induite. Ayant en vue (3.2) on conclut que pour une telle fonction $f = u+iv$ sa partie réelle u et sa partie imaginaire v sont des solutions du système en derivées partielles suivants

$$(4.1)\quad \begin{aligned} \partial u/\partial x^p &= \sum_{q=1}^{n} J_p^q \partial v/\partial x^q + \sum_{q=1}^{n} J_p^{n+q} \partial v/\partial y^q, \\ \partial u/\partial y^p &= \sum_{q=1}^{n} J_{n+p}^q \partial v/\partial x^q + \sum_{q=1}^{n} J_{n+p}^{n+q} \partial v/\partial y^q, \end{aligned}$$

$p = 1, \ldots, n$.

Dans le cas particulier de la matrice standard $J = S$, c'est le système de Cauchy–Riemann.

Dans le cas général de J, le problème d'intégration du système sur déterminé (4.1) est compliqué. Ici on se bornera de montrer que dans certains cas particuliers de J les solutions (i.e. les fonctions presque-holomorphes correspondantes) sont étroitement liées avec les fonctions holomorphes sur C^n. Pour ce but on considera des matrices blok antidiagonales

$$J(x, y) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & J_{12}(x, y) \\ \hline J_{21}(x, y) & 0 \end{array}\right)$$

où $J_{12}(x, y)$ et $J_{21}(x, y)$ sont des $(n \times n)$-matrices à coefficients de classe $\mathfrak{E}^\infty$. On a toujours $J_{12}J_{21} = J_{21}J_{12} = -E_n$.

D'abord on cherchera des structures J, pour lesquelles toute fonction presque-holomorphe sur R^{2n} verifie la condition que pour tout point $(x, y) \in R^{2n}$ on a

$$f(x, y) = f(g(x) + ih(y)),$$

où $f(\xi + i\eta)$ est une fonction holomorphe sur C, $\xi = g(x)$, $\eta = h(y)$, $x = (x^1, \ldots, x^n)$, $y = (y^1, \ldots, y^n)$. Evidement, si $f = u + iv$, on a

$$u(x, y) = \tilde{u}(\xi + i\eta) \quad \text{et} \quad v(x, y) = \tilde{v}(\xi + i\eta).$$

La condition que f est holomorphe permet d'obtenir les equations suivantes pour u et v

$$(4.2)\quad b_l \partial u/\partial x^k = a_k \partial v/\partial y^l, \quad a_k \partial u/\partial y^l = -b_l \partial v/\partial x^k, \quad k, l = 1, \ldots, n,$$

où $a_k = \partial g/\partial x^k$, $b_l = \partial h/\partial y^l$, en supposant que g et h sont des fonctions données de classe $\mathfrak{E}^\infty$.

Comme pour les matrices blok antidiagonales J, le système (4.1) est semplifié, à l'aide de (4.2) on peut éliminer les dérivées partielles de la fonction v. D'autre part (4.2) donnent un certain nombre de liesons indépendantes entre les dérivées partielles de la fonction u, qui nous permetra de trouver des equations commodes pour la détermination des composantes de J. Pour $n = 2$, i.e. pour f définie sur R^4, le résultat de l'élimination est le suivant

$$(-b_1 + a_1 J_3^1 + a_2 J_3^2)\, \partial u/\partial y^1 = (-b_2 + a_1 J_4^1 + a_2 J_4^2)\, \partial u/\partial y^1 = 0.$$

Si $\partial u/\partial y^1 \neq 0$, soient $J_3^2 = \varphi$ et $J_4^2 = \psi$, φ et ψ arbitréement choisies à condition que $\det J_{12} = b_1\psi - b_2\varphi \neq 0$. En supposant que $a_1 \neq 0$, $b_1 \neq 0$, on peut exprimer

touts les J_q^p par φ et ψ. On remarquera que si $\partial\varphi/\partial y^2 \neq \partial\psi/\partial y^1$ la structure presque-complexe J n'est pas intégrable.

