

## ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ОТОБРАЖЕНИЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ В СЕБЯ

И. А. АЛЕКСАНДРОВ, С. Т. АЛЕКСАНДРОВ, В. В. СОБОЛЕВ

*Институт Математики Тюменского Государственного Университета  
ул. Семакова 10, Тюмень 3, СССР*

### 0. $\mathcal{R}$ -функции

Пусть  $\Pi_z^+ = \{z: \operatorname{Im} z > 0\}$  — верхняя полуплоскость комплексной плоскости  $C_z$ ,  $R = \partial\Pi_z^+ = \{z: \operatorname{Im} z = 0\}$ .

**Определение.** Классом  $\mathcal{R}$  называется совокупность всех голоморфных в  $\Pi_z^+$  функций  $w = f(z)$ , принимающих при всех  $z \in \Pi_z^+$  значения  $f(z) \in \overline{\Pi_w^+}$ .<sup>(1)</sup>

Функции класса  $\mathcal{R}$  играют исключительную роль в теории резольвент эрмитовых операторов, в интерполяционной проблеме аналитических функций и др.

Хорошо известно (см. например [1], с. 221–222, [2], с. 630, [3]) интегральное представление функций класса  $\mathcal{R}$ , даваемое следующей формулой:

$$(1) \quad f(z) = \alpha + \beta z + \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{t-z} - \frac{t}{1+t^2} \right) d\omega(t),$$

$z \in \Pi_z^+$ ,  $\alpha \in R$ ,  $\beta \geq 0$ ,  $\omega(t)$  — неубывающая на  $R$  функция такая, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega(t)}{1+t^2} < \infty.$$

Это интегральное представление с помощью дробно-линейного преобразования получается из найденного Ф. Рисом и Г. Херглоцем интегрального представления функций, голоморфных в единичном круге и принимающих в нем значения из правой полуплоскости.

Функция  $\omega(t)$  в представлении (1) в существенном однозначно определяется функцией  $f \in \mathcal{R}$ . Например, при нормировке условиями

$$(2) \quad \omega(t) = \frac{1}{2}[\omega(t+0) + \omega(t-0)], \quad \omega(-\infty) = \lim_{t \rightarrow -\infty} \omega(t) = 0,$$

<sup>(1)</sup> При  $z \in \Pi_z^+$  функция  $f(z)$  класса  $\mathcal{R}$  может принять вещественное значение в том и только том случае, когда она является вещественной константой (см. [2], с. 500).

функция  $\omega(t) = \omega_f(t)$  в (1) однозначно определяется по функции  $f \in \mathcal{R}$  с помощью известной формулы обращения Стильтеса:

$$(3) \quad \omega_f(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^t \operatorname{Im} f(x+i\epsilon) dx$$

при любом вещественном  $t$ . Функцию  $\omega(t) = \omega_f(t)$ , определяемую таким образом по  $f \in \mathcal{R}$ , называют спектральной функцией функции  $f$ .

Константы  $\alpha$  и  $\beta$  в (1) также однозначно определяются по  $f \in \mathcal{R}$ ; например, (см. [4], с. 54),

$$(4) \quad \beta = \beta_f = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{Im} f(iy)}{y} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{f(iy)}{iy}.$$

Пусть  $\Pi_z^+(\lambda) = \{z: \lambda < \arg z < \pi - \lambda\}$ ,  $0 < \lambda < \pi/2$ .

Нетрудно показать, пользуясь представлением (1), что наряду с (4) выполняется также равенство

$$(5) \quad \beta = \beta_f = \lim_{z \rightarrow \infty} (f(z)/z), \quad z \in \Pi_z^+(\lambda),$$

где  $\lambda$  — любое фиксированное число,  $0 < \lambda < \pi/2$ . Величина  $\beta_f$ , определяемая равенствами (4) или (5), называется иногда угловой производной функции  $f$  в бесконечности.

Правая часть формулы (1) при указанных выше ограничениях на  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\omega(t)$  определяет также голоморфную в нижней полуплоскости  $\Pi_z^- = \{z: \operatorname{Im} z < 0\}$  функцию  $f^*(z)$ , причем  $\overline{f^*(\bar{z})} = f(z)$  при  $z \in \Pi_z^+$ . Совокупность двух аналитических функций  $f$ ,  $f^*$ , определяемых в полуплоскостях  $\Pi_z^+$ ,  $\Pi_z^-$  соответственно правой частью (1), называют  $\mathcal{R}$ -функцией, а  $f$  и  $f^*$  — верхней и соответственно нижней частями этой  $\mathcal{R}$ -функции.

Верхняя и нижняя части  $\mathcal{R}$ -функции не являются, вообще говоря, аналитическими продолжениями друг друга. В случае, если на некотором интервале  $(a, b) \subset R$  спектральная функция  $\omega(t)$  постоянна, интеграл в (1) имеет смысл не только при  $z \in \Pi_z^+$  или  $z \in \Pi_z^-$ , но и при  $z \in (a, b)$  и принимает при таких  $z \in (a, b)$  вещественные значения. В этом случае верхняя и нижняя части  $\mathcal{R}$ -функции являются аналитическими продолжениями одна другой через интервал  $(a, b)$ . Обратно, если, например, верхняя часть  $f$   $\mathcal{R}$ -функции продолжается хотя бы как непрерывная функция на интервал  $(a, b)$  вещественной оси и принимает на нем вещественные значения, то в силу формулы обращения (3) её спектральная функция  $\omega_f(t)$  постоянна на  $(a, b)$  и, следовательно, нижняя и верхняя части  $\mathcal{R}$ -функции аналитически продолжаются друг в друга.

В дальнейшем будем рассматривать свойства верхних частей  $\mathcal{R}$ -функций (при  $z \in \Pi_z^+$ ). Соответствующие свойства имеют место и для нижних частей этих функций.

## 1. Простейшие свойства класса $\mathcal{R}$ и его подклассов $\mathcal{R}_\beta$ , $\mathcal{R}_\beta^0$ , $\mathcal{R}_\beta^0(c)$ , $\hat{\mathcal{R}}_\beta^0(c)$

**Предложение 1.** Для всякой функции  $f \in \mathcal{R}$  при любых  $z'$ ,  $z'' \in \Pi_z^+$ ,  $z' \neq z''$ , выполняется неравенство:

$$(1.1) \quad \left| \frac{f(z') - f(z'')}{z' - z''} \right| \leq \left| \frac{f(z') - \overline{f(z'')}}{z' - \bar{z}''} \right|.$$

Доказательство легко получается применением обобщенной леммы Шварца ([5], с. 319) к функции

$$\frac{f(z) - f(i)}{f(z) - \overline{f(i)}}, \quad z = i \frac{1+\zeta}{1-\zeta}, \quad |\zeta| < 1.$$

Совершая в (1.1) предельный переход  $z' \rightarrow z$ ,  $z'' \rightarrow z$ ,  $z \in \Pi_z^+$  получаем

**Предложение 2.** Для всякой функции  $f \in \mathcal{R}$  при любом  $z \in \Pi_z^+$  выполняется неравенство

$$(1.2) \quad |f'(z)| \leq \frac{\operatorname{Im} f(z)}{\operatorname{Im} z}.$$

**Определение.** Пусть  $\beta$ ,  $\beta \geq 0$ , — фиксированное число. Классом  $\mathcal{R}_\beta$  называется множество всех функций  $f \in \mathcal{R}$ , для которых угловая производная в бесконечности  $\beta_f$  (определенная любым из равенств (4), (5)) равна  $\beta$ .

**Предложение 3.** Для всякой функции  $f \in \mathcal{R}_\beta$ ,  $\beta \geq 0$ , при любом  $z \in \Pi_z^+$  выполняется неравенство

$$(1.3) \quad \frac{\operatorname{Im} f(z)}{\operatorname{Im} z} - \beta \geq 0,$$

причем неравенство в (1.3) возможно лишь только при  $f(z) - \beta z = \alpha = \text{const}$ ,  $\alpha \in R$ .

В самом деле, из (1) при  $\operatorname{Im} z \neq 0$  имеем

$$(1.4) \quad \frac{\operatorname{Im} f(z)}{\operatorname{Im} z} - \beta = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega(t)}{|t-z|^2} \geq 0.$$

Равенство нулю здесь возможно лишь только при  $\omega(t) = \text{const}$ , что ввиду (1) соответствует тождеству  $f(z) - \beta z = \alpha$ ,  $\alpha \in R$ .

Усиление и обобщение оценки (1.2) на случай  $f \in \mathcal{R}_\beta$ ,  $\beta \geq 0$ , дает

**Предложение 4.** Для всякой функции  $f \in \mathcal{R}_\beta$ ,  $\beta \geq 0$ , при любом  $z \in \Pi_z^+$  имеют место оценки

$$(1.5) \quad |f'(z) - \beta| \leq \frac{\operatorname{Im} f(z)}{\operatorname{Im} z} - \beta,$$

$$(1.6) \quad |f^{(n)}(z)| \leq \frac{n!}{(\operatorname{Im} z)^{n-1}} \left[ \frac{\operatorname{Im} f(z)}{\operatorname{Im} z} - \beta \right] \quad (n = 2, 3, \dots).$$

Для доказательства достаточно из (1) записать

$$\left| \frac{d^p}{dz^p} [f(z) - \beta z] \right| = \left| p! \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega_f(t)}{(t-z)^{p+1}} \right| \leq \frac{p!}{(\operatorname{Im} z)^{p-1}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega_f(t)}{|t-z|^2} \quad (p = 1, 2, \dots)$$

и воспользоваться равенством из (1.4).

**Определение.** Классом  $\mathcal{R}_\beta^0$ ,  $\beta \geq 0$ , называется подкласс класса  $\mathcal{R}_\beta$ , содержащий все функции  $f$  вида

$$(1.7) \quad f(z) = \beta z + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega_f(t)}{t-z},$$

где  $\omega_f(t)$  — неубывающая на  $\mathbb{R}$  функция ограниченного изменения.

**Предложение 5.** Для всякой функции  $f \in \mathcal{R}_\beta^0$ ,  $\beta \geq 0$ , выполняется условие

$$(1.8) \quad \lim_{z \rightarrow \infty} [f(z) - \beta z] = 0, \quad z \in \Pi_z^+(\lambda),$$

при любом  $\lambda$ ,  $0 < \lambda < \pi/2$ .

Доказательство вытекает из оценки

$$|f(z) - \beta z| \leq \frac{1}{\operatorname{Im} z} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_f(t) \leq \frac{1}{|z| \sin \lambda} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_f(t), \quad z \in \Pi_z^+(\lambda),$$

получаемой из (1.7).

Аналогичным способом доказывается

**Предложение 6.** Для всякой функции  $f \in \mathcal{R}_\beta^0$ ,  $\beta \geq 0$ , выполняется условие

$$(1.9) \quad \lim_{z \rightarrow \infty} f'(z) = \beta, \quad z \in \Pi_z^+(\lambda),$$

при любом  $\lambda$ ,  $0 < \lambda < \pi/2$ .<sup>(2)</sup>

Имеет место

**Теорема 1.1** ([1], с. 223). Для принадлежности  $f$  классу  $\mathcal{R}_\beta^0$  необходимо и достаточно, чтобы  $f \in \mathcal{R}$  и выполнялось условие

$$\sup_{y>0} |f(iy) - \beta iy| < \infty.$$

Хорошо известен также следующий результат.

