фициентов, когда первые производные аппроксимируются центрально-разностными отношениями ($\sim \Lambda^1_{\alpha'}$), то при $\tau \leqslant \tau_0$ справедливы оценки (1.6) теоремы 1.

Литература

[1] J. Douglas and H. Rachford, *On the numerical solution of heat conduction problems in two and three space variables*, Trans. Amer. Math. Soc. 82.2 (1956), стр. 421–439.

[2] D. Peaceman and H. Rachford, *The numerical solution of parabolic and elliptic differential equations*, J. Soc. Industr. Appl. Math. 3.1 (1955), стр. 28–42.

[3] А. А. Самарский, *Об одном экономичном разностном методе решения многомерного параболического уравнения в произвольной области*, Журн. вычисл. матем. и матем. физики 2.5 (1962), стр. 787–811.

[4] А. А. Самарский, И. В. Фрязинов, *О разностных схемах решения задачи Дирихле в произвольной области для эллиптического уравнения с переменными коэффициентами*, ibid. 11.2 (1971), стр. 385–410.

[5] —, —, *О сходимости локально-одномерной схемы решения многомерного уравнения теплопроводности на неравномерных сетках*, ibid. 11.3 (1971), стр. 642–657.

[6] А. А. Самарский, *Локально-одномерные схемы на неравномерных сетках*, ibid. 3.3 (1963), стр. 431–466.

[7] —, *Введение в теорию разностных схем*, „Наука", Москва 1971.

[8] И. В. Фрязинов, *Априорные оценки для одного семейства экономичных схем*, Журн. вычисл. матем. и матем. физики 9.3 (1969), стр. 595–604.

[9] Г. Штоиан, *К устойчивости аддитивных разностных схем по краевым данным*, ibid. 11.4 (1971), стр. 934–947.

[10] И. В. Фрязинов, *О разностных схемах для уравнения Пуассона в полярной, цилиндрической и сферической системах координат*, ibid. 11.5 (1971), стр. 1219–1228.

Presented to the Semester
Mathematical Models and Numerical Methods
(February 3–June 14, 1975)

BANACH CENTER PUBLICATIONS
VOLUME 3

КОРРЕКТНОСТЬ И СХОДИМОСТЬ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ С РАСЩЕПЛЯЮЩИМСЯ ОПЕРАТОРОМ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В ВЫПУКЛЫХ ОБЛАСТЯХ

М. ДРЫЯ

Институт Информатики, Варшавский Университет, Варшава, Польша

В работе исследуются разностные схемы с расщепляющимся оператором (см. [1], [2]) для квазилинейных параболических уравнений с однородными краевыми условиями 1 рода, рассматриваемых в цилиндре, основанием которого служит двумерная выпуклая область. Для этих схем установлена абсолютная устойчивость и сходимость в сеточных нормах пространств $L_2(\Omega)$ и $W_2^1(\Omega)$ на слое на неравномерных сетках по каждому пространственному переменному. Работа тесно связана с работой [3]. В ней обобщаются результаты, полученные в [3] на случай квазилинейных уравнений, причем получены оценки погрешности (см. теорему 4) лучше чем в [3]. Аналогичные результаты остаются справедливыми для систем параболических и гиперболических уравнений.

Разностные схемы с расщепляющимся оператором для квазилинейного уравнения, рассматриваемого в цилиндре, основанием которого является прямоугольник, рассматривались в [1], [4] и др. (см. библиографию в [1]).

1

В цилиндре $Q_T = \bar{\Omega}\times[0,T]$ основанием которого является двумерная выпуклая ограниченная область Ω с границей Γ рассматривается задача:

$$D_0 u + L(u) = F(x,t), \tag{1}$$

$$u(x,0) = \varphi(x),\ x\in\Omega, \quad u(x,t) = 0,\ x\in\Gamma,\ t\in[0,T], \tag{2}$$

где

$$L(u) = -\sum_{i=1}^{2} D_i a_i(x,t,Du) + a_0(x,t,Du), \quad (x,t) = (x_1,x_2,t),$$

$$D_i = \partial/\partial x_i, \quad D_0 = \partial/\partial t, \quad Du = (u, D_1 u, D_2 u).$$