Maintenant, soit J une structure presque-complexe sur R^8. On cherchera de fonctions presque-holomorphes $f = u + iv$, telles que pour tout point $(x, y) \in R^8$ on a

$$f(x, y) = f(g_1(x) + ih_1(y), g_2(x) + ih_2(y)),$$

où $f(\xi_1 + i\eta_1, \xi_2 + i\eta_2)$ est holomorphe sur C^2, $\xi_k = g_k(x)$, $\eta_k = h_k(y)$, $k = 1, 2$.

Si $g_1(x) = g_1(x_1, x_2)$, $g_2(x) = g_2(x_3, x_4)$, $h_1(y) = h_1(y_1, y_2)$, $h_2(y) = h_2(y_3, y_4)$, on a le système (4.2) et on peut faire l'élimination consideré.

Si $g_k(x) = g_k(x_1, x_2, x_3, x_4)$, $h_k(y) = h_k(y_1, y_2, y_3, y_4)$, $k = 1, 2$, le système correspondant à (4.2) est plus compliqué.

Il est interessant que pour les structures analytiques réelles J sur R^{2n} les exemples considerés donnent parfois la situation générale. Dans ce cas de J, d'après le corollaire (6) du (3.6) on a que toute fonction presque-holomorphe est analytique réelle. Pour le moment le théorème suivant est démontré [7].

THÉORÈME (4.3). *Soit J une structure presque-complexe analytique réelle blok antidiagonale sur R^4, admettante des fonctions presque-holomorphes linéaires. Alors pour toute fonction presque-holomorphe sur (R^4, J), on a*

$$f(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(\xi + i\eta)^k, \quad c_k \in C,$$

où $\xi = a_1 x_1 + a_2 x_2$, $\eta = b_1 y_1 + b_2 y_2$.

Démonstration. [3] Comme une J analytique réelle se développe en serie de coefficients matricielles, la condition (2.4) pour f s'exprime par un système infinie d'equations pour les coefficients du développement de f. Si

$$f(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x, y),$$

est le développement de f en serie de polynomes homogenes, on voit que f est presque-holomorphe si et seulement si tout polynome f_n est presque-holomorphe aussi. Alors il suffit de prouver le théorème pour les polynomes homogenes f_n. La démonstration precise s'appuit sur les deux lemmes suivants, qui sont prouvés dans [7]. Les raisonnements sont du caractére élémentaire, mais longues à exposer.

LEMME 1. *Si toute fonction presque-holomorphe linéaire de $AH_J(R^{2n})$ est de la forme $c(\xi + i\eta)$, où $c \in C$, $\xi = a_1 x_1 + a_2 x_2$, $\eta = b_1 y_1 + b_2 y_2$, $a_k \in R$, $b_k \in R$, $k = 1, 2$, alors on a*

$$f_n(x, y) = \sum_{k=0}^{n} c_k(\xi + i\eta)^k.$$

---

[3] Actuellement (1982) on a differentes démonstrations de (4.3).

LEMME 2. *Pour toute J analytique réelle blok antidiagonale sur $\boldsymbol{R}^4$, admettante des fonctions presque-holomorphes linéaires la condition du lemme 1 est remplie.*

Remarque. Certains J n'admettent pas de fonctions presque-holomorphes linéaires.

5. Algèbres de fonctions presque-holomorphes

D'abord on verra que pour les dérivée partielles de toute fonction presque-holomorphe f sur la variété presque-complexe (M, J) on a une estimation utile, qui s'obtient à l'aide des L^2-estimations de Hörmander [8].

Notons comme ordinairement $D^\alpha = (\partial/\partial x^1)^{\alpha_1} \dots (\partial/\partial x^n)^{\alpha_n}$, $L_j'(f) = \partial f/\partial w_j$, $L_j''(f) = \partial f/\partial \overline{w}_j$. Si $(U, x = (x^k))$ est un système de coordonnés locales pour (M, J), soient K un compact dans U et V un voisinage de K relatif compact dans U (i.e. $K \subset V \Subset U$).