**Теорема 1.2** ([2], с. 641). Для любой функции  $f \in \mathcal{R}_\beta^0$ ,  $\beta \geq 0$ , следующие пять величин совпадают:

$$\begin{aligned} & - \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_f(t); \quad - \sup_{y>0} |f(iy) - i\beta y|; \\ & - \sup_{y>0} y |\operatorname{Im} f(iy) - \beta y|; \quad - \lim_{y \rightarrow \infty} y [\operatorname{Im} f(iy) - \beta y]; \quad i \lim_{y \rightarrow \infty} y [f(iy) - i\beta y]. \end{aligned}$$

<sup>(2)</sup> Это предложение оправдывает наименование „угловая производная“ для величины  $\beta = \beta_\beta$ .

**Предложение 7.** Пусть  $f \in \mathcal{R}_\beta^0$ ,  $\beta \geq 0$ , и пусть  $\int_{-\infty}^{\infty} d\omega_f(t) = c$ . Тогда выполняется равенство

$$(1.10) \quad \lim_{z \rightarrow \infty} z [f(z) - \beta z + c/z] = 0, \quad z \in \Pi_z^+(\lambda),$$

при любом  $\lambda$ ,  $0 < \lambda < \pi/2$ .

В самом деле, из (1.7) имеем

$$z [f(z) - \beta z + c/z] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t}{t-z} d\omega_f(t).$$

Замечая, что при  $z \in \Pi_z^+(\lambda)$  выполняются неравенства

$$\left| \frac{t}{t-z} \right| \leq \frac{1}{\sin \lambda}, \quad \left| \frac{z}{t-z} \right| \leq \frac{1}{\sin \lambda},$$

можем написать, что при  $A, B \in \mathbb{R}$

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{td\omega_f(t)}{t-z} \right| \leq \int_{-A+0}^{B-0} \frac{|t| d\omega_f(t)}{|z| \sin \lambda} + \frac{1}{\sin \lambda} \int_{-\infty}^{-A+0} d\omega_f(t) + \frac{1}{\sin \lambda} \int_{B-0}^{\infty} d\omega_f(t),$$

откуда

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{td\omega_f(t)}{t-z} \right| \leq \frac{1}{\sin \lambda} \left\{ \int_{-\infty}^{-A+0} d\omega_f(t) + \int_{B-0}^{\infty} d\omega_f(t) \right\} = \frac{1}{\sin \lambda} \left\{ c - \int_{-A+0}^{B-0} d\omega_f(t) \right\},$$

$z \in \Pi_z^+(\lambda), \quad 0 < \lambda < \pi/2$ .

Но правая часть стремится к нулю при  $A, B \rightarrow \infty$ , что и доказывает (1.10).

**Замечание 1.** Предложение 7 показывает, что для всякой функции  $f \in \mathcal{R}_\beta^0$ ,  $\beta \geq 0$ , существует конечный вещественный (неположительный) предел

$$(1.11) \quad \lim_{z \rightarrow \infty} z [f(z) - \beta z] = \{f\}_1, \quad z \in \Pi_z^+(\lambda),$$

$0 < \lambda < \pi/2$ , который равен

$$(1.12) \quad \{f\}_1 = - \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_f(t)$$

и который, следовательно, ввиду теоремы 1.2, совпадает с остальными четырьмя из пяти величин, фигурирующих в теореме 1.2.

**Замечание 2.** Можно показать,<sup>(3)</sup> что если для функции  $f \in \mathcal{R}$  выполнено условие

$$\lim_{y \rightarrow \infty} y [f(iy) - i\beta y + c/iy] = 0$$

<sup>(3)</sup> См. [4], с. 54–57, где изучены более тонкие свойства асимптотических представлений функций  $f \in \mathcal{R}$  при больших  $|z|$ ,  $z \in \Pi_z^+(\lambda)$ , выраженные в условиях существования степенных моментов  $\int_{-\infty}^{\infty} t^s d\omega_f(t)$  определенных порядков  $s = 0, 1, \dots$

с некоторыми постоянными числами  $\beta \geq 0$ ,  $c \geq 0$ , то  $f \in \mathcal{R}_\beta^0$ , причем величина  $\{f\}_1$ , определяемая любым из равенств (1.11) или (1.12), равна  $-c$ , а  $\beta_f = \beta$ .

**Замечание 3.** Справедливо также следующее утверждение: если для функции  $f \in \mathcal{R}$  хотя бы одна из пяти величин в теореме 1.2 конечна (при  $\beta > 0$ ), то конечны и все остальные, все пять величин совпадают и при этом  $f \in \mathcal{R}_\beta^0$ . Вообще, для любой функции  $f \in \mathcal{R}_\beta$ ,  $\beta \geq 0$ , все пять величин в теореме 1.2 (которые могут быть и бесконечными) совпадают.

**2.** На классе  $\mathcal{R}_\beta^0$ ,  $\beta \geq 0$ , значение функционала  $\{f\}_1$ , определяемого любым из равенств (1.11) или (1.12), заполняют весь промежуток  $(-\infty, 0]$ . При этом равенство  $\{f\}_1 = 0$ ,  $f \in \mathcal{R}_\beta^0$ , возможно тогда и только тогда, когда  $\omega_f(t) = \text{const}$ , то есть только при  $f'(z) = \beta z$ .

Зафиксируем произвольно число  $c \geq 0$  и обозначим через  $\mathcal{R}_\beta^0(c)$ ,  $\beta \geq 0$ , множество всех тех функций  $f \in \mathcal{R}_\beta^0$ , для которых  $\{f\}_1 = -c$ , и через  $\hat{\mathcal{R}}_\beta^0(c)$  — класс функций  $f \in \mathcal{R}_\beta^0$ , для которых выполнено условие  $|\{f\}_1| \leq c$ .

Отметим, что ввиду сказанного выше классы  $\mathcal{R}_\beta^0(0)$ ,  $\hat{\mathcal{R}}_\beta^0(c)$  состоят из единственной функции  $f(z) \equiv \beta z$  каждый.

**Предложение 7** показывает, что каждая функция  $f(z) \in \mathcal{R}_\beta^0(c)$ ,  $c \geq 0$ , допускает при  $z \in \Pi_z^+$  представление

$$(1.13) \quad f(z) = \beta z - c/z + o(\Pi_z^+),$$

где  $o(\Pi_z^+)$  — голоморфная в  $\Pi_z^+$  функция такая, что

$$\lim_{z \rightarrow \infty} |z| o(\Pi_z^+) = 0, \quad z \in \Pi_z^+(\lambda), \quad 0 < \lambda < \pi/2.$$

**Предложение 8.** Для всякой функции  $f \in \mathcal{R}_\beta^0(c)$  ( $f \in \hat{\mathcal{R}}_\beta^0(c)$ ),  $c \geq 0$ ,  $\beta \geq 0$ , при любом  $z \in \Pi_z^+$  выполняются неравенства

$$(1.14) \quad 0 \leq \frac{\operatorname{Im} f(z)}{\operatorname{Im} z} - \beta \leq \frac{c}{(\operatorname{Im} z)^2},$$

$$(1.15) \quad |f'(z) - \beta| \leq \frac{c}{(\operatorname{Im} z)^2},$$

$$(1.16) \quad |f^{(n)}(z)| \leq \frac{n! c}{(\operatorname{Im} z)^{n+1}}.$$

Неравенства (1.14) очевидно вытекают с учетом (1.12) из (1.4), а неравенства (1.15) и (1.16) — из (1.5) и соответственно (1.6).

**Теорема 1.3.** Для любого  $c \geq 0$  класс  $\mathcal{R}_\beta^0(c)$ ,  $\beta \geq 0$ , компактен в себе в топологии равномерной сходимости на множествах  $\overline{\Pi_{z\delta}^+(\lambda)}$ , где  $\Pi_{z\delta}^+(\lambda) = \{z: \operatorname{Im} z > \delta, \lambda < \arg z < \pi - \lambda\}$ ,  $\delta > 0$ ,  $0 < \lambda < \pi/2$ .

**Доказательство.** Возьмем произвольную последовательность  $\{f_m\}$  ( $m =$

$= 1, 2, \dots$ ) функций  $f_m \in \hat{\mathcal{R}}_\beta^0(c)$ . Обозначим через  $\omega_m = \omega_m(t)$  спектральную функцию  $f_m$ , нормированную условиями (2). Тогда

$$f_m(z) = \beta z + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega_m(t)}{t - z},$$

и полные вариации всех неубывающих на  $R$  функций  $\omega_m(t)$  ограничены в совокупности:

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\omega_m(t) \leq c \quad (m = 1, 2, \dots).$$

По второй теореме Хелли (см. [6], с. 290) из последовательности  $\{\omega_m\}$  ( $m = 1, 2, \dots$ ) можно выделить подпоследовательность  $\{\omega_{m_k}\}$  ( $k = 1, 2, \dots$ ), сходящуюся в каждой точке интервала  $R$  к некоторой неубывающей функции  $\omega_0(t)$ . По первой теореме Хелли (см. [6], с. 288) функция  $\omega_0(t)$  имеет ограниченную вариацию на  $R$ , причем

$$(1.17) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_{m_k}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_0(t) \leq c.$$

Рассмотрим функцию

$$f_0(z) = \beta z + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega_0(t)}{t - z}.$$

Эта функция ввиду (1.17) принадлежит классу  $\hat{\mathcal{R}}_\beta^0(c)$ . Покажем, что при  $k \rightarrow \infty$  последовательность  $\{f_{m_k}\}$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) сходится к  $f_0(z)$  равномерно на любом множестве  $\overline{\Pi_{z\delta}^+(\lambda)}$ ,  $\delta > 0$ ,  $0 < \lambda < \pi/2$ .

По теореме Хелли при  $k \rightarrow \infty$  в каждой точке  $z \in \overline{\Pi_z^+}$  выполняется  $f_{m_k}(z) - f_0(z) \rightarrow 0$ . Возьмем любое  $\varepsilon > 0$ . Так как при  $z \in \overline{\Pi_z^{+R}} = \{z: \operatorname{Im} z \geq R\}$ ,  $R > 0$ , выполняется

$$|f_{m_k}(z) - f_0(z)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega_{m_k}(t)}{|t - z|} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega_0(t)}{|t - z|} \leq 2 \frac{c}{R},$$

то, выбирая  $R < 2 \frac{c}{\varepsilon}$ ,  $R > \delta$ , получим

$$(1.18) \quad |f_{m_k}(z) - f_0(z)| < \varepsilon, \quad z \in \overline{\Pi_z^{+R}}.$$

Последнее неравенство выполняется для любого номера  $k = 1, 2, \dots$

Последовательность  $\{f_{m_k}\}$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) равномерно ограничена внутри  $\overline{\Pi_z^+}$ , так как для любых  $\gamma$ ,  $0 < \gamma < \pi/2$ ,  $\delta_1 > 0$  и  $\delta_2 > 0$ ,  $\delta_1 < \delta_2$ , при  $z \in \overline{\Pi_{z\delta_1}^{+\delta_2}(\gamma)}$ ,  $\overline{\Pi_{z\delta_1}^{+\delta_2}(\gamma)} = \{z: \delta_1 < \operatorname{Im} z < \delta_2, \gamma < \arg z < \pi - \gamma\}$ , имеем

$$|f_{m_k}(z)| \leq \beta z + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega_{m_k}(t)}{|t - z|} \leq \beta \frac{\delta_2}{\sin \gamma} + \frac{c}{\delta_1}.$$

Поэтому по теореме Витали (см. [5], с. 22–23) последовательность  $\{f_{m_k}\}$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) сходится к  $f_0(z)$  равномерно на  $\overline{\Pi_{z_0}^+(\lambda)}$ : для того же самого  $\varepsilon > 0$  найдется номер  $N(\varepsilon)$  такой, что при  $k > N(\varepsilon)$  будет выполнено

$$(1.19) \quad |f_{m_k}(z) - f_0(z)| < \varepsilon, \quad z \in \overline{\Pi_{z_0}^+(\lambda)}.$$

Из (1.18) и (1.19) вытекает, что при  $k > N(\varepsilon)$  выполняется

$$|f_{m_k}(z) - f_0(z)| < \varepsilon, \quad z \in \overline{\Pi_{z_0}^+(\lambda)}.$$

Теорема доказана.