Будем считать, что функции $a_i(x,t,p_0,p_1,p_2)$ дифференцируемые при $(x,t)\in\in Q_T$, $|p_i|<\infty$, $i=0,1,2,$ и выполнются следующие условия:

$$\delta_0\sum_{i=1}^{2}\xi_i^2\leqslant\sum_{i,j=1}^{2}\frac{\partial a_i}{\partial p_j}\,\xi_i\xi_j\leqslant\delta_1\sum_{i=1}^{2}\xi_i^2,\qquad\forall\xi\in R^2,\tag{3}$$

$$\max_{\substack{Q_T\\0\leqslant i,j\leqslant 2\\1\leqslant k\leqslant 2}}\left\{\left|\frac{\partial a_i}{\partial p_j}\right|,\left|\frac{\partial a_i}{\partial x_k}\right|\right\}\leqslant M.\tag{4}$$

Условия (3), (4) означают, что (1) является уравнением с ограниченной слабой нелинейностью. Отметим, что для ряда задач с неограниченной нелинейностью можно построить задачи с ограниченной нелинейностью, решение которых совпадает с решением исходных задач, используя прием работы [5].

2

Будем считать всю плоскость R^2 разбитой на элементарные прямоугольники сеткой R_h^2, вообще говоря, неравномерной по каждому x_r, $r=1,2$. Узлы сетки R_h^2 будем обозначать через

$$x\equiv x_i\equiv(x_1^{(i_1)},x_2^{(i_2)}),$$

где $i=(i_1,i_2)$ — вектор с целочисленными координатами. Пусть $h_r^{(i_r)}=x_r^{(i_r)}-x_r^{(i_r-1)}$ шаг сетки в точке x_i по направлению x_r, а $h_r^-\equiv h_r^{(i_r)}$, $h_r^+\equiv h_r^{(i_r+1)}$ — левый и правый шаг сетки в точке x_i по направлению x_r;

$$\hbar_r\equiv(h_r^-+h_r^+)/2,\qquad\hbar\equiv\hbar_1\hbar_2,$$

$$I_r^{\pm}x\equiv x+h_r^{\pm}e_r,\qquad I_r^{\pm}y(x)\equiv y(I_r^{\pm}x),$$

где e_r — орт направленный по оси x_r, $h\equiv\max\limits_{\Omega_h}\max\limits_{r}\hbar_r(x)$. Разностные отношения определяются по формулам:

$$\bar\partial_r y\equiv\bar\partial_r y(x)\equiv(y-I_r^-y)/h_r^-,\qquad\partial_r y\equiv(I_r^+y-y)/h_r^+,$$

$$\hat\partial_r y\equiv(I_r^+y-y)/\hbar_r,\qquad\check\partial_r y\equiv(y-I_r^-y)/\hbar_r,$$

$$\hat\partial_r\bar\partial_r y\equiv\check\partial_r\partial_r y\equiv\left((I_r^+y-y)/h_r^+-(y-I_r^-y)/h_r^-\right)/\hbar_r,$$

$$y_t^n\equiv(y^{n+1}-y^n)/\tau.$$

Через $\Omega_{\square,h}$ будем обозначать максимальный выпуклый многоугольник с вершинами в узлах x_i, содержащийся в $\bar\Omega$ и удовлетворяющий следующему условию: узлы x_i, находящиеся внутри $\Omega_{\square,h}$ принадлежат ему вместе с узлами вида:

$$I_r^{\pm}x_i,\qquad I_r^-I_l^+x_i\quad(r\neq l),\ \ r,l=1,2.$$

Множество узлов, находящихся внутри $\Omega_{\square,h}$ обозначим через Ω_h, а множество узлов, попавших на границу — через Γ_h. Так построенную сетку будем называть выпуклой.

Через $Q_{h\tau}\equiv\bar\Omega_h\times\omega_\tau$ будем обозначать пространственно-временную сетку, где

$$\omega_\tau=\{t=n\tau,n=0,\dots,N,\tau N=T\}.$$

Для сеточных функций, определенных на $\bar\Omega_h$ и равных нулю на Γ_h введем гильбертово пространство H, зависящее от h $(h\to 0)$ со скалярным произведением и нормой:

$$(u,v)=\sum_{x\in\Omega_h}\hbar u(x)v(x),\qquad\|u\|^2=(u,u).\tag{5}$$

Рассматриваемые разностные операторы отображают H в H и определяются при помощи соответствующих разностных выражений и финитного продолжения функции y на узлы x, не принадлежащие Ω_h (т.е. считаем, что $y(x)=0$ при $x\notin\Omega_h$). Кроме того, используем еще гильбертово пространство H_B, где $B=B^*>0$, отличающиеся от H лишь видом скалярного произведения и нормой, а именно:

$$(u,v)_B=(Bu,v),\qquad\|u\|_B^2\equiv(Bu,u).$$

3

Задаче (1), (2) поставим в соответствие следующую разностную схему с расщепляющимся оператором записываемую в операторном виде

$$(E+\theta\tau B_1)(E+\theta\tau B_2)y^{n+1}-y^n-\tau\theta By^n+\tau\Lambda^{(n)}(y^n)=\tau f^n,\tag{6}$$

$$y^0=\varphi,\qquad n=0,\dots,N-1,\tag{7}$$

где $\theta>0$, $\varphi,y^n,f^n\in H$,

$$(B_r y)(x)=-\hat\partial_r\bar\partial_r y(x),\qquad x\in\Omega_h,\qquad B=B_1+B_2,$$

$$\begin{aligned}(\Lambda^{(n)}(y^n))(x)=-0{,}5\{&\hat\partial_1 a_1(x,n\tau,y^n,\bar\partial_1 y^n,\check\partial_2 y^n)+\\&+\check\partial_1 a_1(x,n\tau,y^n,\partial_1 y^n,\hat\partial_2 y^n)+\hat\partial_2 a_2(x,n\tau,y^n,\check\partial_1 y^n,\bar\partial_2 y^n)+\\&+\check\partial_2 a_2(x,n\tau,y^n,\hat\partial_1 y^n,\partial_2 y^k)\}+\\&+0{,}5\{a_0(x,n\tau,y^n,\hat\partial_1 y^n,\hat\partial_2 y^n)+a_0(x,n\tau,y^n,\check\partial_1 y^n,\check\partial_2 y^n)\}.\end{aligned}$$

Перепишем эту схему в следующем виде

$$y_t^n+\theta\tau By_t^n+\theta^2\tau B_1B_2y^{n+1}+\Lambda^{(n)}(y^n)=f^n.\tag{8}$$

Перейдем к исследованию корректности рассматриваемой разностной схемы. В дальнейшем понадобятся нам четыре леммы. Легко доказать следующую:

Лемма 1. *Оператор B является самосопряженным и положительно определенным:*

$$B=B^*\geqslant\delta E,$$

где за δ можно взять, например, $4/D^2$, D — диаметр области Ω.

Лемма 2 (см. [3]). *На выпуклых сетках оператор*

$$\tilde{B} = 0{,}5(B_1 B_2 + B_2 B_1)$$

является самосопряженным и положительно определенным.

Непосредственными вычислениями проверяется справедливость лемм:

Лемма 3. *Пусть выполнены условия* (3), (4). *Тогда* $\forall v \in H$, $n = 0, \ldots$ $\ldots, N-1$ *оператор* $\Lambda^{(n)}$ *имеет производную Гато представленную в виде*

$$(\Lambda^{(n)})'_v = R^{(n)}_{1,v} + R^{(n)}_{0,v}, \tag{9}$$

причем операторы $R^{(n)}_{i,v}$ *удовлетворяют условиям*: $\forall y \in H$

$$\delta_0(By, y) \leqslant (R^{(n)}_{1,v}y, y) \leqslant \delta_1(By, y), \quad 0 < \delta_0 \leqslant \delta_1, \tag{10}$$

$$\|R^{(n)}_{0,v}y\|^2 \leqslant \varepsilon\|y\|^2_B - M(\varepsilon)\|y\|^2, \quad \varepsilon > 0. \tag{11}$$

Лемма 4 (см., например, [6]). *Пусть в каждой точке* $u+tz$, $0<t<1$, *гильбертового пространства* H *оператор* $\mathscr{P}$ *имеет производную Гато. Тогда существует* α, $0<\alpha<1$, *такое, что*

$$(\mathscr{P}(u+z) - \mathscr{P}(u), v)_H = (\mathscr{P}'_{u+\alpha z}z, v)_H.$$

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (3), (4) *и* f^k *представлена в виде* $f^k = f^k_1 + \tau f^k_2$.