LEMME (5.1). *Pour tout multi-indice $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, on a*

$$\sup_K |D^\alpha f|^2 \leqslant C_\alpha \int_V |f|^2 dx$$

où C est une constante qui ne depende pas de f.

Démonstration. Soient $\overline{w}_1, \dots, \overline{w}_n$ des formes structurales pour U, alors $\partial f/\partial \overline{w}_j = 0$. Comme V est contenu dans le domain d'un système de coordonnés locales, on peut considerer U comme un ouvert de $\boldsymbol{R}^{2n}$ et la fonction f comme une fonction de classe $\mathfrak{E}^\infty$ sur $\boldsymbol{R}^{2n}$ à support compact. On a évidemment $f \in L^2(U, \text{loc})$ et $\sup|f| \leqslant \int |\partial^{2n} f/\partial x^1 \dots \partial x^{2n}| dx$. Alors l'estimation ci-dessus suit directement de la L^2-estimation suivante [8].

$$\sum_{|\alpha| \leqslant s+1} \int_K |D^\alpha f|^2 dx \leqslant C\Big(\sum_{|\alpha| \leqslant s} \sum_{j=1}^n \int_V |D^\alpha \partial f/\partial \overline{w}_j|^2 dx + \int_V |f|^2 dx\Big)$$

s étant un nombre entier positif.

THÉORÈME DE TYPE WEIERSTRASS [9]. *Si $f_n \in AH_J(M)$ et $\lim f_n = f$ uniformément sur les parties compactes de M, on a $f \in AH_J(M)$.*

Démonstration. En employant (5.1) pour $f_n - f_m$, on a que la suite $\{D^\alpha f_n\}$ est uniformément convergente sur les parties compactes pour tout multi-indice α. Alors f est de classe $\mathfrak{E}^\infty$. Comme les opérateurs $\overline{w}_j$ sont des combinations linéaires à coefficients indéfiniment différentiables de D^α, $|\alpha| = 1$, on a $\partial f/\partial \overline{w}_j = \lim \partial f_n/\partial \overline{w}_j = 0$.

COROLLAIRE. *Soit M une reunion dénombrable de parties compactes. Alors, si $AH_J(M)$ est muni de la topologie de la convergence uniforme sur les parties compactes de M, on a que $AH_J(M)$ est un espace de Fréchet.*

THÉORÈME DE TYPE VITALI [9]. *Toute suite uniformément bornée de fonctions presque-holomorphes sur (M, J) contient une sous-suite uniformément convergente sur les parties compactes de M.*

On fait la démonstration à l'aide du théorème d'Arzela–Askoli avec les raisonnements standardes.

Remarque. Certains algèbres $AH_J(\boldsymbol{R}^{2n})$ sont étroitement liées avec les algèbres de fonctions holomorphes $H(\boldsymbol{C}^n)$. Par exemple c'est vrai pour $AH_J(\boldsymbol{R}^4)$ et $H(\boldsymbol{C})$, comme il suit du théorème (4.3).

6. Domaines de presque holomorphie [10]

Le principe d'unité de la prolongation et le principe du maximum établis dans § 3 permetent de developper les idées du prolongement analytique pour les fonctions presque-holomorphes. On se bornera de quelques remarques générales.