Определение. Классом  $Q$  называется подкласс всех однолистных функций класса  $\mathcal{R}$ .

Условимся обозначать  $\mathcal{R}_\beta^0 \cap Q = Q_\beta$ ,  $\mathcal{R}_\beta^0(c) \cap Q = Q_\beta(c)$ ,  $\hat{\mathcal{R}}_\beta^0(c) \cap Q = \hat{Q}_\beta(c)$ .

Из теоремы 1.3 очевидно вытекает

Следствие. Для любого  $c \geq 0$  класс  $\hat{Q}_\beta(c)$ ,  $\beta \geq 0$ , компактен в себе в топологии равномерной сходимости на множествах  $\overline{\Pi_{z_0}^+(\lambda)}$ ,  $\delta > 0$ ,  $0 < \lambda < \pi/2$ .

## 2. Метод параметрического продолжения отображения полу平面ости в себя

1. По определению,  $Q_1$  — класс всех однолистных голоморфных в верхней полу平面ости  $\Pi_z^+$  функций  $w = f(z)$  отображающих  $\Pi_z^+$  в  $\Pi_w^+$  и таких, что существует конечный предел

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z[f(z) - z] = \{f\}_1, \quad z \in \Pi_z^+(\lambda),$$

при каждом  $\lambda$ ,  $0 < \lambda < \pi/2$ .<sup>(4)</sup> Если  $f \in Q_1$ , то всегда  $\{f\}_1 \leq 0$ , причем  $\{f\}_1 = 0$  только лишь при  $f(z) \equiv z$ . Класс  $Q(c)$  ( $\hat{Q}(c)$ ) при фиксированном  $c \geq 0$  состоит из всех тех и только тех функций  $f \in Q_1$ , для которых  $\{f\}_1 = -c$  ( $-\{f\}_1 \leq c$ ).

При любом  $c \geq 0$  класс  $Q(c)$  не пуст: ему принадлежат функции

$$(2.1) \quad f_a(z) = \sqrt{(z-a)^2 - 2c} + a, \quad a \in \mathbb{R},$$

при надлежащем выборе ветви радикала, причем  $\{f_a\}_1 = -c$ . Функция  $w = f_a(z)$  конформно отображает  $\Pi_z^+$  на область, получаемую из  $\Pi_w^+$  проведением в ней прямолинейного, параллельно минимой оси разреза длиной  $\sqrt{2c}$ , выходящего из точки  $w = a$  вещественной оси.

Пример семейства функций (2.1) показывает, что множество значений  $\{f\}_1$  на классе  $Q_1$  функций  $f$  (так же как и на объемлющем  $Q_1$  классе  $\mathcal{R}_0^0$ ) заполняет весь промежуток  $(-\infty, 0]$ .

Функции класса  $Q_1$  естественно возникают и играют важную роль при исследовании плоских потенциальных течений, упругих деформаций и других

<sup>(4)</sup> Здесь предел можно рассматривать при  $z = iy$ ,  $y \rightarrow \infty$ .

плоских задач механики сплошной среды. Например, при рассмотрении стационарного потенциального плоско-параллельного течения идеальной несжимаемой жидкости, обтекающей в верхней полу平面ости плоскости  $C_w$  со скоростью „невозмущенного“ потока в бесконечности, равной  $v$ ,  $v > 0$ , препятствие (профиль), лежащее на дне потока (на вещественной оси плоскости  $C_w$ ), комплексный потенциал течения описывается голоморфной функцией  $z = g(w)$ ,  $g(\infty) = \infty$ , однолистно отображающей односвязную область течения  $B \subset \Pi_w^+$  на  $\Pi_z^+$ . Будем считать, что область  $B$  такова, что её дополнение до  $\Pi_w^+$  ограничено. Покажем, что среди функций класса  $Q_1$  найдется единственная функция  $w = f(z)$ , осуществляющая отображение на область  $B$ . В самом деле, по теореме Римана существует функция  $w = \varphi(\zeta)$ ,  $\varphi(\infty) = \infty$ , конформно отображающая  $\Pi_z^+$  на  $B$ . По принципу симметрии Римана–Шварца функцию  $\varphi(\zeta)$  можно аналитически продолжить в нижнюю полу平面ость  $\Pi_z^-$  с условием симметрии  $\overline{\varphi(\bar{\zeta})} = \varphi(\zeta)$ ,  $\zeta \in \Pi_z^+$ . Продолженную функцию  $\varphi(\zeta)$  имеет смысл рассматривать не только при  $\zeta \in \Pi_z^+$  или  $\zeta \in \Pi_z^-$ , но и в некоторой окрестности бесконечно удаленной точки  $\zeta = \infty$ , где она будет однолистной. Ясно, что  $\varphi(\zeta)$  разлагается в этой окрестности в ряд Лорана

$$\varphi(\zeta) = a_1 \zeta + a_0 + \frac{a_{-1}}{\zeta} + \frac{a_{-2}}{\zeta^2} + \dots$$

с вещественными коэффициентами  $a_1, a_0, a_{-1}, \dots$  Верхняя полу平面ость допускает группу преобразований на себя вида  $\zeta = az + b$ ,  $a$  и  $b$  — вещественные числа,  $a \neq 0$ , оставляющих неподвижной бесконечно удаленную точку. Рассматривая функцию

$$w = f(z) = \varphi(az + b) = a_1 az + a_1 b + a_0 + \frac{a_{-1}}{az} + \dots,$$

отображающую  $\Pi_z^+$  на область  $B$ ,  $f(\infty) = \infty$ , убеждаемся, что подходящим выбором чисел  $a$  и  $b$  можно получить для  $f(z)$  разложение

$$(2.2) \quad f(z) = z + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \dots,$$

где  $c_1, c_2, \dots$  — вещественные. При этом  $\{f\}_1 = c_1$  и, следовательно,  $f \in Q(-c_1) \subset Q_1$ . Единственность функции  $f$  в  $Q_1$  легко доказывается от противного. Функция  $z = vf^{-1}(w)$  будет искомым комплексным потенциалом течения.

2. Введем в рассмотрение подкласс  $H$ , класса  $Q_1$ , содержащий те и только те функции  $f \in Q_1$ , которые в окрестности точки  $z = \infty$  допускают разложение в ряд Лорана вида (2.2) с вещественными коэффициентами  $c_1, c_2, \dots$

Выше было показано, что если односвязная область  $B \subset \Pi_z^+$  имеет ограниченное дополнение до  $\Pi_z^+$ , то в  $H$ , существует единственная функция  $f$  такая, что  $f(\Pi_z^+) = B$ . Очевидно и обратное: при  $f \in H$ , область  $f(\Pi_z^+) \subset \Pi_z^+$  имеет ограниченное дополнение до  $\Pi_z^+$ .

Совокупность всех функций  $f \in H_r$ , для которых  $\Pi_z^+ \setminus f(\Pi_z^+)$ , состоит из конечного числа жордановых кривых, будем обозначать через  $\tilde{H}$ .

Можно показать, (см. [7], с. 243), что подкласс  $\tilde{H}$  всюду плотен в классе  $H_r$  как в топологии равномерной сходимости функций внутри  $\Pi_z^+$ , так и в топологии равномерной сходимости в окрестности точки  $z = \infty$ .

В дальнейшем нам понадобится следующая

**Теорема 2.1** ([8], см. также [7], с. 234). *Пусть  $f \in \tilde{H}$ ,  $f(z) \neq z$ . Тогда существуют число  $\tau_0 > 0$  и вещественная кусочно-непрерывная на отрезке  $[0, \tau_0]$  функция  $u = u(\tau)$  такие, что  $f(z)$  можно представить в виде  $f(z) = \zeta(z, \tau_0)$ , где под  $\zeta = \zeta(z, \tau)$ ,  $0 \leq \tau \leq \tau_0$ , понимается решение дифференциального уравнения*

$$(2.3) \quad \frac{d\zeta}{d\tau} = \frac{1}{u - \zeta},$$

удовлетворяющее начальному условию  $\zeta|_{\tau=0} = z$ ,  $z \in \Pi_z^+$ . При этом  $\tau_0 = -\{f\}_1$ .

Дифференциальное уравнение (2.3) служит аналогом известного в теории функций уравнения Лёвнера для функций, голоморфных и однолистных в круге  $E = \{\zeta: |\zeta| < 1\}$ , и может быть получено из уравнения Лёвнера с помощью дробно-линейного преобразования полуплоскости  $\Pi_z^+$  на круг  $E$ .<sup>(5)</sup>

Укажем попутно ещё один результат, аналогичный теореме 2.1, устанавливающий вид уравнения типа Лёвнера для одного подкласса класса  $\tilde{H}$ .

Назовем классом  $\mathcal{R}^*$  совокупность всех функций  $w = f(z)$  класса  $\mathcal{R}$ , удовлетворяющих условию  $-f(-\bar{z}) = f(z)$ ,  $z \in \Pi_z^+$  и, следовательно, отображающих  $\Pi_z^+$  на области  $f(\Pi_z^+)$  в  $\Pi_w^+$ , симметричные относительно мнимой оси плоскости  $C_w$ . Обозначим  $\tilde{H} \cap \mathcal{R}^* = \tilde{H}^*$ .

**Теорема 2.2** ([9]). *Пусть  $f \in \tilde{H}^*$ ,  $f(z) \neq z$ . Тогда существуют число  $\tau_0 > 0$  и вещественная кусочно непрерывная на отрезке  $[0, \tau_0]$  функция  $u = u(\tau)$  такие, что  $f(z)$  можно представить в виде  $f(z) = \zeta(z, \tau_0)$ , где под  $\zeta = \zeta(z, \tau)$ ,  $0 \leq \tau \leq \tau_0$ , понимается решение дифференциального уравнения*

$$(2.4) \quad \frac{d\zeta}{d\tau} = \frac{\zeta}{u^2 - \zeta^2},$$

удовлетворяющее начальному условию  $\zeta|_{\tau=0} = z$ ,  $z \in \Pi_z^+$ . При этом  $\tau_0 = -\{f\}_1$ .

Как обратная к теореме 2.1 имеет место

**Теорема 2.3** ([7], с. 234). *Пусть  $\tau_0 > 0$  — произвольно-фиксированное число и  $u = u(\tau)$  — вещественная кусочно-непрерывная функция на отрезке  $[0, \tau_0]$  без точек разрыва второго рода. Тогда решение уравнения (2.3) с начальным условием  $\zeta|_{\tau=0} = z$ ,  $z \in \Pi_z^+$ , представляет функцию  $\zeta = \zeta(z, \tau)$ , кото-*

<sup>(5)</sup> В [8] дан непосредственный вывод уравнения (2.3) без использования уравнения Лёвнера.

рая при каждом фиксированном  $\tau$ ,  $0 < \tau < \tau_0$ , как функция параметра  $z$ ,  $z \in \Pi_z^+$ , принадлежит классу  $H_r$ . При этом  $\{\zeta\}_1 = -\tau$ ,  $0 \leq \tau \leq \tau_0$ .