Тогда на выпуклых сетках и при $\theta > \theta_0 > 0$ *схема* (6), (7) *корректна, т.е.*

$$\max_{0\leqslant n\leqslant N}\|y^n - \tilde{y}^n\|^2 + \sum_{n=0}^{N}\tau\|y^n - \tilde{y}^n\|^2_B \leqslant \tag{12}$$

$$\leqslant M\Big\{\|\varphi - \tilde{\varphi}\|^2 + \tau\|\varphi - \tilde{\varphi}\|^2_B + \tau\sum_{n=0}^{N-1}\{\|f^n_1 - \tilde{f}^n_1\|^2_{B^{-1}} + \tau\|f^n_2 - \tilde{f}^n_2\|^2_{\tilde{B}^{-1}}\}\Big\},$$

где $M \neq M(\varphi, \tilde{\varphi}, f^n, \tilde{f}^n) > 0$, y^n — *решение схемы* (6), (7), *а* $\tilde{y}^n$ — *решение той же схемы с начальным условием* $\tilde{y}^0 = \tilde{\varphi}$ *и правой частью* $\tilde{f}^n$.

Доказательство. Из (8) легко получить

$$\sum_{n=0}^{k-1}2\tau\{(z^n_t, z^{n+1}) + \theta\tau(Bz^n_t, z^{n+1}) + \theta^2\tau(B_1B_2z^{n+1}, z^{n+1}) + I^{(n)}\} = \tag{13}$$

$$= \sum_{n=0}^{k-1}2\tau\{(f^n_1 - \tilde{f}^n_2, z^{n+1}) + \tau(f^n_2 - \tilde{f}^n_2, z^{n+1})\},$$

где

$$z^n = y^n - \tilde{y}^n,$$

$$\begin{aligned} I^{(n)} &\equiv (\Lambda^{(n)}(y^n) - \Lambda^{(n)}(\tilde{y}^n), z^{n+1}) = \\ &= (\Lambda^{(n)}(y^n) - \Lambda^{(n)}(\tilde{y}^n), z^n) + \tau(\Lambda^{(n)}(y^n) - \Lambda^{(n)}(\tilde{y}^n), z^n_t) \equiv \\ &\equiv I^{(n)}_1 + I^{(n)}_2. \end{aligned}$$

На основе лемм 4 и 3 для $I^{(n)}_1$, $I^{(n)}_2$ получаем следующие оценки

$$I^{(n)}_1 \geqslant (\delta_0 - \varepsilon_1)\|z^n\|^2_B - M_1(\varepsilon_1)\|z^n\|^2, \tag{14}$$

$$I^{(n)}_2 \leqslant \varepsilon_2\|z^n\|^2_B + \tau^2 M_2(\varepsilon_2)\|z^n_t\|^2_B. \tag{15}$$

Слагаемые правой части (13) оценим сверху, используя ε-неравенство, следующим образом

$$2(F_1, z^{n+1}) \leqslant \varepsilon_3\|z^n\|^2_B + \varepsilon_4\tau^2\|z^n_t\|^2_B + \left(\frac{1}{\varepsilon_3} + \frac{1}{\varepsilon_4}\right)\|F_1\|^2_{B^{-1}}, \tag{16}$$

$$2(F_2, z^{n+1}) \leqslant \varepsilon_5\|z^{n+1}\|^2_{\tilde{B}} + \frac{1}{\varepsilon_5}\|F_2\|^2_{\tilde{B}^{-1}}, \tag{17}$$

где $F_i = f^n_i - \tilde{f}^n_i$.

Преобразуем первых два слагаемых правой части (13) с помощью очевидного тождества

$$2(Pz^n_t, z^{n+1}) = (Pz^n, z^n)_t + \tau(Pz^n_t, z^n_t),$$

где $P = P^*$ и подставим оценки (14)–(17) в (13). Тогда получим

$$\|z^k\|^2 + \theta\tau\|z^k\|^2_B + \sum_{n=0}^{k-1}\tau\{(2\delta_0 - 2\varepsilon_1 - 2\varepsilon_2 - \varepsilon_3)\|z^n\|^2_B + \tag{18}$$

$$+ \tau^2(\theta - M_2 - \varepsilon_4)\|z^n_t\|^2_B + 2\tau(\theta^2 - \varepsilon_5)\|z^{n+1}\|^2_{\tilde{B}}\} \leqslant$$

$$\leqslant \tau\sum_{n=0}^{k-1}\left\{\left(\frac{1}{\varepsilon_3} + \frac{1}{\varepsilon_4}\right)\|f^n_1 - \tilde{f}^n_1\|^2_{B^{-1}} + \frac{\tau}{\varepsilon_5}\|f^n_2 - \tilde{f}^n_2\|^2_{\tilde{B}^{-1}}\right\} + \|z^0\|^2 + \theta\tau\|z^0\|^2_B.$$

Выбирая ε_i достаточно малыми и беря $\theta > \theta_0 = M_2 + \varepsilon_4$ из (18) получаем (12).