Soit J une structure presque-complexe sur $\boldsymbol{R}^{2n}$ à coefficients analytiques réelles, admetante des fonctions presque-holomorphes non-constantes. Étant données deux fonctions presque-holomorphes f_1 et f_2, définies sur les domaines G_1 et G_2 respectivement, on dira que chaque de ces deux fonctions est un prolongement analytique de type J pour l'autre, si l'on a un ouvert $U \subset G_1 \cap G_2$ sur lequel les restrictions de f_1 et f_2 coincident. Pour un domaine D de $\boldsymbol{R}^{2n}$, on dira que c'est un domaine de presque holomorphie de type J s'il existe an moins une fonction f presque-holomorphe sur D (muni de la structure induite de $(\boldsymbol{R}^{2n}, J)$), telle que pour tout sous-ensemble ouvert U de D la restriction de f n'admet pas du prolongement de type J sur un domaine non-contenu dans D.

Étant donné un domaine D de $\boldsymbol{R}^{2n}$ et un sous-ensemble $\mathscr{F}$ de $AH_J(D)$, on peut demender est-ce qu'il existe un domaine maximal D dans lequel tout $f \in \mathscr{F}$ peut être prolonger.

La construction de $\tilde{D}$ pour une fonction f seulement est completement analogue à celle du cas d'une fonction holomorphe sur $D \subset \boldsymbol{C}^n$. Pour ce but on considere des domaines étalés Ω sur $\boldsymbol{R}^{2n}$. Des changements convenables dans les définitions classiques donnent les notions analogues, necessaires comme par exemple: fonction presque-holomorphe sur Ω de type J, prolongement analytique de type J sur Ω etc. Le principe d'unité de la prolongation de type J est vrai pour Ω. Au fond on emploit le faisceaux $\mathscr{A}\mathscr{O}_D^J$ des germes de fonctions presque-holomorphes sur D.

Le cas général de $\mathscr{F}$ est plus compliqué.

En reprenant les constructions considerées dans § 4, on peut obtenir des exemples de domaines de presque holomorphie par exemple dans $\boldsymbol{R}^4$. Considerons l'application

$$\boldsymbol{R}^4 \ni (x, y) \xrightarrow{\pi} \xi + i\eta \in \boldsymbol{C},$$

où $\xi = g(x^1, x^2)$ et $\eta = h(y^1, y^2)$, g et h étant des fonctions données sur $\boldsymbol{R}^2$ de classe $\mathfrak{E}^\infty$. Elle est continue, surjective et non-propre dans le cas général de g et h. En suivant la methode de § 4, on peut construire des structures non-intégrables J sur $\boldsymbol{R}^4$, pour lesquelles il y a de fonctions holomorphes f sur un domaine G de $\boldsymbol{C}$, telle que les fonctions $f(x, y) = \tilde{f}(\xi + i\eta)$ soient presque-holomorphes sur l'ouvert $\pi^{-1}(G)$ de $\boldsymbol{R}^4$. C'est claire que, si $\tilde{f}$ n'admet pas du prolongement en dehors de G, la fonction correspondante f n'admet pas du prolongement en dehors de $\pi^{-1}(G)$.

On remarquera encore que la notion de la convexité holomorphe s'adapte aussi pour les fonctions presque-holomorphes. On se bornera de domaines Ω de R^{2n}.

Soit K un sous-ensemble compact de Ω. Par $\hat{K}_\Omega^J$ sera désigné l'ensemble suivant

$$\hat{K}_\Omega^J = \{x \in \Omega\colon |f(x)| \leqslant \sup_{y \in K} |f(y)| \text{ pour toute } f \in AH_J(\Omega)\}.$$

Evidement $\hat{K}_\Omega^J$ est un sous-ensemble fermé de Ω. On dira que Ω verifie le propriété de la pseudo-convexité de type J, si pour tout ensemble compact $K \subset \Omega$ on a que $\hat{K}_\Omega^J$ est compact aussi.

LEMME. *Le domaine $\Omega \subset R^{2n}$ verifie le propriété de la pseudo-convexité de type J, si et seulement si pour toute suite infinie $\{x_k\}$ qui n'a pas de points d'acumulation dans Ω, il existe une fonction $f \in AH_J(\Omega)$, telle que la suite $\{f(x_k)\}$ n'est pas bornée.*

La démonstration n'est pas dificile.