Отметим, что для подкласса  $H_r^* = H_r \cap \mathcal{R}^*$  имеет место утверждение, вполне аналогичное теореме 2.3: *решение  $\zeta = \zeta(z, \tau)$ ,  $\zeta(z, 0) = z$ ,  $z \in \Pi_z^+$ , уравнения (2.4) с такой же, как в теореме 2.3, функцией  $u = u(\tau)$  принадлежит при любом  $\tau \in (0, \tau_0)$  классу  $H_r^*$ .*

Нетрудно проверить справедливость следующего результата.

**Лемма 2.1.** *Для любой функции  $f(z) \in Q_1$  существует последовательность  $\{f_n\}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) функций  $f_n$  класса  $\tilde{H}$ , сходящаяся к  $f(z)$  равномерно на всяком множестве  $\overline{\Pi_z^+}(\lambda)$ ,  $\delta > 0$ ,  $0 < \lambda < \pi/2$ , таких, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \{f_n\}_1 = \{f\}_1$  и при этом выполнено*

$$(2.5) \quad \{f_n\}_1 \leq \{f\}_1 \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Приведем еще один нужный для дальнейшего хорошо известный результат о предельном переходе под знаком интеграла Стильбеса.

**Лемма 2.2.** *Пусть  $\sigma(t)$  — неубывающая на некотором интервале  $I \subset R$  функция,  $F(t, y)$ ,  $t \in I$ ,  $y \geq 1$ , — непрерывная по  $t$  функция, которая при  $y \rightarrow \infty$  стремится к  $F_0(t)$  равномерно на любой конечной части  $R$ . Пусть, кроме того, существует непрерывная по  $t$  функция  $\Phi(t)$  такая, что  $|F(t, y)| \leq \Phi(t)$  при любых  $t \in I$  и  $y \geq 1$  и*

$$\int_I \Phi(t) d\sigma(t) < \infty.$$

Тогда

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \int_I F(t, y) d\sigma(t) = \int_I F_0(t) d\sigma(t).$$

3. На вещественной плоскости  $(\tau, t)$  рассмотрим множество  $U_y = \{(\tau, t): 0 < \tau < y, -\infty < t < \infty\}$ ,  $y < \infty$ .

Пусть  $\mathfrak{M}_y$  — класс всех вещественнонезначимых неубывающих на  $\overline{U}_y$  функций  $\mu(\tau, t)$ , нормированных условиями

$$(2.6) \quad \mu(0, t) = \mu(\tau, -\infty) = 0, \quad \mu(\tau, \infty) = \tau.$$

Условие неубывания функции  $\mu(\tau, t)$  понимается в следующем смысле: для любых четырех точек  $(\tau_1, t_1), (\tau_1, t_2), (\tau_2, t_1), (\tau_2, t_2)$ , из  $\overline{U}_y$  таких, что  $\tau_1 < \tau_2, t_1 < t_2$ , выполняется неравенство

$$\mu(\tau_1, t_2) + \mu(\tau_2, t_1) \leq \mu(\tau_1, t_1) + \mu(\tau_2, t_2).$$

Непосредственно из определения вытекает абсолютная непрерывность по  $\tau$ ,  $0 < \tau < y$ , функции  $\mu(\tau, t) \in \mathfrak{M}_y$  при каждом фиксированном  $t$ ,  $-\infty <$

<sup>(6)</sup> Можно показать, что всякую функцию  $f(z) \in Q_1$  можно, как и в лемме 2.1, аппроксимировать функциями  $f_n \in \tilde{H}$ , для которых вместо (2.5) выполняется обратное неравенство  $\{f_n\}_1 \geq \{f\}_1$  ( $n = 1, 2, \dots$ ).

$\leq t \leq \infty$ . В самом деле, для любых четверок точек  $(\tau_n, t_n) \in \bar{U}_\gamma$  ( $n, m = 1, 2$ ) таких, что  $\tau_1 < \tau_2, t_1 < t_2$ , имеем по условию неубывания  $\mu(\tau, t)$  на  $\bar{U}_\gamma$  следующее неравенство:

$$(2.7) \quad \mu(\tau_2, t_1) - \mu(\tau_1, t_1) \leq \mu(\tau_2, t_2) - \mu(\tau_1, t_2).$$

Полагая сначала  $t_1 = -\infty, t_2 = t, t \in \mathbb{R}$ , а затем  $t_1 = t, t_2 = \infty$ , и учитывая нормировку (2.6), находим, что

$$0 \leq \mu(\tau_2, t) - \mu(\tau_1, t) \leq \tau_2 - \tau_1$$

для любого  $t, -\infty \leq t \leq \infty$ , откуда вытекает наше утверждение.

Рассмотрим объединение  $\bigcup \mathfrak{M}_\gamma$  по всем  $\gamma, 0 < \gamma < \infty$ , и обозначим его через  $\mathfrak{M}$ .

Из (2.7) и абсолютной непрерывности по  $\tau$  функции  $\mu(\tau, t) \in \mathfrak{M}$  следует существование для почти всех  $\tau$ , на некотором конечном промежутке  $0 < \tau < \gamma, \gamma < \infty$ , суммируемой производной  $\mu'_\tau(\tau, t)$ .

Рассмотрим функцию

$$\nu(\tau, t) = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{\mu(\tau, t) - \mu(\tau - \Delta\tau, t)}{\Delta\tau}, \quad \Delta\tau > 0.$$

Функция  $\nu(\tau, t)$  определена при всех  $\tau, 0 < \tau < \gamma, t \in \mathbb{R}$ , и при фиксированном  $t$ , почти при всех  $\tau, 0 < \tau < \gamma, \nu(\tau, t) = \mu'_\tau(\tau, t)$ . Учитывая условие неубывания  $\mu(\tau, t)$ , имеем при  $\tau_1 < \tau_2, t_1 < t_2$

$$\lim_{\tau_1 \rightarrow \tau_2} \frac{\mu(\tau_2, t_1) - \mu(\tau_1, t_1)}{\tau_2 - \tau_1} \leq \lim_{\tau_1 \rightarrow \tau_2} \frac{\mu(\tau_2, t_2) - \mu(\tau_1, t_2)}{\tau_2 - \tau_1}$$

следовательно, при фиксированном  $\tau, 0 < \tau < \gamma, \nu(\tau, t)$  является неубывающей функцией по  $t$ . В силу (2.6) функция  $\nu(\tau, t)$  нормирована условиями  $\nu(\tau, -\infty) = 0, \nu(\tau, +\infty) = 1$ . Впредь, говоря о производной  $\mu'_\tau(\tau, t)$  функции  $\mu(\tau, t)$  будем считать, что символ  $\mu'_\tau(\tau, t)$  определен для всех  $\tau, 0 < \tau < \gamma, t \in \mathbb{R}$ , по формуле  $\mu'_\tau(\tau, t) = \nu(\tau, t)$ .

Будем обозначать через  $\mathfrak{N}$  класс всех таких однопараметрических семейств функций  $\nu_\tau(t)$ , измеримых по параметру  $\tau$  на некотором конечном промежутке  $(0, \gamma)$  (своем для каждой функции  $\nu_\tau(t)$ ), то есть будем считать измеримое по  $\tau, 0 < \tau < \gamma$ , семейство  $\nu_\tau(t)$  принадлежащим классу  $\mathfrak{N}$  тогда и только тогда, когда существует число  $\gamma, 0 < \gamma < \infty$ , такое что при почти всех фиксированных  $\tau, 0 < \tau < \gamma$ , функция  $\nu_\tau(t)$  неубывает и имеет на  $\mathbb{R}$  полную вариацию, равную единице.

Нетрудно видеть, что формула

$$\mu(\tau, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \nu_\tau(t) d\xi$$

устанавливает взаимно однозначное соответствие (с точностью до эквивалентности) между функциями классов  $\mathfrak{M}$  и  $\mathfrak{N}$ .

**Определение.** Пусть  $\{\mu_n\}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) — произвольная последовательность функций класса  $\mathfrak{M}$ . Каждая  $\mu_n = \mu_n(\tau, t)$  определена на некотором множестве  $\bar{U}_{\gamma_n}, 0 < \gamma_n < \infty$ . Пусть при  $\tau$  из некоторого промежутка  $T$ , принадлежащего всем промежуткам  $T_n = (0, \gamma_n)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), кроме, может быть, конечного их числа, определена функция  $\mu(\tau, t) \in \mathfrak{M}$ . Будем говорить, что последовательность  $\{\mu_n\}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) сходится к  $\mu$ , если во всех точках непрерывности функции  $\mu(\tau, t)$  выполнено условие

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(\tau, t) = \mu(\tau, t).$$

Для последовательностей  $\{\mu_n\}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) функций класса  $\mathfrak{M}$  имеет место теорема, аналогичная принципу выбора Хелли.

**Теорема 2.4.** Пусть  $\{\mu_n\}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) — произвольная последовательность функций  $\mu_n = \mu_n(\tau, t)$  класса  $\mathfrak{M}$ ,  $\mu_n(\tau, t)$  определена при  $\tau \in T_n = (0, \gamma_n), \gamma_n < \infty$ , и пусть при всех номерах  $n = 1, 2, \dots$ , кроме, быть может, конечного числа номеров, выполнено неравенство  $\gamma_n \geq \gamma, \gamma > 0$ . Тогда существует подпоследовательность  $\{\mu_{n_k}\}$  ( $k = 1, 2, \dots$ ), сходящаяся к некоторой функции  $\mu_0 \in \mathfrak{M}_\gamma$ .

**Теорема 2.5.** Если последовательность  $\{\mu_n\}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) функций класса  $\mathfrak{M}$  сходится к функции  $\mu_0 \in \mathfrak{M}_\gamma$ , то для любой непрерывной финитной функции  $F(\tau, t)$  в  $U_\gamma$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{U_\gamma} F d\mu_n = \int_{U_\gamma} F d\mu_0.$$

Будем использовать в дальнейшем теорему 2.5, в несколько видоизмененной форме.

Пусть комплекснозначная функция  $F(z, \tau, t)$ , непрерывная в  $\bar{U}_z^+ \times U_\tau$ , удовлетворяет условию  $|F(z, \tau, t)| \leq K(\varepsilon), K(\varepsilon) > 0$ , равномерно по отношению к  $(z, t)$  на  $\bar{U}_{z_0}^+ \times \bar{U}_\tau, \bar{U}_{z_0}^+ = \{z: \operatorname{Im} z > \delta\}, \delta > 0$ . Легко видеть, что для всякой функции  $\mu(\tau, t) \in \mathfrak{M}_\gamma$  интеграл

$$\int_{U_\gamma} F d\mu = \int_0^\gamma d\tau \int_{-\infty}^{\infty} F(z, \tau, t) \mu'_\tau(\tau, dt)$$

сходится равномерно по параметру  $z, z \in \bar{U}_{z_0}^+$ .

Пусть  $U_\tau = \{(\theta, t): 0 < \theta < \tau, -\infty < t < \infty\}, \tau \leq \gamma, \gamma < \infty$ , переменная область и

$$\Phi(\tau, F, \mu) = \int_{U_\tau} F d\mu.$$

**Теорема 2.5'.** При сохранении условий о последовательности  $\{\mu_n\}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), указанных в теореме 2.5, имеет место равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(\tau, F, \mu) = \Phi(\tau, F, \mu_0)$$

равномерно по  $z$  и  $\tau$ , соответственно, при  $z \in \bar{U}_{z_0}^+, \delta > 0$ , и на сегменте  $[0, \gamma]$ .