Отметим, что представление f^k в виде $f^k = f^k_1 + \tau f^k_2$, конечно, не является ограничением, но удачный выбор его облегчает исследование сходимости и анализ погрешности.

4

Перейдем к исследованию корректности схемы с расщепляющимся оператором в более сильной норме чем в теореме 1. Очевидно, что это будет иметь место при более сильных предположениях о коэффициентах задачи (1), (2).

Рассмотрим схему немного отличающуюся от (6), а именно:

$$(E + \theta\tau B_1)(E + \theta\tau B_2)y^n_t + \Lambda^{(n)}(y^n) = f^n, \quad n = 0, \ldots, N-1, \tag{19}$$

с начальным условием (7).

Перепишем эту схему в виде

$$y^n_t + \theta\tau By^n_t + \theta^2\tau^2B_1B_2y^n_t + \Lambda^{(n)}(y^n) = f^n. \tag{20}$$

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* (3), (4) *и кроме того,*

$$\frac{\partial a_i}{\partial p_j} = \frac{\partial a_j}{\partial p_i}, \quad \left|\frac{\partial^2 a_i}{\partial t\,\partial p_j}\right| \leqslant M, \quad i, j = 1, 2. \tag{21}$$

Пусть f^k *представлена в виде* $f^k = f^k_1 + \tau^2 f^k_2 + f^k_0$.

Тогда на выпуклых сетках и при $\theta \geqslant 0{,}5\delta_1$ *схема* (19), (7) *корректна, т.е.*

$$\max_n \|y^n-\tilde{y}^n\|_B^2 \leqslant M\Big\{\|f_1^0-\tilde{f}_1^0\|_{B^{-1}}^2+\tau\sum_{n=0}^{N-2}[\|(f_1^n-\tilde{f}_1^n)_t\|_{B^{-1}}^2+ \tag{22}$$
$$+\|f_2^n-\tilde{f}_2^n\|_{B^{-1}}^2+\|f_0^n-\tilde{f}_0^n\|^2]+\|\varphi-\tilde{\varphi}\|_B^2\Big\},$$

где $\tilde{y}^n$ — *решение* (20), (7) *с* $\tilde{y}^0=\tilde{\varphi}$ *и правой частью* $\tilde{f}^n$, $M \neq M(f^n,\tilde{f}^n,\varphi,\tilde{\varphi}) > 0$.

Доказательство. Из (20) получаем

$$\tau\sum_{n=0}^{k-1}\{\|z_t^n\|^2+\theta\tau\|z_t^n\|_B^2+\theta^2\tau^2\|z_t^n\|_{\bar{B}}^2+I^{(n)}\} = \tau\sum_{n=0}^{k-1}(f^k-\tilde{f}^k, z_t^n), \tag{23}$$

где

$$z^n = y^n-\tilde{y}^n, \qquad I^{(n)} \equiv (\Lambda^{(n)}(y^n)-\Lambda^{(n)}(\tilde{y}^n), z_t^n).$$

На основе лемм 3 и 4 имеем

$$I^{(n)} = (R_{1,v}^{(n)}z^n, z_t^n)+(R_{0,v}^{(n)}z^n, z_t^n) = I_1^{(n)}+I_2^{(n)}.$$

Условия (21) гарантируют, что оператор $R_{1,v}^{(n)}$ является самосопряженным и удовлетворяет условию Липшица по t (см. [2]). Поэтому

$$\tau\sum_{n=0}^{k-1}(R_{1,v}^{(n)}z^n, z_t^n) = \frac{\tau}{2}\sum_{n=0}^{k-1}\{(R_{1,v}^{(n)}(z^{n+1}+z^n), z_t^n)-\tau(R_{1,v}^{(n)}z_t^n, z_t^n)\} \geqslant \tag{24}$$
$$\geqslant \frac{1}{2}\{\delta_0\|z^k\|_B^2-\delta_1\|z^0\|_B^2\}-\tau\sum_{n=0}^{k-1}\{\delta_1\tau^2\|z_t^n\|_B^2+M_1\|z^n\|_B^2\}.$$

