COMPUTATIONAL MATHEMATICS
BANACH CENTER PUBLICATIONS, VOLUME 13
PWN—POLISH SCIENTIFIC PUBLISHERS
WARSAW 1984

# НЕКОРРЕКТНО ПОСТАВЛЕННЫЕ ЗАДАЧИ С ПРИБЛИЖЁННО ЗАДАННЫМ ОПЕРАТОРОМ

А. Г. ЯГОЛА

*Московский Государственный Университет, Физический Факультет, Москва, СССР*

Некорректно поставленные задачи с приближённо заданным оператором часто встречаются при решении прикладных задач. К ним относятся, например, интегральные уравнения Фредгольма первого рода в случае, если не только правая часть уравнения, но и ядро уравнения находятся в результате эксперимента. Впервые вопрос о решении некорректно поставленных задач с приближённо заданным оператором был рассмотрен А. Н. Тихоновым [1], [2] на примере систем линейных алгебраических уравнений с возмущённой матрицей. В настоящей статье будет рассмотрен вопрос о решении такого рода задач с помощью так называемых обобщённого метода невязки и обобщённого принципа невязки. Из-за недостатка места все утверждения будут приводиться без доказательств, однако будут даны ссылки на статьи, в которых даются полные доказательства.

## 1. Обобщённый метод невязки

Пусть дано операторное уравнение

$$AVz = u, \tag{1}$$

где $A$ — непрерывный взаимнооднозначный оператор, действующий из нормированного пространства $X$ в нормированное пространство $U$, $V$ — взаимнооднозначный оператор, действующий из рефлексивного, обладающего $H$-свойством пространства $Z$ в $X$, усиленно непрерывный, т.е. для любой последовательности $z_n$, слабо сходящейся к $z_0$, $Vz_n \to Vz_0$ (в частности, если $Z$ компактно вложено в $X$, то $V$ может быть оператором вложения). Напомним, что пространство $Z$ обладает $H$-свойством, если из слабой сходимости последовательности $z_n$ к $z_0$

и сходимости $\|z_n\| \to \|z_0\|$ следует сильная сходимость $z_n \to z_0$ (см., например, [3]).

В силу рефлексивности пространства $Z$ $AV$ есть взаимнооднозначный, усиленно непрерывный оператор из $Z$ в $U$. Пусть $D \subseteq Z$ — выпуклое замкнутое множество ограничений задачи (1), принадлежащее области определения оператора $AV$ (в частности, $D = Z$). Пусть нам заданы не точные значения оператора $A$ и правой части уравнения $\bar{u} = AV\bar{z}$, $\bar{z} \in D$, а их некоторые приближения $A_h$ и $u_\delta$ такие, что $\|u_\delta - \bar{u}\| \leqslant \delta$; $A_h$ — непрерывный оператор из $X$ в $U$, причём для любого $z \in D$

$$\|A_h Vz - AVz\| \leqslant \psi(h, \|Vz\|),$$

где $\psi(h, y)$ — непрерывная по совокупности аргументов при $h \geqslant 0$ $y \geqslant 0$, монотонно неубывающая по первому аргументу, неотрицательная функция такая, что $\lim\limits_{h \to +0} \psi(h, y) = 0$ равномерно по $y$ на любом интервале $0 \leqslant y \leqslant C$ (числа $h \geqslant 0$, $\delta \geqslant 0$ и функция $\psi(h, y)$ предполагаются известными). Обозначим $\eta = (h, \delta)$.

Рассмотрим экстремальную задачу: найти

$$\inf_{z \in Z_\eta^*} \|z\|; \tag{2}$$

где $Z_\eta^* = \{z \in D\colon \|A_h Vz - u_\delta\| \leqslant \delta + \psi(h, \|Vz\|)\}$.

Очевидно, что если $\|u_\delta - \bar{u}\| \leqslant \delta$; $\bar{u} = AV\bar{z}$; $\bar{z} \in D$; то $Z_\eta^* \neq \emptyset$, т.к. $\bar{z} \in Z_\eta^*$: $\|A_h V\bar{z} - u_\delta\| = \|A_h V\bar{z} - AV\bar{z} + \bar{u} - u_\delta\| \leqslant \delta + \psi(h, \|V\bar{z}\|)$.