Действительно, достаточно заметить, что равномерная по  $\tau$  сходимость следует из равностепенной непрерывности семейства функций  $\{\Phi(\tau, F, \mu)\}$ ,  $\mu \in \mathfrak{M}_\gamma$ , на сегменте  $[0, \gamma]$  и сходимости в каждой точке  $\tau$ ,  $0 \leq \tau \leq \gamma$ .

4. Пусть  $R_0 = \mathcal{R}^0(1)$ , то есть  $R_0$  класс всех функций  $h(z)$  вида

$$(2.8) \quad h(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega(t)}{t-z},$$

где  $\omega(t)$  — неубывающая на  $\mathbb{R}$  функция, полная вариация которой на  $\mathbb{R}$  равна единице.

Будем обозначать через  $R(R_0, T)$ ,  $T = [0, \tau_0]$ ,  $\tau_0 < \infty$ , множество всех функций  $h(\zeta, \tau)$ , измеримых по  $\tau$ ,  $\tau \in T$ , при фиксированном  $\zeta \in \Pi_\zeta^+$  и принадлежащих классу  $R_0$  для почти всех  $\tau$  из  $T$ .

В силу интегрального представления (2.8) каждую функцию  $h(\zeta, \tau)$  класса  $R(R_0, T)$  можно представить в интегральной форме:

$$(2.9) \quad h(\zeta, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t-\zeta} \mu'_\tau(t, dt) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t-\zeta} \nu_\tau(t, dt),$$

где  $\nu_\tau(t) = \nu(\tau, t) = \mu'_\tau(t, t)$  — некоторое семейство из  $\mathfrak{N}$ ,  $\nu_\tau(-\infty) = 0$ ,  $\nu_\tau(\infty) = 1$ ,  $0 \leq \tau \leq \tau_0$ .

В частности, если  $\tilde{\nu}_\tau(t) \in \mathfrak{N}$  определено при  $0 \leq \tau \leq \tau_0$  следующим образом:

$$\tilde{\nu}_\tau(t) = \begin{cases} 0, & t < u(\tau), \\ 1, & t \geq u(\tau), \end{cases}$$

где  $u(\tau)$  — произвольная вещественная непрерывная или кусочно непрерывная на сегменте  $[0, \tau_0]$  функция, то

$$h(\zeta, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t-\zeta} \tilde{\nu}_\tau(t, dt) = \frac{1}{u(\tau)-\zeta}.$$

Совокупность всех таких семейств  $\tilde{\nu}_\tau(t)$  класса  $\mathfrak{N}$  будем обозначать через  $\tilde{\mathfrak{N}}$ , а соответствующий подкласс класса  $\mathfrak{M}$  через  $\tilde{\mathfrak{M}}$ .

Нетрудно убедиться, что любую функцию  $\nu_\tau(t)$  класса  $\mathfrak{N}$ ,  $\tau \in T$ , формула (2.9) преобразует в функцию класса  $R(R_0, T)$ . Таким образом, формула (2.9) дает интегральное параметрическое представление класса  $R(R_0, T)$ . В ней в качестве параметров выступают семейства  $\nu_\tau(t) \in \mathfrak{N}$  ( $\mu_\tau(t, t) \in \mathfrak{M}$ ). Отметим, что  $\nu_\tau(t)$  служит спектральной функцией функции  $h(\zeta, \tau)$  при почти всех фиксированных  $\tau \in T$  и, следовательно,  $\nu_\tau(t)$  в существенном однозначно определяется по функции  $h(\zeta, \tau)$ . В частности, для функции  $h(\zeta, \tau) \in R(R_0, T)$  тождество  $h(\zeta, \tau) \equiv 0$ ,  $\zeta \in \Pi_\zeta^+$ ,  $\tau \in T$ , возможно тогда и только тогда, когда её спектральная функция  $\nu_\tau(t)$  тождественно постоянна на  $\mathbb{R}$ .

5. Пусть  $\nu = \nu_\tau(t)$  — произвольное семейство класса  $\mathfrak{N}$ . Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$(2.10) \quad \frac{d\zeta}{d\tau} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t-\zeta} \nu(t, dt),$$

определенное для почти всех  $\tau$  из некоторого промежутка  $T = [0, \tau_0]$ ,  $\tau_0 < \infty$ , и обозначим через  $\zeta = f(z, \tau; \nu)$  его решение в смысле Каратеодори (то есть такую функцию, при которой (2.10) выполнено для почти всех  $\tau \in T$ , исключая, быть может, множество меры нуль), удовлетворяющее начальному условию

$$(2.11) \quad \zeta|_{\tau=0} = z, \quad z \in \Pi_z^+.$$

Следующий результат, принадлежащий С. Т. Александрову [10], обобщает теоремы 2.1 и 2.3, устанавливая интегродифференциальное параметрическое представление класса  $Q_1$ . При этом в роли параметров выступают функции класса  $\mathfrak{N}$  (или  $\mathfrak{M}$ ). Отметим, что этот результат аналогичен результату В. Я. Гутлянского [11], дающего критерий принадлежности функции классу  $S$  (однолистных голоморфных нормированных функций в единичном круге) в терминах параметра из известного класса  $C$  Каратеодори. При доказательстве теоремы С. Т. Александрова мы придерживаемся в основном схемы доказательства соответствующей теоремы В. Я. Гутлянского, описанный в книге [7].

**Теорема 2.6.** Для того, чтобы функция  $f$  принадлежала классу  $Q_1$ , необходимо и достаточно, чтобы её можно было представить в виде

$$f(z) = f(z, \tau_0; \nu), \quad \tau_0 \geq 0, \quad \nu \in \mathfrak{N}.$$

**Доказательство.** (а) Случай, когда  $\tau_0 = 0$ , очевидно приводит к функции  $f(z) = f(z, 0; \nu) = z$  класса  $Q_1$ . Пусть теперь  $\tau_0 > 0$  и  $\nu \in \mathfrak{N}$ . Тогда функция  $h(\zeta, \tau)$ , определяемая формулой (2.9), принадлежит классу  $R(R_0, T)$ ,  $T = [0, \tau_0]$ . По теореме Каратеодори (см. [12], с. 54) на некотором интервале  $0 \leq \theta \leq \tau < \gamma$ ,  $\gamma > 0$ , существует решение  $\zeta(\tau, \theta, z)$ ,  $\zeta(\theta, \theta, z) = z$ ,  $z \in \Pi_z^+$ , уравнения

$$(2.12) \quad \frac{d\zeta}{d\tau} = h(\zeta, \tau),$$

поскольку

$$(2.13) \quad |h(\zeta, \tau)| \leq \frac{1}{\operatorname{Im} \zeta}, \quad \zeta \in \Pi_\zeta^+.$$

При изменении  $\tau$  от  $\theta$  до  $\gamma$ ,  $\gamma > \theta$ , значения принимаемые  $\zeta(\tau, \theta, z)$ , остаются внутри полуплоскости  $\Pi_\zeta^+$ , что следует из неравенства

$$(2.14) \quad \frac{d \operatorname{Im} \zeta}{d\tau} = \operatorname{Im} h(\zeta, \tau) > 0,$$

выполняющегося для любой функции  $h(\zeta, \tau) \in R(R_0, T)$ ,  $h(\zeta, \tau) \not\equiv 0$ . Это обстоятельство позволяет продолжить решение  $\zeta(\tau, \theta, z)$  на весь промежуток  $T = [0, \tau_0]$ . Из принадлежности функции  $h(\zeta, \tau)$  классу  $R_0$  для почти всех  $\tau \in T$  следует голоморфность  $\zeta(\tau, \theta, z)$  относительно  $z$  в  $\Pi_{z\delta}^+$ . Правая часть уравнения (2.12) удовлетворяет согласно (2.9) в  $\Pi_{z\delta}^+$ ,  $\delta > 0$ , условию Лишица

$$|h(\zeta', \tau) - h(\zeta'', \tau)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\zeta' - \zeta''|}{|t - \zeta'| |t - \zeta''|} \nu(\tau, dt) \leq \frac{1}{\delta^2} |\zeta' - \zeta''|$$

равномерно по  $\tau$  в  $T$ . Поэтому, в силу теоремы единственности Каратеодори (см. [13], с. 123), через каждую точку  $(\theta, z) \in T \times \Pi_z^+$  проходит единственное решение  $\zeta = \zeta(\tau, \theta, z)$  уравнения (2.12) и, следовательно, функция  $\zeta(\tau, \theta, z)$  однолистна в полуплоскости  $\Pi_z^+$  при фиксированных  $\tau$  и  $t$ ,  $\tau \geq 0$ .

Рассмотрим функцию  $\zeta(\tau, 0, z)$ . Она является решением уравнения (2.10), удовлетворяющим условию (2.11). Следовательно,  $f(z, \tau; \nu) = \zeta(\tau, 0, z)$ . Покажем, что функция  $f(z) = f(z, \tau; \nu)$  принадлежит классу  $Q_1$ . Для этого достаточно показать, что  $\zeta(\tau, \theta, z) \in \mathcal{R}_1^0$  при произвольно фиксированных  $\tau$  и  $\theta$ ,  $0 < \tau \leq \theta$ . С этой целью, используя уравнение (2.12) и начальное условие  $\zeta(\theta, \theta, z) = z$ , запишем равенство

$$(2.15) \quad \zeta(\tau, \theta, z) = z + \int_0^\tau h(\zeta(\tau, \theta, z), \tau) d\tau.$$

Из (2.14) следует, что функция  $b(\tau, \theta, z) = \operatorname{Im} \zeta(\tau, \theta, z)$  при фиксированных  $\theta$  и  $z$ ,  $z \in \Pi_z^+$ , монотонно возрастает по  $\tau$  при  $\tau \geq \theta$ . Значит, при  $y > 0$  выполнено неравенство

$$(2.16) \quad y \leq b(\tau, \theta, x+iy), \quad x \in \mathbb{R}, \tau \geq \theta.$$

С учетом этого неравенства и неравенства (2.13) из (2.15) при любом  $y > 0$  имеем

$$y|b(\tau, \theta, iy) - y| \leq y \int_0^\tau |h(\zeta(\tau, \theta, iy), \tau)| d\tau \leq y \int_0^\tau \frac{d\tau}{b(\tau, \theta, iy)} \leq \tau - \theta, \quad \tau \in T.$$

Отсюда по теореме 1.2 и замечанию 3, I<sup>o</sup> § I, заключаем, что

$$\zeta(\tau, \theta, z) \in \mathcal{R}_1^0.$$

Таким образом, достаточность условия доказана. Сделаем в дополнение к доказанному одно уточнение.

Подсчет величины

$$\{\zeta(\tau, \theta, z)\}_1 = \lim_{z \rightarrow \infty} z[\zeta(\tau, \theta, z) - z], \quad z \in \Pi_z^+(\lambda), \quad 0 < \lambda < \pi/2,$$

с использованием (2.15), (2.9), (1.8) (при  $\beta = 1$ ) и с помощью леммы 2.2 дает

$$\{\zeta(\tau, \theta, z)\}_1 = -\tau + \theta.$$

Поэтому  $\{f\}_1 = -\tau_0$ . Итак,  $f \in Q(\tau_0)$ .