THÉORÈME DE TYPE CARTAN–THULLEN. *Tout domaine $\Omega \subset R^{2n}$ qui verifie le propriété de la pseudo-convexité de type J est un domaine de presque-holomorphie de type J.*

La démonstration est analogue à celle pour les fonctions holomorphes. On s'appuit sur le principe du maximum, le principe d'unité (§ 3) et le théorème de type Weierstrass (§ 5).

7. Remarques sur les variétés presque-hermitiennes et presque-kählériennes

Soit (M, g, J) une variété presque-hermitienne (g est sa metrique riemannienne et J est sa structure presque-complexe). Une telle variété peut être consideré comme une structure fibré, obtenue par la reduction du groupe structurale d'espace fibré tangent $(TM; M, R^{2n}, GL(2n, R))$ de la variété indéfiniment différentiable sous-jacent M. On supposera que le groupe structurale de (M, g, J) est orthogonal, donc la metrique riemannienne g est déterminé par la donné d'un champ tensoriel (noté aussi par g) de type $(2, 0)$ tel qu'on a

$$g(\partial/\partial x^i, \partial/\partial x^j) = \delta_j^i, \tag{7.1}$$

pour tout système de coordonnés locales $(U, x = (x^k))$ de M.

La metrique g est dite hermitienne, si l'on a $g(JX, JY) = g(X, Y)$ pour tout couple X, Y de champs vectoriels sur M. Evidemment $h(X, Y) = \frac{1}{2}\big(g(X, Y) + g(JX, JY)\big)$ est toujours une metrique hermitienne sur M.

On dit que

$$\Phi(X, Y) = h(X, JY) \tag{7.2}$$

est la 2-forme fondamentale de la variété presque-hermitienne M [11].

La 2-forme fondamentale Φ corresponde au produit symplectique $[z|w]$ de C^n, qui est la partie imaginaire du produit hermitienne $\langle z|w\rangle$. On a $[z|w] = (z|iv)$, où $(z|w)$ est la partie réelle de $\langle z|w\rangle$ (le produit scalaire), C^n est muni de la structure standard S.

C'est n'est pas difficile de trouver l'expression locale de la forme Φ. Soit $(U, x = (x^k))$ un système de coordonées locales sur M. On a

$$\Phi = \frac{1}{2} \sum_{k<l} (J_l^k - J_k^l) dx^k \wedge dx^l. \tag{7.3}$$

On remarquera que la 2-forme Φ n'est pas fermé dans le cas général de (M, g, J).

On verra que la 2-forme fondamentale Φ reste invariante sous l'action des application presque-symplectiques. On rappelera la définition [12]. Si $F\colon M \to M$ est une application indéfiniment différentiable, notons par DF/Dx sa matrice de Jacobi, dans $(U, x = (x^k))$ et par $(DF/Dx)^t$ sa matrice transposée. On dit que F est une application presque-symplectique sur M, si pour tout $m \in M$ dans $(U, (x^k))$ on a

$$(DF/Dx)^t J[F \circ x^{-1}(x(m))](DF/Dx) = J(x). \tag{7.4}$$

LEMME (7.5) [12]. *La notion d'application presque-symplectique est correctement définie grâce à la condition $J^2(x) = -I$ et le fait que le groupe structural de M est orthogonal.*