В этом случае задача (2) эквивалентна задаче: найти

$$\inf_{z \in Z_\eta^* \cap \bar{S}(0,R)} \|z\|; \tag{3}$$

где $\bar{S}(0, R)$ — замкнутый шар пространства $Z$ с центром в нуле, радиуса $R = \|\bar{z}\|$. Для того, чтобы доказать разрешимость задачи (3) достаточно доказать, что $Z_\eta^* \cap \bar{S}(0, R)$ есть (секвенциально) слабый компакт в пространстве $Z$, а далее воспользоваться тем, что выпуклый непрерывный функционал $f(z) = \|z\|$ в нормированном пространстве $Z$ слабо полунепрерывен снизу, и применить теорему Вейерштрасса (см., например, [4]).

Лемма 1. *$Z_\eta^* \cap \bar{S}(0, R)$ есть слабый компакт в $Z$.*

*Замечание* 1. Если $0 \in D$, но $0 \notin Z_\eta^*$, т.е.

$$\|A_h V \cdot 0 - u_\delta\| > \delta + \psi(h, \|V \cdot 0\|),$$

то задача (2) эквивалентна задаче: найти

$$(4)\qquad \inf\|z\|,\quad z\in\{z\in D\colon \|A_hVz-u_\delta\|=\delta+\psi(h,\|Vz\|)\}.$$

Итак, для любых $h\geqslant 0$, $\delta\geqslant 0$ и $u_\delta\in U$ таких, что

$$\|u_\delta-AV\bar z\|\leqslant\delta,\qquad \bar z\in D,$$

задача (2) разрешима. Обозначим множество решений задачи (2) $Z_\eta$. Зададимся последовательностью $\eta_n\to 0$.

Теорема 1. *Последовательность $z_{\eta_n}$, состоящая из произвольных элементов множеств $Z_{\eta_n}\ni z_{\eta_n}$, сходится к $\bar z$ по норме пространства $Z$.*

Следствие 1. В теореме 1 доказано, что алгоритм отыскания приближённого решения задачи (1) как решения экстремальной задачи (2) является регуляризующим по А. Н. Тихонову [5], [6], причём имеет место сходимость приближённых решений к точному по норме пространства $Z$. Важнейшим свойством пространства $Z$, использующемся при доказательстве теоремы 1, является его рефлексивность. Рефлексивность пространства $Z$ обеспечивает разрешимость задачи (2), а рефлексивность и $H$-свойство обеспечивают сходимость регуляризованных решений по норме пространства $Z$. Отметим, что из результата С. Л. Троянски [7], [8], установившего, что произвольное рефлексивное пространство изоморфно локально равномерно выпуклому, следует, что в любом рефлексивном пространстве можно ввести эквивалентную норму так, что пространство будет обладать $H$-свойством.

*Замечание* 2. При доказательстве теоремы 1 и леммы 1 нигде не используется то, что пространство $U$ — линейное нормированное. Пространство $U$ можно считать метрическим.

*Замечание* 3. Пусть оператор $A$ не является взаимнооднозначным, и $\bar Z\subseteq D$ есть множество решений (1), соответствующее элементу $\bar u\in U$. Применяя лемму 1 для случая $h=0$, $\delta=0$, $Z_\eta^*=\bar Z$, получим, что уравнение (1) имеет нормальное решение, т.е. во множестве $\bar Z$ существует элемент $\bar z$ с минимальной нормой. Из доказательства теоремы 1 следует, что алгоритм отыскания приближённого решения уравнения (1) как решения экстремальной задачи (2) обеспечивает сходимость последовательности регуляризованных приближений к нормальному решению уравнения (1).

*Замечание* 4. Обобщённый метод невязки в форме решения задачи (2) впервые был предложен в работе А. В. Гончарского, А. С. Леонова, А. Г. Яголы [9] для случая $D=Z=W_2^1[a,b]$, $X=L_2[a,b]$, $U=$ $=L_2[c,d]$, $V$ — оператор вложения, $\psi(h,y)=h\cdot y$.

Предложенный выше алгоритм определён, однако, не для всех $u_\delta \in U$ и непрерывных операторов $A_h$: $X \to U$. Введём меру несовместности уравнения (1)

$$\mu_\eta(u_\delta, A_h) = \inf_{z\in D} \|A_h Vz - u_\delta\|. \tag{5}$$

Лемма 2. *Если* $\|u_\delta - A V\bar{z}\| \leqslant \delta$, $\bar{z} \in D$, *то* $\mu_\eta(u_\delta, A_h) \to 0$ *при* $\eta \to 0$.