(б) Пусть  $f \in Q_1$ ,  $f(z) \not\equiv z$ . Тогда  $\{f\}_1 < 0$ . Обозначим  $-\{f\}_1 = \tau_0$ . По лемме 2.1 существует последовательность  $\{f_n\}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) функций  $f_n(z)$  класса  $\tilde{H}$ , сходящаяся к  $f(z)$  равномерно на множествах  $\tilde{\Pi}_{z\delta}^+(\lambda)$ ,  $\delta > 0$ ,  $0 < \lambda < \pi/2$ , и таких, что  $\{f_n\}_1 \rightarrow \{f\}_1$  при  $n \rightarrow \infty$ ,  $\{f_n\}_1 \leq \{f\}_1$  ( $n = 1, 2, \dots$ ). По теореме 2.1 каждую функцию  $f_n(z) \in \tilde{H}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) представим в виде

$$f_n(z) = f(z, \tau_n; \nu_n),$$

где  $\nu_n = \nu_n(\tau, t)$  определена на промежутке  $T_n = [0, \tau_n]$ ,  $\tau_n = -\{f_n\}_1$ , следующим образом:

$$\nu_n(\tau, t) = \begin{cases} 0, & t < u_n(\tau), \\ 1, & t \geq u_n(\tau), \end{cases}$$

$u_n(\tau)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) — вещественная функция, кусочно непрерывная на промежутке  $T_n$ . Имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n = \tau_0, \quad \tau_n \geq \tau_0 \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Введем в рассмотрение функции

$$\mu_n(\tau, t) = \int_0^\tau \nu_n(\zeta, \tau) d\zeta \quad (n = 1, 2, \dots)$$

класса  $\mathfrak{M}$ . Все они определены на промежутке  $0 \leq \tau \leq \tau_0$ . По теореме 2.4 существует подпоследовательность  $\{\mu_{n_k}\}$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) и функция  $\mu_0(\tau, t) \in \mathfrak{M}$  такие, что во всех точках непрерывности функции  $\mu_0(\tau, t)$  выполняется

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mu_{n_k}(\tau, t) = \mu_0(\tau, t), \quad 0 \leq \tau \leq \tau_0.$$

Пусть

$$f_0(z) = f(z, \tau_0; \nu_0),$$

где

$$\nu_0 = \nu_0(\tau, t) = \mu'_0(\tau, t).$$

Докажем, что  $f_0(z) \equiv f(z)$ . Для этого сначала установим равномерную сходимость при  $k \rightarrow \infty$  последовательности функций  $\zeta_{n_k} = f(z, \tau; \nu_{n_k})$  к функции  $\zeta_0 = f(z, \tau; \nu_0)$  по  $\tau$  и  $z$ , соответственно, в промежутке  $0 \leq \tau \leq \tau_0$  и в полу-плоскости  $\tilde{\Pi}_{z\delta}^+$ ,  $\delta > 0$  — любое. В силу (2.10) имеем

$$(2.17) \quad |\zeta_{n_k} - \zeta_0| \leq \int_0^\tau d\tau \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{t - \zeta_{n_k}} - \frac{1}{t - \zeta_0} \right| |\nu_{n_k}(\tau, dt) + |S_k(z, \tau)|,$$

где

$$S_k(z, \tau) = \int_0^\tau d\tau \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t - \zeta_0} [\nu_{n_k}(\tau, dt) - \nu_0(\tau, dt)].$$

По теореме 2.5' последовательность  $\{S_k(z, \tau)\}$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) равномерно относительно  $z$  и  $\tau$  при  $z \in \overline{\Pi_{z_0}^+}$ ,  $\delta > 0$ , и  $\tau \in [0, \tau_0]$  стремится к нулю при  $k \rightarrow \infty$ . Из (2.17) при  $z \in \overline{\Pi_{z_0}^+}$ ,  $\delta > 0$ ,  $0 \leq \tau \leq \tau_0$ , для любого  $\varepsilon > 0$  имеем

$$|\zeta_{n_k} - \zeta_0| \leq B \int_0^\tau |\zeta_{n_k} - \zeta_0| d\tau + \varepsilon,$$

где  $B = 1/\delta^2$ , при всех достаточно больших номерах  $k$ . Отсюда следует оценка

$$(2.18) \quad |\zeta_{n_k} - \zeta_0| \leq \varepsilon e^{r_0 B}, \quad z \in \overline{\Pi_{z_0}^+}, \quad 0 \leq \tau \leq \tau_0.$$

В самом деле, пусть  $|\zeta_{n_k} - \zeta_0| = e^{r_0 B} \varphi(z, \tau)$  и пусть

$$\varphi(z, \tau^*) = \max_{0 \leq \tau \leq \tau_0} \varphi(z, \tau), \quad z \in \overline{\Pi_{z_0}^+}.$$

Тогда

$$e^{r_0 B} \varphi(z, \tau) \leq B \int_0^\tau e^{r_0 B} \varphi(z, \tau) d\tau + \varepsilon \leq \varphi(z, \tau^*) (e^{r_0 B} - 1) + \varepsilon,$$

откуда при  $\tau = \tau^*$  получаем оценку

$$e^{r_0 B} \varphi(z, \tau^*) \leq \varphi(z, \tau^*) (e^{r_0 B} - 1) + \varepsilon,$$

приводящую к (2.18). Из (2.18) вытекает утверждение о равномерной сходимости  $f(z, \tau; v_n)$  к  $f(z, \tau; v_0)$  при  $k \rightarrow \infty$ .

Для завершения доказательства теоремы достаточно установить равномерную сходимость внутри  $\Pi_z^+$  последовательности  $\{f_{n_k}\}$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) к функции  $f_0(z)$ . Отсюда уже следует тождество  $f_0(z) \equiv f(z)$ .

Представим разность  $f_{n_k}(z) - f_0(z)$  в виде

$$f_{n_k}(z) - f_0(z) = f(z, \tau_0; v_{n_k}) - f(z, \tau_0; v_0) + \sigma_k(z),$$

где

$$\sigma_k(z) = \int_{\tau_0}^{\tau_{n_k}} d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{v_{n_k}(\tau, dt)}{t - \zeta_{n_k}}.$$

Так как при  $z \in \overline{\Pi_{z_0}^+}$  имеем

$$|\sigma_k(z)| \leq \int_{\tau_0}^{\tau_{n_k}} d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|v_{n_k}(\tau, dt)|}{|\text{Im } \zeta_{n_k}|} \leq \frac{1}{\delta} (\tau_{n_k} - \tau_0)$$

ввиду (2.18) разность  $f(z, \tau_0; v_{n_k}) - f(z, \tau_0; v_0)$  стремится к нулю равномерно относительно  $z \in \overline{\Pi_{z_0}^+}$  при  $k \rightarrow \infty$ , то, поскольку  $\tau_{n_k} - \tau_0 \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ , нужное доказано.

Теорема доказана полностью.

**6.** Приведем одну аналогичную теореме 2.6 теорему, дающую критерий принадлежности функции подклассу  $Q_1^* = Q_1 \cap \mathcal{R}^*$  функций  $f$  класса  $Q_1$ , обладающих свойством симметрии  $\bar{f}(-\bar{z}) = -f(z)$ ,  $z \in \Pi_z^+$ .

Пусть  $v = v(\tau, t) \in \mathfrak{N}$  и  $\zeta(z, \tau; v)$  — решение дифференциального уравнения

$$(2.19) \quad \frac{d\zeta}{d\tau} = \zeta \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v(\tau, dt)}{t^2 - \zeta^2},$$

удовлетворяющее начальному условию  $\zeta|_{\tau=0} = z$ ,  $z \in \Pi_z^+$ .

**Теорема 2.7.** Функция  $f(z)$  принадлежит классу  $Q_1^*$  тогда и только тогда, когда она может быть представлена в виде

$$(2.20) \quad f(z) = f(z, \tau_0; v), \quad \tau \geq 0, \quad v \in \mathfrak{N},$$

где  $f(z, \tau; v)$  — решение уравнения (2.19),  $f(z, 0; v) = z$ ,  $z \in \Pi_z^+$ .

Для доказательства достаточно заметить, что функция

$$h(\zeta, \tau) = \zeta \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v(\tau, dt)}{t^2 - \zeta^2} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v(\tau, dt)}{t - \zeta} + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v(\tau, dt)}{-t - \zeta}$$

принадлежит классу  $R_0$  при фиксированном  $\tau$  и, следовательно, функция  $f(z)$ , получаемая по формуле (2.20), принадлежит классу  $Q_1$ . Кроме того, как легко убедиться, она удовлетворяет условию  $\bar{f}(-\bar{z}) = -f(z)$  при любом  $z \in \Pi_z^+$ . Значит,  $f \in Q_1^*$ .

Возможность получения по формуле (2.20) любой функции класса  $Q_1^*$  вытекает из того, что подкласс  $\mathfrak{N}$  класса  $\mathfrak{N}$  посредством формулы (2.20) генерирует плотный в  $Q_1^*$  подкласс  $\tilde{H}^* = \tilde{H} \cap \mathcal{R}^*$ . Остается воспользоваться теоремой 2.2 и, так же как и в теореме 2.6, компактностью класса  $\mathfrak{N}$ .

### 3. Вариационные задачи на классе $Q_1$

Уравнение (2.12) или, что то же самое, (2.10) играет для функций, однолистных в полуплоскости  $\Pi_z^+$ , роль аналогичную роли уравнения Лёвнера-Куфарева для однолистных функций в единичном круге. Хорошо известны (см. [7]) многочисленные приложения уравнения Лёвнера-Куфарева к решению различных задач теории однолистных функций.

В этом параграфе, основываясь на полученном уравнении (2.12), которое будем называть уравнением типа Лёвнера-Куфарева для полуплоскости, мы дадим решение нескольких экстремальных задач на классе  $Q_1$  ( $Q(c)$ ,  $c > 0$ ), укажем способ получения вариационных формул на классах  $Q_1$  и  $Q(c)$ . Отметим, что возможны и другие применения этого уравнения.

1. Начнем с оценки на классе  $Q_1$  функционала  $\log f'(z)$ . (7)

**Теорема 3.1.** В классе  $Q_1$  функций  $f(z)$  при  $z \in \Pi_z^+$  имеет место точная оценка

$$(3.1) \quad |\log f'(z)| \leq \log \frac{\text{Im } f(z)}{\text{Im } z}.$$

(7) Под  $\log w$  понимается в дальнейшем ветвь логарифмической функции, голоморфная на множестве  $\Pi_z^+ \cup \{z : \text{Im } z = 0, \text{Re } z > 0\}$ ,  $\log 1 = 0$ .

*Доказательство.* Для функции  $f(z) \equiv z$  неравенство (3.1) выполняется. Пусть теперь  $f \in Q_1$  и  $f(z) \neq z$ ,  $\nu = \nu(\tau, t)$  — функция из  $\mathfrak{N}$ , определяющая  $f(z)$  по формуле  $f(z) = f(z, \tau_0; \nu)$ ,  $\tau_0 = -\{f\}_1 > 0$ , где  $\zeta = f(z, \tau; \nu)$  — решение задачи Коши

$$(3.2) \quad \frac{d\zeta}{d\tau} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\nu(\tau, dt)}{t - \zeta}, \quad \zeta|_{\tau=0} = z, \quad z \in \Pi_z^+.$$

Зафиксируем произвольное  $z_0 = x_0 + iy_0 \in \Pi_z^+$  и обозначим  $\operatorname{Im} f(z_0, \tau; \nu) = b(\tau) = b$ . Из (3.2) находим, что

$$(3.3) \quad \frac{db}{b} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\nu(\tau, dt)}{|t - \zeta_0|^2} d\tau > 0, \quad \zeta_0 = f(z_0, \tau; \nu).$$

Следовательно,  $b(\tau)$  на промежутке  $0 \leq \tau \leq \tau_0$  монотонно возрастает от  $b(0) = \operatorname{Im} z_0 = y_0$  до  $b(\tau_0) = \operatorname{Im} f(z_0) = y_1$ .