Démonstration. Soient $(U, x = (x^k))$ et $(V, y = (y^l))$ deux systèmes de coordonnés locales sur M et $x = x(y)$ $(x^k = x_k(y^1, \ldots, y^{2n}),\ k = 1, \ldots, 2n)$ leurs fonctions de transition dans l'intersection $U \cap V$ de ses domaines de définition. Désignons par Dx/Dy la matrice de Jacobi des fonctions $x_k(y^1, \ldots, y^{2n})$. Sa matrice transposée $(Dx/Dy)^t$ est la matrice de la transition de la base $(\partial/\partial x^k)$ de $T_m M$ dans la base $(\partial/\partial y^l)$ de $T_m M$, $m \in U \cap V$. L'expression locale de J dans $(U, x = (x^k))$ est $J(x) = ||J_l^k(x)||$, et respectivement $J(y) = ||J_q^p(y)||$ dans $(V, y = (y^l))$. Comme $J(y) = -J^{-1}$, $J(x) = -J^{-1}$ et d'autre part comme $(Dx/Dy)^t = (Dx/Dy)^{-1}$, on a

$$J(y) = (Dx/Dy)^{-1} J(x) (Dx/Dy).$$

Maintenant, si l'on a (7.4), on recoit encore

$$(Dx/Dy)^t (DF/Dx)^t J[F \circ x^{-1}(x(m))] (DF/Dx)(Dx/Dy) = (Dx/Dy)^t J(x)(Dx/Dy)$$

qui n'est autre chose que

$$(DF/Dy)^t J[F \circ y^{-1}(y(m))](DF/Dy) = J(y)$$

(bien sur on a $F \circ x^{-1}(x(m)) = F \circ y^{-1}(y(m))$, $m \in M$).

THÉORÈME (7.6). *Pour toute application presque-symplectique $F\colon M \to M$ on a $(T^*F)\Phi = \Phi$, i.e. pour tout point $m \in M$ on a $\big((T^*F)\Phi\big)_m := (T^*F)\Phi_{F(m)} = \Phi_m$.*

Démonstration. L'opérateur $T_m^* F\colon T_{F(m)}^* \to T_m^* M$ est le conjugé de l'application linéaire tangent $T_m F\colon T_m M \to T_{F(m)} M$. La restriction $(T_m^* F)\Phi_{F(m)}$ de $(T^*F)\Phi$ sur $T_{F(m)}^* M$ est une forme bilinéaire sur $T_m M$ (c'est l'image de $\Phi_{F(m)}$ par $T_m^* F$). On a

$$(T_m^* F)\Phi_{F(m)}(X, Y) = \Phi_{F(m)}\big((T_m F)X, (T_m F)Y\big), \quad X, Y \in T_m M$$

et d'après la définition de Φ (7.2)

$$(T_m^* F)\Phi_{F(m)}(X, Y) = h_{F(m)}\big((T_m F)X, J_{F(m)} \circ (T_m F)Y\big).$$

Dans la système de coordonnées locales $(U, x = (x^k))$ on a

$$h_{F(m)}\Big((DF/Dx)X, J\big(F \circ x^{-1}(x(m))\big)(DF/Dx)Y\Big)$$
$$= h_m\Big(X, \big((DF/Dx)^t J\big(F \circ x^{-1}(x(m))\big)(DF/Dx)\big)Y\Big).$$

Alors, d'après la définition (7.4)

$$(T_m^* F)\Phi_{F(m)}(X, Y) = h_m(X, JY) = \Phi_m(X, Y).$$

Rappelons qu'une application indéfiniment différentiable $f\colon M \to M$ est dite orthogonale si dans toute système de coordonèes locales sa matrice de Jacobi est orthogonale. La notion d'application orthogonale est invariante par rapport de changement de coordonnés locales sur M grâce à la condition que le groupe structural de M est un groupe orthogonal.

On remarquera que si f est une application orthogonale et presque-symplectique simultanement, alors f est une application presque-holomorphe. C'est une conséquence immédiat de (7.4) et la définition d'application orthogonale. Invercement, toute application orthogonale et presque-holomorphe est presque-symplectique. On conclut que toute isométrie presque-holomorphe de M est une isométrie presque-symplectique et vice versa. Donc on a le résultat suivant: la 2-forme fondamentale de M reste invariante sous l'action des isométries presque-holomorphes de M.