Пусть нам задана оценка сверху меры несовместности $\mu_\eta^\varkappa(u_\delta, A_h) = \mu_\eta(u_\delta, A_h) + \varkappa$; будем предполагать, что точность определения меры несовместности $\varkappa = \varkappa(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$ (например, $\varkappa(\delta) = \delta$). Рассмотрим экстремальную задачу: найти

$$\inf\|z\|, \quad z \in Z_{\eta\varkappa}^* = \{z \in D\colon \|A_h Vz - u_\delta\| \leqslant \delta + \psi(h, \|Vz\|) + \mu_\eta^\varkappa(u_\delta, A_h)\}. \tag{6}$$

Лемма 3. *Задача* (6) *разрешима для любых* $u_\delta \in U$, $\delta > 0$.

Теорема 2. *Алгоритм отыскания приближённого решения задачи* (1) *как решения экстремальной задачи* (6) *является регуляризующим по А. Н. Тихонову, т.е. если* $\|u_\delta - A V\bar{z}\| \leqslant \delta$, $\bar{z} \in D$, *то для любой последовательности* $\eta_n \to 0$ $z_{\eta_n} \to \bar{z}$, *где* $z_{\eta_n}$ — *произвольный элемент множества решений задачи* (6).

*Замечание* 5. Для сформулированного в лемме 3 и теореме 2 алгоритма справедливы утверждения, аналогичные утверждениям замечаний 1–3.

*Замечание* 6. Если отказаться от условия разрешимости задачи (2) (или (6)) можно ослабить требования к оператору $V$. Пусть, например, $Z = X$, $V = E$ — единичный оператор. Рассмотрим обобщённый метод невязки в следующей форме: найти

$$\inf\|z\|, \quad z \in Z_\eta^* = \{z \in D\colon \|A_h z - u_\delta\| \leqslant \delta + \psi(h, \|z\|)\}. \tag{7}$$

Задача (7), вообще говоря, не разрешима. Тем не менее, если $\|u_\delta - A\bar{z}\| \leqslant \delta$, $\bar{z} \in D$, множество $Z_\eta^* \neq \varnothing$ и существует $\inf\limits_{z\in Z_\eta^*} \|z\| = m_\eta$. Для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $z_\eta^\varepsilon \in Z_\eta^*$ такой, что $\|z_\eta^\varepsilon\| \leqslant m_\eta + \varepsilon$. Очевидно, что $\|z_\eta^\varepsilon\| \leqslant \|\bar{z}\| + \varepsilon$. Пусть теперь $\eta_n \to 0$, $\varepsilon_n \to 0$. Результат теоремы 1 может быть легко получен, если потребовать, например, чтобы оператор $A$ являлся секвенциально непрерывным или секвенциально замкнутым из слабой топологии пространства $Z$ в сильную (или слабую) топологию пространства $U$. Впервые подобный подход, при котором не предполагалась разрешимость экстремальной задачи, был предложен

В. А. Морозовым [10] — рассматривалась линейная задача в гильбертовых пространствах. Другие постановки задач см. [11], [12].

Обобщённый метод невязки для линейных задач будет рассмотрен в § 3.

Обобщённый метод невязки является обобщением метода невязки ($h = 0$) решения некорректно поставленных задач с точно заданным оператором. Идея метода невязки принадлежит, по-видимому, Филлипсу [13], однако строгая постановка задачи и обоснование метода впервые были проведены В. К. Ивановым [14]. Дальнейшее развитие круга идей, связанных с применением метода невязки для решения некорректных задач и библиографию по этому вопросу можно найти в монографии [15] и обзоре [16].

Обобщённый метод невязки в форме, рассмотренной в данном параграфе, предложен в работе [17], там же можно найти доказательства всех утверждений.

## 2. Обобщённый принцип невязки

Рассмотрим регуляризующий алгоритм решения линейных некорректных задач с приближённо заданным оператором, основанный на отыскании экстремума функционала А. Н. Тихонова с выбором значения параметра регуляризации по так называемому обобщённому принципу невязки. Пусть $Z$ — рефлексивное пространство, $D \subseteq Z$ — замкнутое выпуклое множество такое, что $0 \in D$ (в частности, $D$ может равняться $Z$); $A$, $A_h$ — линейные ограниченные операторы, действующие из $Z$ в нормированное пространство $U$, причём $\|A - A_h\| \leqslant h$, $h \geqslant 0$. Требуется построить приближённое решение уравнения