Из (3.2) дифференцированием по  $z$  имеем

$$(3.4) \quad \frac{d \log \zeta'_z}{d\tau} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\nu(\tau, dt)}{(t - \zeta)^2},$$

откуда интегрированием по  $\tau$  от  $\tau = 0$  до  $\tau = \tau_0$  получаем

$$(3.5) \quad \log f'(z_0) = \int_0^{\tau_0} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\nu(\tau, dt)}{(t - \zeta_0)^2} = \int_0^{\tau_0} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2i\alpha}}{|t - \zeta_0|^2} \nu(\tau, dt),$$

где  $\alpha = \arg(\zeta_0 - t)$ ,  $0 < \alpha < \pi$ . Из (3.5) имеем неравенство

$$|\log f'(z_0)| \leq \int_0^{\tau_0} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\nu(\tau, dt)}{|t - \zeta_0|^2},$$

которое после замены переменного в интеграле по  $\tau$  согласно (3.3) запишем в виде

$$|\log f'(z_0)| \leq \int_{y_0}^{y_1} \frac{db}{b} = \log \frac{y_1}{y_0},$$

что равносильно (3.1).

Равенство в (3.1) доставляется функцией  $f_a(z)$  вида (2.1) при  $a = \operatorname{Re} z_0$ . Теорема доказана.

**Следствие 1.** В классе  $Q_1$  функций  $f$  при  $z_0 \in \Pi_z^+$  имеют место оценки

$$(3.6) \quad \frac{\operatorname{Im} z_0}{\operatorname{Im} f(z_0)} \leq |f'(z_0)| \leq \frac{\operatorname{Im} f(z_0)}{\operatorname{Im} z_0},$$

$$(3.7) \quad \log \frac{\operatorname{Im} z_0}{\operatorname{Im} f(z_0)} \leq \arg f'(z_0) \leq \log \frac{\operatorname{Im} f(z_0)}{\operatorname{Im} z_0}.$$

Оценка слева в (3.6) точная; при  $f(z) \neq z$  знак равенства в правой части (3.6) не возможен ни в одной точке  $z_0 \in \Pi_z^+$ .

Замечание о невозможности знака равенства в правой части (3.6) следует из того, что величина  $\alpha$  в (3.5) не может принимать значения 0 или  $\pi$ .

Неравенства (3.1), (3.6), (3.7) уточняют и дополняют неравенства (1.2) и (1.5), справедливые на классах  $\mathcal{R}$  и  $\mathcal{R}_\beta$  соответственно на случай функций подкласса  $Q_1$  однолистных функций из  $\mathcal{R}_1$ .

Следующий результат уточняет неравенство (1.14) в случае  $f \in Q_1$ .

**Теорема 3.2.** В классе  $Q_1$  функций  $f(z)$  при  $z_0 \in \Pi_z^+$  имеет место точная оценка

$$(3.8) \quad \frac{\operatorname{Im} f(z_0)}{\operatorname{Im} z_0} \leq \sqrt{1 + \frac{2c}{(\operatorname{Im} z_0)^2}},$$

где  $c = -\{f\}_1$ .

Для доказательства достаточно проинтегрировать неравенство  $b db < dt$ , вытекающее из (3.3).

Из оценок (3.1), (3.8) непосредственно вытекает

**Следствие 2.** Для любой функции  $f \in Q_1$  при  $z_0 \in \Pi_z^+$  выполняется неравенство

$$(3.9) \quad |\log f'(z_0)| \leq \frac{1}{2} \log \left[ 1 + \frac{2c}{(\operatorname{Im} z_0)^2} \right],$$

где  $c = -\{f\}_1$ .

Оценка (3.9) уточняет (1.15) в случае  $f \in Q_1$ . Знаки равенства в (3.8), (3.9) доставляются функцией (2.1).

**Теорема 3.3.** Пусть  $f \in Q(c)$ ,  $c > 0$ ,  $z_1, z_2$  — произвольные две точки из  $\Pi_z^+$ ,  $z_1 = z_2$ . Тогда

$$\left| \log \frac{f(z_1) - f(z_2)}{z_1 - z_2} \right| \leq \frac{c}{\operatorname{Im} z_1 \operatorname{Im} z_2}.$$

Доказательство вытекает из интегрального представления

$$\log \frac{f(z_1) - f(z_2)}{z_1 - z_2} = \int_0^{\tau_0} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\nu(\tau, dt)}{(t - \zeta_1)(t - \zeta_2)},$$

$\zeta_k = f(z_k, \tau; \nu)$  ( $k = 1, 2$ ),  $\tau_0 = c = -\{f\}_1$ , легко получаемого из (3.2).

Приемом, аналогичным используемому при доказательстве теоремы 3.1, из уравнения (2.19) получается

**Теорема 3.4.** В классе  $Q_1^*$  функций  $f$  при каждом  $z_0 \in \Pi_z^+$ ,  $\operatorname{Re} z_0 \neq 0$ , имеет место точная оценка

$$\left| \log \frac{f(z_0) f'(z_0)}{z_0} \right| \leq \log \frac{\operatorname{Re} f(z_0) \operatorname{Im} f(z_0)}{\operatorname{Re} z_0 \operatorname{Im} z_0}.$$

2. Пусть  $f \in Q_1$ . Рассмотрим линии

$$L(f, y) = \{w: w = f(x+iy), -\infty < x < \infty, y = \text{const}\}, \quad y > 0,$$

$$L^*(f, x) = \{w: w = f(x+iy), x = \text{const}, y > 0\}, \quad -\infty < x < \infty.$$

Линию  $L(f, y)$ ,  $y > 0$ , будем называть линией уровня функции  $f$ . Семейство  $L^*(f, x)$ ,  $-\infty < x < \infty$  — семейство ортогональных траекторий к линиям уровня. <sup>(8)</sup>

Обозначим через  $K(f, y)$ ,  $K^*(f, x)$  кривизну линии  $L(f, y)$ , соответственно, линии  $L^*(f, x)$  в точке  $w = f(x+iy)$ ,  $y > 0$ . Легко установить, что

$$(3.10) \quad K(f, y) = \frac{1}{|f'(z)|} \operatorname{Im} \frac{f''(z)}{f'(z)}, \quad z = x+iy,$$

$$(3.11) \quad K^*(f, x) = \frac{1}{|f'(z)|} \operatorname{Re} \frac{f''(z)}{f'(z)}, \quad z = x+iy.$$

Под  $K^*(f, z)$  будем понимать любую из величин  $K(f, y)$ ,  $K^*(f, x)$ ,  $z = x+iy$ .

**Теорема 3.5.** Пусть  $f \in Q_1$ . Тогда для любого  $z_0 \in \Pi_z^+$

$$(3.12) \quad |K^*(f, z_0)| \leq \frac{1}{\operatorname{Im} z_0} \left[ \frac{\operatorname{Im} f(z_0)}{\operatorname{Im} z_0} - \frac{\operatorname{Im} z_0}{\operatorname{Im} f(z_0)} \right].$$

Для  $K(f, y)$  оценка точная: при  $K(f, y) < 0$  знак равенства в (3.12) доставляется функцией (2.1).

**Доказательство.** Будем применять обозначения и использовать результаты, встречавшиеся в ходе доказательства теоремы (3.1). Введем функцию

$$\Psi = \Psi(z, \tau) = \frac{\zeta''_{zz}}{\zeta_z^2},$$

$\zeta = f(z, \tau; v)$ , и функцию  $\Psi_0 = \Psi_0(\tau) = \Psi(z_0, \tau)$ . Для  $\Psi_0$  выполнены условия  $\Psi_0(0) = 0$ ,  $\Psi_0'(\tau_0) = f''(z_0)/f'^2(z_0)$ . Так как в силу (3.2)

$$\frac{\zeta'''_{zzz}}{\zeta_z^2} = \Psi p + q,$$

где

$$p = p(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v(\tau, dt)}{(t-\zeta)^2}, \quad q = q(\tau) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v(\tau, dt)}{(t-\zeta)^3}, \quad \Psi'_\tau = \frac{\zeta'''_{zzz}}{\zeta_z^2} - 2\Psi p,$$

то

$$(3.13) \quad \frac{d\Psi_0}{d\tau} + p_0 \Psi_0 = q_0,$$

<sup>(8)</sup> В гидродинамической интерпретации, когда  $C_w$  есть плоскость течения, а  $z = f^{-1}(w)$  — комплексный потенциал течения, (см. [1], § 2), линия  $L(f, y)$ ,  $y > 0$ , представляет собой линию тока,  $L^*(f, x)$  — линия равных потенциалов.

где

$$p_0 = p_0(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v(\tau, dt)}{(t-\zeta_0)^2}, \quad q_0 = q_0(\tau) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v(\tau, dt)}{(t-\zeta_0)^3}.$$

Здесь  $\zeta_0 = f(z_0, \tau; v)$ . Решая линейное дифференциальное уравнение (3.13) с условием  $\Psi_0(0) = 0$ , для величины

$$f''(z_0)/f'(z_0) = f'(z_0)\Psi_0(\tau_0),$$

с учетом равенства

$$(3.14) \quad f'(z_0) = e^{\int_0^{\tau_0} p_0 d\tau},$$

равносильного (3.5), найдем

$$(3.15) \quad \frac{f''(z_0)}{f'(z_0)} = 2 \int_0^{\tau_0} dt \left[ \exp \int_0^\tau \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v(\zeta, dt)}{(t-\zeta)^2} d\zeta \right] \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v(\tau, dt)}{(t-\zeta_0)^3}.$$

Умножая обе части (3.15) на  $|f'(z_0)|^{-1}$  и отделяя вещественную и мнимую части, ещё раз используя (4.14), получаем после замены переменного согласно равенству (3.3) следующие представления интересующих нас функционалов:

$$(3.16) \quad K(f, y_0) = 2 \int_{y_0}^{y_1} \sin \theta \exp \left( - \int_b^{y_1} \cos 2\alpha \frac{db}{b} \right) \sin \alpha \frac{db}{b^2},$$

$$(3.17) \quad K^*(f, x_0) = -2 \int_{y_0}^{y_1} \cos \theta \exp \left( - \int_b^{y_1} \cos 2\alpha \frac{db}{b} \right) \sin \alpha \frac{db}{b^2},$$

где

$$\theta = \theta(b) = 3\alpha + \sin 2\alpha \frac{db}{b}, \quad \alpha = \alpha(b).$$

Теперь, чтобы получить оценки (3.12), достаточно учесть, что подинтегральная функция внешнего интеграла в (3.16) достигает при  $\alpha = \pi/2$  своего наименьшего отрицательного значения, равного  $-y_1/b^3$  и, кроме того, модуль этой же величины является оценкой сверху модулей подинтегральных выражений в (3.16), (3.17).

Теорема доказана.

3. Дадим теперь в качестве примера приложения уравнения типа Лёвнера–Куфарева для полу平面ости вывод вариационных формул в классе  $Q_1$ . При этом мы будем следовать схеме рассуждений, с помощью которых Н. А. Лебедев [14] и позднее В. Я. Гуттлянский [15] дали способ получения вариационных формул в классах функций, однолистных в круге, из уравнения Лёвнера и из уравнения Лёвнера–Куфарева (см. также [7], с. 78–79).