Si la 2-forme fondamentale est fermée ($d\Phi = 0$) on dit que la variété presque-hermitienne M est presque-kählerienne. Rappelons qu'une variété hermitienne est kählerienne si et seulement si pour sa forme kählerienne H il existe localement une fonction u à valeures réelles de classe $\mathfrak{E}^\infty$ telle qué on a $H = i\partial\bar{\partial}u$. On prouve ce théorème à l'aide du lemme de Dolbeault–Grothendieck (voir par exemple [13]).

Dans le cas des variétés presque-hermitiennes on peut remplacer l'opérateur $i\partial\bar{\partial}$ par l'opérateur dJ^*d introduit dans § 2. Soient $(U, x = (x^k))$ une système de coordonnées locales pour M et u une fonction de classe $\mathfrak{E}^\infty$ définie sur U. Ayant en vue l'expression locale (3.5) de la 2-forme dJ^*du et d'autre part l'expression locale (7.3) de la 2-forme fondamentale Φ on voit que l'equalité

$$\Phi = dJ^*du \tag{7.7}$$

est equivalante en (U, x) à la condition d'existence d'une solution u de classe $\mathfrak{E}^\infty$ du système en dérivées partielles suivante

$$\sum_{k=1}^{2n} (J_j^k\, \partial u/\partial x^k)/\partial x^i - \sum_{k=1}^{2n} (J_i^k \partial u/\partial x^k)/\partial x^j = J_j^i - J_i^j, \tag{7.8}$$

$i, j = 1, \ldots, 2n$.

La fonction u est déterminée à un membre additif près qui est une fonction presque-pluriharmonique u_0 ($dJ^*du_0 = 0$), c'est-à-dire $\Phi = dJ^*d(u+u_0)$.

Comme une variété presque-kählerienne est symplectique par rapport de sa 2-forme fondamentale, les applications presque-symplectiques sur une variété presque-kählerienne sont des applications symplectiques et les résultats obtenus ont lieu pour ces derniéres.

References

[1] A. Newlander and L. Nirenberg, *Complex analytic coordinates in almost complex manifolds*, Ann. of Math. 65 (1957), 381–404.

[2] S. Helgason, *Differential geometry and symmetric spaces*, Academic Press, New York 1962.

[3] R. Hermann, *Compact homogeneous almost complex spaces of positive characteristic*, Trans. Amer. Math. Soc. 83 (1956), 471–481.

[4] S. Dimiev et O. Muschkarov, *Fonctions presque-pluriharmoniques*, C. R. Bulg. Acad. Sci. 33 (1) (1980).

[5] W. Bootby, S. Kobayachi and H. Wang, *A note on mappings and automorphisms of almost complex manifolds*, Ann. of Math. 77 (1963), 329–334.

[6] L. Bers, F. John and M. Shechter, *Partial differential equations*, Interscience, New York 1964.

[7] E. Arnaudova, S. Dimiev and T. Vitanov, *Some almost complex structures and their almost holomorphic functions*, Serdika Bulgaricae mathematicae publicationes 7 (1981), 234–242.

[8] L. Hörmander, *An introduction to complex analysis in several variables*, van Nostrand, Princeton, New Jersey, 1966.

[9] O. Muschkarov, *Familles normales de fonctions presque-holomorphes*, Pliska, Studia Mathematica Bulgarica 4 (1981), 58–61.

[10] S. Dimiev, *Domaines de presque holomorphie*, C. R. Bulg. Acad. Sci. (to appear).

[11] A. Gray, *Some examples of almost Hermitian manifolds*, Illinois J. Math. 10 (1966), 353–366.

[12] S. Dimiev, *Applications presque-symplectiques*, C. R. Acad. Sci. Paris, Série A, 290 (1980), 161–164.

[13] S. Chern, *Complex manifolds without potential theory*, van Nostrand, Princeton, New Jersey, 1967.

Presented to the Semester
COMPLEX ANALYSIS
February 15–May 30, 1979