$$Az = u, \tag{1}$$

принадлежащее множеству $D$, по заданному набору входных данных $\{A_h, u_\delta, \eta\}$: $\eta = (h, \delta)$, $\delta > 0$, $\|u_\delta - \bar{u}\| \leqslant \delta$, $\bar{u} = A\bar{z}$, $\bar{z} \in D$, причём алгоритм построения приближённого решения должен быть регуляризующим по А. Н. Тихонову. Введём в рассмотрение функционал Тихонова

$$M^\alpha[z] \equiv \|A_h z - u_\delta\|^p + \alpha \|z\|^q; \tag{2}$$

$p$ и $q$ — фиксированные константы: $p \geqslant 1$, $q \geqslant 1$; $\alpha > 0$ — параметр регуляризации. Рассмотрим экстремальную задачу: найти

$$\inf_{z \in D} M^\alpha[z]. \tag{3}$$

Лемма 1. *Для любого $\alpha > 0$, любого $u_\delta \in U$ и любого линейного ограниченного оператора $A_h$ задача (3) разрешима. Множество ре-*

*шений задачи* (3) $Z_\eta^\alpha \subseteq D$ *выпукло, замкнуто, ограниченно, содержит элементы с минимальной и максимальной нормой. Если* $Z$ *строго нормированно и* $q > 1$, *то решение задачи* (3) *единственно.*

Напомним, что линейное нормированное пространство называется строго нормированным, если для любых двух линейно независимых элементов $z_1$, $z_2 \in Z$, $\|z_1+z_2\| < \|z_1\|+\|z_2\|$.

*Замечание* 1. Если $q = 1$, то функционал Тихонова может иметь неединственную экстремаль даже, если $Z$ — строго нормированное пространство. Рассмотрим тривиальный пример: $D = Z = R^1$, $A_h = E$, $u_\delta = 1$, $M^\alpha[z] = |z-1|+\alpha|z|$.

В этом случае

$$Z_\eta^\alpha = \begin{cases} \{1\}, & 0<\alpha<1; \\ [0,1], & \alpha = 1; \\ \{0\}, & \alpha > 0; \end{cases}$$

т.е. при $\alpha = 1$ решение задачи (3) неединственно.

Фиксируем оператор выбора $Q$, сопоставляющий множеству $Z_\eta^\alpha$ его произвольный элемент: $QZ_\eta^\alpha = z_\eta^\alpha \in Z_\eta^\alpha$. Определим следующие функции параметра $\alpha > 0$:

$$\varphi_\eta(\alpha) = \|A_h z_\eta^\alpha - u_\delta\|^p + \alpha\|z_\eta^\alpha\|^q; \tag{4}$$

$$\gamma_\eta(\alpha) = \|z_\eta^\alpha\|; \tag{5}$$

$$\beta_\eta(\alpha) = \|A_h z_\eta^\alpha - u_\delta\|. \tag{6}$$

Заметим, что определение функции $\varphi_\eta(\alpha)$ не зависит от выбора оператора $Q$.

Лемма 2. *Функции* (4)–(6) *обладают следующими свойствами:*

1. *функция* $\varphi_\eta(\alpha)$ *непрерывна и вогнута при* $\alpha > 0$;

2. *функция* $\gamma_\eta(\alpha)$ *монотонно не возрастает,* $\varphi_\eta(\alpha)$ *и* $\beta_\eta(\alpha)$ *монотонно не убывают при* $\alpha > 0$, *причём на интервале* $(0, \alpha_0)$ *таком, что* $0 \notin Z_\eta^{\alpha_0}$, *для любого* $\alpha \in (0, \alpha_0)$, $\varphi_\eta(\alpha)$ *строго монотонна*;

3. *справедливы предельные соотношения*

$$\lim_{\alpha\to+\infty} \gamma_\eta(\alpha) = \lim_{\alpha\to+\infty} \alpha\gamma_\eta^q(\alpha) = 0;$$

$$\lim_{\alpha\to+\infty} \varphi_\eta(\alpha) = \lim_{\alpha\to+\infty} \beta_\eta^p(\alpha) = \|u_\delta\|^p.$$

*Замечание* 2. Впервые свойства вспомогательных функций (4)–(6) были исследованы В. А. Морозовым [18]–[22]. Несмотря на то, что он рассматривал задачу без ограничений ($D = Z$) в гильбертовых пространствах, предложенная им техника доказательства без существенных изменений применима и для рассматриваемой нами задачи. Отметим, что при доказательстве леммы 2 нами использовалась рефлексивность пространства $Z$, из которой следует, что $Z_\eta^\alpha \neq \varnothing$ для любого $\alpha > 0$.