Слагаемое соответствующее $F_1^n=f_1^n-\tilde{f}_1^n$ в правой части (23) оценим следующим образом (см. [3])

$$\tau\sum_{n=0}^{k-1}(F_1^n, z_t^n) \leqslant \varepsilon\|z^k\|_B^2+\|z^0\|_B^2+\left(\frac{2}{\varepsilon}+1\right)\|F_1^0\|_{B^{-1}}^2+ \tag{25}$$
$$+M(\varepsilon)\tau\sum_{n=0}^{k-2}\|F_{1t}^n\|_{B^{-1}}^2+\tau\sum_{n=1}^{k-1}\|z^n\|_B^2.$$

Подставляя оценки (25), (24) вместе с оценками (15)–(17) в (23) получаем неравенство, из которого при соответствующем выборе ε следует оценка (22).

5

Теперь исследуем сходимость рассматриваемых разностных схем.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть выполнены условия теоремы* 1 *и функции*

$$D_1^{\alpha_1}D_2^{\alpha_2}u \quad (\alpha_1+\alpha_2 \leqslant 4), \quad D_0D_iu, \quad D_i(\partial a_i/\partial p_j), \quad i,j = 1,2,$$

ограниченные при $(x,t)\in Q_T$, $p\in R^3$.

Тогда, если $\hbar_1$ *и* $\hbar_2$ *одного и того же порядка* h, *для погрешности разностной схемы* (6), (7) *справедлива оценка*

$$\max_n\|y^n-u^n\|^2+\sum_{n=0}^{N}\tau\|y^n-u^n\|_B^2 \leqslant MQ_1(\tau,h), \tag{26}$$

где y^n, u^n — *решения соответственно* (6), (7) *и* (1), (2), $M \neq M(\tau,h) > 0$. *Причем*

1) *в случае равномерной сетки по* x_r,

$$Q_1 = \tau^2+h+\tau^2/h^3.$$

Кроме того, если $\Gamma_h\subset\Gamma$ *то соответственно имеем*

2) *в случае неравномерной сетки по* x_r,

$$Q_1 = \tau^2+h^2+\tau^2/h,$$

3) *а в случае равномерной сетки по* x_r,

$$Q_1 = \tau+h^4+\tau^2/h.$$

Доказательство. Решение задачи (1), (2) взятое на сетке представим в виде $u^n = u_\Omega^n+u_\Gamma^n$, где

$$u_\Gamma^n = \{0 \text{ для } x\in\Omega_h,\ u^n(x) \text{ для } x\in\Gamma_h\}.$$

Функция u_Ω^n удовлетворяет уравнению (8) с правой частью $\tilde{f}^n$ вида

$$\tilde{f}^n = [F(x)]^n+\xi_0^n+\xi_1^n+\xi_2^n+\tau\xi_3^n,$$

где

$$\xi_0^n(x) = (u_\Omega^n)_t-[D_0u]^n, \quad \xi_1^n(x) = (\Lambda^{(n)}(u_\Omega^n))(x)-[L(u)]^n,$$
$$\xi_2^n(x) = (\theta^2\tau Bu_{\Omega,t}^n)(x), \quad \xi_3^n(x) = (\theta^2B_1B_2u_\Omega^{n+1})(x),$$

а $[v(x,t)]^n$ обозначает значение непрерывной функции $v(x,t)$ в узле $(x,n\tau)$.

Учитывая условия теоремы 3 и то, что $u(x)=0$, $x\in\Gamma$, имеем $\|\xi_0^n\| = O(\tau)$, $\|\xi_1^n\|_{B^{-1}} = O(h^{1/2})$ — р.с. (равномерная сетка), а в случае $\Gamma_h\subset\Gamma$: $\|\xi_1^n\|_{B^{-1}} = O(h)$ — нер. с. и $\|\xi_1^n\|_{B^{-1}} = O(h^2)$ — р.с.

Аналогично оценивается ξ_2^n в норме $\|\cdot\|_{B^{-1}}$ за исключением случая нер. с. и $\Gamma_h\subset\Gamma$, когда $\|\xi_2^n\|_{B^{-1}} = O(h^2)$.