**Теорема 3.6.** Пусть  $f$  — произвольная функция класса  $Q_1$  и  $\omega_1 = \omega_1(\tau, t)$ ,  $\omega_2 = \omega_2(\tau, t)$  — две вещественнонезначимые ограниченные функции, измеримые по  $\tau$  и непрерывные по  $t$  на множестве  $\bar{U}_{\tau_0}$ ,

$$U_{\tau_0} = \{(\tau, t) : 0 < \tau < \tau_0, -\infty < t < \infty\}, \quad \tau_0 = -\{f\}_1$$

и пусть  $v = v(\tau, t)$  — функция из  $\mathfrak{N}$ , определяющая  $f(z)$  по формуле  $f(z) = f(z, \tau_0; v)$ , где  $w = f(z, \tau; v)$  — решение задачи Коши (3.2). Тогда в классе  $Q_1$  существует семейство функций  $f(z, \varepsilon)$ , зависящих от вещественного параметра  $\varepsilon$ , такое, что при всех достаточно малых значениях  $|\varepsilon|$

$$(3.18) \quad f(z, \varepsilon) = f(z) + \varepsilon P(z) + o(\varepsilon, \Pi_z^+),$$

где

$$(3.19) \quad P(z) = f'(\bar{z}) \int_0^{\tau_0} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{\omega_1}{t-w} - \frac{\omega_2}{t-w} \right] \frac{v(\tau, dt)}{w'_z},$$

и  $o(\varepsilon, \Pi_z^+)$  — величина более высокого порядка малости, чем  $\varepsilon$ , на любом множестве  $\bar{\Pi}_z^+(\lambda)$ ,  $\delta > 0$ ,  $0 < \lambda < \pi/2$ .

**Доказательство.** Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{d\zeta}{dt} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 + \varepsilon \omega_1}{t + \varepsilon \omega_2 - \zeta} v(\tau, dt),$$

где  $\varepsilon$  — произвольное вещественное число, и обозначим через  $\zeta = f(z, \tau, \varepsilon; v)$  его решение с начальным условием  $\zeta|_{\tau=0} = z$ ,  $z \in \Pi_z^+$ . Можно показать, что  $f(z, \tau, \varepsilon; v)$  при всех достаточно малых  $|\varepsilon|$  представляет собой непрерывную по  $\tau$ ,  $0 < \tau \leq \tau_0$ , голоморфную и однолистную по  $z$  в полу-плоскости  $\Pi_z^+$  функцию. Записывая разложение функции  $f(z, \varepsilon) = f(z, \tau_0, \varepsilon; v) \in Q_1$  по степеням  $\varepsilon$  и замечая, что  $f(z, 0) = f(z)$ , приходим к формулам (3.18), (3.19).

Теорема доказана.

Укажем теперь способ получения вариационных формул к классу  $Q(c)$  ( $\hat{Q}(c)$ ) с помощью вариационных формул вида (3.18).

Дадим прежде один вспомогательный результат, верность которого проверяется непосредственно.

**Лемма 3.1.** Если  $f \in Q_1$ , то при любом  $\varrho$ ,  $\varrho > 0$ , классу  $Q_1$  принадлежит так же функция

$$\varphi(z, \varrho) = \frac{1}{\varrho} \varphi(\varrho z),$$

причем  $\{\varphi(z, \varrho)\}_1 = \varrho^{-2}\{f\}_1$ .

Пусть  $f \in Q(c)$ ,  $c > 0$ , и  $f(z, \varepsilon)$  — её вариация, получаемая по теореме 3.6. Вычисление величины  $c_1(\varepsilon) = \{f(z, \varepsilon)\}_1$  по формуле (см. 1, § 1)

$$c_1(\varepsilon) = -\lim_{y \rightarrow \infty} y [\operatorname{Im} f(iy, \varepsilon) - y]$$

с использованием (1.9) (при  $\beta = 1$ ) и леммы 2.2 о предельном переходе под знаком интеграла Стильтьеса, дает

$$c_1(\varepsilon) = \tau_0 + \varepsilon q + o(\varepsilon),$$

где

$$(3.20) \quad q = - \int_0^{\tau_0} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} \omega_1 v(\tau, dt),$$

$$\text{и } \tau_0 = -\{f\}_1 = c.$$

Рассмотрим новую функцию  $f^*(z, \varepsilon) = \frac{1}{\varrho} f(\varrho z, \varepsilon)$  при  $\varrho^2 = \varrho^2(\varepsilon) = c_1(\varepsilon)/c$ ,

$\varrho > 0$ . По лемме 3.1 имеем  $f^*(z, \varepsilon) \in Q(c)$ . Разлагая  $f^*(z, \varepsilon)$  по  $\varepsilon$ , имея в виду, что  $c_1(0) = c$ ,  $c'_1(0) = q$ , получим

$$(3.21) \quad f^*(z, \varepsilon) = f(z) + \varepsilon \left[ P(z) + \frac{q}{2\tau_0} (zf'(z) - f(z)) \right] + o(\varepsilon, \Pi_z^+), \quad \tau_0 = -\{f\}_1.$$

Итак, доказана

**Теорема 3.7.** Пусть  $f \in Q(c)$ ,  $c > 0$ , и выполнены все условия теоремы 3.6. Тогда классу  $Q(c)$  принадлежит зависящее от вещественного параметра  $\varepsilon$  семейство функций  $f^*(z, \varepsilon)$  такое, что при всех достаточно малых  $|\varepsilon|$  выполнено равенство (3.21) с величинами  $P(z)$  и  $q$ , определяемыми равенствами (3.19) и (3.20).

Очевидно, что если в формулировке этой теоремы везде вместо  $Q(c)$  писать  $\hat{Q}(c)$  и считать по-прежнему  $\tau_0 = -\{f\}_1 > 0$  (однако теперь будет  $\tau_0 \leq c$ ), то получится также верное утверждение. Другими словами, формула (3.21) дает вид вариационной формулы не только в классе  $Q(c)$ , но и в объемлющем  $Q(c)$  классе  $\hat{Q}(c)$ .

Наличие на компактном в себе классе  $\hat{Q}(c)$ ,  $c > 0$ , (см. следствие к теореме 1.3) вариационной формулы вида (3.21), содержащей две произвольные функции  $\omega_1, \omega_2$ , выбор которых достаточно широк, открывает принципиальную возможность решения на классе  $\hat{Q}(c)$  вариационным методом тех или иных экстремальных задач. Упомянем без доказательства один из результатов, получающихся на этом пути (ср. с результатами 1 настоящего параграфа).

**Теорема 3.8 ([16]).** На классе  $Q(c)$ ,  $c > 0$ , функции  $f(z)$  имеют место точные при любом фиксированном  $z_0 \in \Pi_z^+$  оценки

$$\frac{1}{\sqrt{1+2c/y_0^2}} \leq |f'(z_0)| \leq \frac{1}{2\sigma} e^{\sigma-1/2},$$

где

$$\sigma = \frac{y_0^2}{c} \left( \sqrt{1 + \frac{c}{y_0^2}} - 1 \right), \quad y_0 = \operatorname{Im} z_0.$$

## Литература

- [1] Н. И. Ахизер и И. М. Глазман, *Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве*, Наука, Москва 1966.
- [2] Ф. Аткинсон, *Дискретные и непрерывные граничные задачи*, Мир, Москва 1968.
- [3] М. Г. Крейн и А. А. Нудельман, *Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи*, Наука, Москва 1973.
- [4] Н. И. Ахизер и М. Г. Крейн, *О некоторых вопросах теории моментов*, Харьков 1938.
- [5] Г. М. Голузин, *Геометрическая теория функций комплексного переменного*, Наука, Москва 1966.
- [6] Г. Е. Шилов, *Математический анализ, Специальный курс, Физматгиз*, Москва 1960.
- [7] И. А. Александров, *Параметрические продолжения в теории односвязных функций*, Наука, Москва 1976.
- [8] П. П. Купарев, В. В. Спорышева, *Об одном методе исследования экстремальных задач для функций, односвязных в полуплоскости*, Вопросы геометрической теории функций, вып. 5 (1968) (Тр. Томского ун-та 200), 142-164.
- [9] В. В. Соболев, *Параметрическое представление для некоторых классов функций, односвязных в полуплоскости*, Учен. зап. Кемеровского пед. ин-та 23 (1970), 30-41.
- [10] С. Т. Александров, *Параметрическое представление функций односвязных в полуплоскости*, Вопросы геометрической теории функций, вып. 9 (находится в печати).
- [11] В. Я. Гутяинский, *Параметрическое представление односвязных функций*, ДАН СССР 194 (1970), 750-753.
- [12] Э. А. Коддингтон, Н. Левинсон, *Теория обыкновенных дифференциальных уравнений*, ИЛ, Москва 1958.
- [13] Дж. Сансоне, *Обыкновенные дифференциальные уравнения*, ИЛ, Москва 1954.
- [14] Н. А. Лебедев, *Некоторые оценки и задачи на экстремум в теории конформного отображения*, Диссертация, Ленинградский ун-т, 1951.
- [15] В. Я. Гутяинский, *Параметрические представления и экстремальные задачи в теории односвязных функций*, Диссертация, Киев, Матем. ин-т АН УССР, 1972.
- [16] Т. Н. Селляхова, *Исследование экстремальных свойств одного класса односвязных конформных отображений полуплоскости в себя*, Вопросы геометрической теории функций, вып. 8 (1977) (Тр. Томского ун-та), 55-70.

*Presented to the Semester  
COMPLEX ANALYSIS  
February 15-May 30, 1979*

## ON THE DOMAINS OF EXISTENCE FOR PLURISUBHARMONIC FUNCTIONS

URBAN CEGRELL\*

*Department of Mathematics, Uppsala University  
Thunbergsvägen 3, S-752 38 Uppsala, Sweden*

### 1. Introduction

Let  $U$  be an open subset of  $\mathbb{C}^n$  and denote by  $\text{PSH}(U)$  the plurisubharmonic functions on  $U$ . In Cegrell ([3], p. 322) it is proved that there is an open subset  $\tilde{U}$  containing  $U$  such that

- (1)  $|_U: \text{PSH}(\tilde{U}) \rightarrow \text{PSH}(U)$  is a bijection.
  - (2) If  $|_U: \text{PSH}(V) \rightarrow \text{PSH}(U)$  is a bijection then  $V \subset \tilde{U}$ .
- Here  $|_U$  denotes the restriction map.

The purpose of this paper is to study the situation where

$$|_U: \text{PSH}(V) \rightarrow \text{PSH}(U)$$

is a surjection, not necessarily a bijection. We wish to point out that we know of no example where the restriction map is surjective without being bijective.

### 2. Domains of existence

**DEFINITION.** Let  $U$  be an open connected subset of  $\mathbb{C}^n$ . We say that  $U$  is a *domain of existence* for the plurisubharmonic functions on  $U$  if there is a plurisubharmonic function on  $U$  which cannot be extended as a plurisubharmonic function to any open connected set strictly containing  $U$ .

In the same way we may speak about domains of existence for analytic functions, pluriharmonic functions and so on.

**EXAMPLE.** Any pseudoconvex domain is an example of a domain of existence for the plurisubharmonic functions. The converse is not true. Cf. Bremermann [2] and Cegrell [3], p. 329.

**THEOREM 2.1.** *Let  $U$  be an open connected subset of  $\mathbb{C}^n$ . Then there exists an*

\* Supported by the Swedish Natural Science Research Council Contract No. F 3435-100.