Перейдем к оценке ξ_3^n в норме $\|\cdot\|_{\bar{B}^{-1}}$. Так как $\hbar_1$ и $\hbar_2$ одного и того же порядка h, то

$$\|B_1B_2u_\Omega^k\|_{\bar{B}^{-1}} \leqslant M\|B_2u_\Omega^k\|_{B_1}.$$

Поэтому

$$\|B_1B_2u_\Omega^k\|_{\bar{B}^{-1}} = O(h^{-1/2})$$

в случае нер. с. и при $\Gamma_h\subset\Gamma$,

$$\|B_1B_2u_\Omega^k\|_{\bar{B}^{-1}} = O(h^{-3/2})$$

в случае р.с. и при $\Gamma_h\not\subset\Gamma$.

Считая $f_1^n(x) = [F(x,t)]^n$ и принимая за $f_2 = 0$, $\tilde{f}_1 = [F(x)t]^n + \xi_0^n + \xi_1^n + \xi_2^n$ и $\tilde{f}_2^n = \xi_3^n$ из теоремы 1 следует оценка

$$\|y^n - u_\Omega^n\|^2 + \tau \sum_{n=0}^{N} \|y^n - u_\Omega^n\|^2 \leqslant MQ(\tau, h). \tag{27}$$

Используя неравенство треугольника и учитывая, что $u(x) = 0$, $x \in \Gamma_h$, и неравенство (27) получаем (26).

Перейдем к исследованию сходимости разностной схемы (19), (7).

Теорема 4. *Пусть выполнены условия теоремы 2 и функции*

$$D_0 D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} u \quad (\alpha_1 + \alpha_2 \leqslant 4), \quad D_0^2 u, \quad D_0^2 D_i u, \quad D_0 D_i(\partial a_i/\partial p_j), \quad i, j = 1, 2,$$

ограниченные при $(x,t) \in Q_T$, $p \in R^3$.

Тогда, если $\hbar_1$ *и* $\hbar_2$ *одного и того же порядка* h, *для погрешности разностной схемы* (19), (7) *справедлива оценка*

$$\max_n \|y^n - u^n\|_B^2 \leqslant MQ_2(\tau, h), \tag{28}$$

где y^n *и* u^n *решения соответственно* (19), (7) *и* (1), (2). *Причем*

1) *в случае равномерной сетки по* x_r

$$Q_2 = \tau^2 + h + \tau^4/h^3.$$

Кроме того, если $\Gamma_h \subset \Gamma$ *то соответственно имеем*

2) *в случае неравномерной сетки по* x_r

$$Q_2 = \tau^2 + h^2 + \tau^4/h,$$

3) *а в случае равномерной сетки по* x_r

$$Q_2 = \tau^2 + h^4 + \tau^4/h.$$

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 3.

Замечание. В случае когда $\Gamma_h \not\subset \Gamma$ норму $\|y^n - u^n\|_B$ в теореме 4 нужно понимать как сеточную в $W_2^1(\bar{\Omega}_h)$ а норму в теореме 3 — как в $L_2(\bar{\Omega}_h)$.

Примечание при корректуре. Теоремы 3 и 4 остаются справедливыми с оценками погрешности, в которых h в знаменателе есть на одну степень меньше чем в (26) и (28).

Литература

[1] Е. Г. Дьяконов, *Разностные методы решения краевых задач*, Выпуск II (нестационарные задачи), Изд-во МГУ, 1972.

[2] А. А. Самарский, *Введение в теорию разностных схем*, „Наука'', Москва 1971.

[3] М. Дрыя, *Абсолютная устойчивость разностных схем с расщепляющимся оператором для систем параболических и гиперболических уравнений в выпуклых областях*, Журн. вычисл. матем. и матем. физики 15.4 (1975), стр. 966–976.

[4] М. М. Карчевский, А. В. Лапин, А. Д. Ляшко, *Экономичные разностные схемы для квазилинейных параболических уравнений*, Изв. вузов, матем. 3 (118), (1972), стр. 24–31.

[5] В. Я. Ривкинд, Н. Н. Уральцева, *Классическая разрешимость и линейные схемы приближенного решения задач диффракции для квазилинейных эллиптических и параболических уравнений*, Проблемы мат. анализа, Вып. 3, Изд-во ЛГУ, 1972.

[6] Е. Г. Дьяконов, *Разностные методы решения краевых задач*, Выпуск I (стационарные задачи), Изд-во МГУ, 1971.

Presented to the Semester
Mathematical Models and Numerical Methods
(February 3–June 14, 1975)