Лемма 3. *Пусть оператор выбора $Q$ сопоставляет множеству $Z_\eta^\alpha$ элемент $\tilde{z}_\eta^\alpha \in Z_\eta^\alpha$ с минимальной нормой. Тогда функции $\gamma_\eta(\alpha)$ и $\beta_\eta(\alpha)$ непрерывны справа при $\alpha > 0$.*

Лемма 4. *Пусть оператор выбора $Q$ сопоставляет множеству $Z_\eta^\alpha$ элемент $\tilde{\tilde{z}}_\eta^\alpha \in Z_\eta^\alpha$ с максимальной нормой. Тогда функции $\gamma_\eta(\alpha)$ и $\beta_\eta(\alpha)$ непрерывны слева при $\alpha > 0$.*

Следствие 1. *Если пространство $Z$ строго нормированно и $q > 1$, то функции $\gamma_\eta(\alpha)$ и $\beta_\eta(\alpha)$ непрерывны при $\alpha > 0$.*

Рассмотрим теперь поведение функций $\varphi_\eta(\alpha)$, $\gamma_\eta(\alpha)$, $\beta_\eta(\alpha)$ при $\alpha \to +0$. Как и в § 1 введём в рассмотрение меру несовместности уравнения (1) на множестве $D$:

$$\mu_\eta(u_\delta, A_h) = \inf_{z \in D} \|A_h z - u_\delta\|. \tag{7}$$

Если $\mu_\eta(u_\delta, A_h) = 0$, это означает, что $u_\delta \in \overline{A_h D}$. Пусть нам задана оценка сверху меры несовместности $\mu_\eta^\varkappa(u_\delta, A_h) = \mu_\eta(u_\delta, A_h) + \varkappa$, будем предполагать, что точность задания меры несовместности $\varkappa \geqslant 0$, $\varkappa = \varkappa(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$ (например, $\varkappa(\delta) = \delta$).

Лемма 5. *Если $\|u_\delta - A\bar{z}\| \leqslant \delta \to 0$, $\bar{z} \in D$, то $\mu_\eta(u_\delta, A_h) \to 0$ при $\eta \to 0$.*

Лемма 6. *Имеют место следующие предельные соотношения:*

$$\lim_{\alpha \to +0} \varphi_\eta(\alpha) = \lim_{\alpha \to +0} \beta_\eta^p(\alpha) = (\mu_\eta(u_\delta, A_h))^p;$$

$$\lim_{\alpha \to +0} \alpha \gamma_\eta^q(\alpha) = 0.$$

Введём теперь в рассмотрение функцию

$$\varrho_\eta^\varkappa(\alpha) = \beta_\eta(\alpha) - \delta - h\gamma_\eta(\alpha) - \mu_\eta^\varkappa(u_\delta, A_h),$$

называемую обобщённой невязкой. Впервые аналогичная функция была введена и исследована для случая, когда $Z$ и $U$ — гильбертовы пространства, $D = Z$, в работах А. В. Гончарского, А. С. Леонова, А. Г. Яголы [23]–[24].

Следствие 2. *Функция* $\varrho_\eta^\varkappa(\alpha)$ *при* $\alpha > 0$ *обладает следующими свойствами*:

1. $\varrho_\eta^\varkappa(\alpha)$ *монотонно не убывает при* $\alpha > 0$;

2. $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} \varrho_\eta^\varkappa(\alpha) = \|u_\delta\| - \delta - \mu_\eta^\varkappa(u_\delta, A_h)$;

3. $\overline{\lim\limits_{\alpha\to+0}} \varrho_\eta^\varkappa(\alpha) \leqslant -\delta - \varkappa$;

4. *если* $\alpha_0 > 0$ *есть точка непрерывности* $\varrho_\eta^\varkappa(\alpha)$, *то* $\|A_h z - u_\delta\|$ *не зависит от* $z \in Z_\eta^{\alpha_0}$,

$$\inf_{z\in Z_\eta^{\alpha_0}} \|z\| = \sup_{z\in Z_\eta^{\alpha_0}} \|z\|.$$

*Из последнего следует, что, если* $Z$ *строго нормированно, то* $Z_\eta^{\alpha_0}$ *состоит из единственного элемента*;

5. *в условиях леммы* 3 $\varrho_\eta^\varkappa(\alpha)$ *непрерывна справа, в условиях леммы* 4 $\varrho_\eta^\varkappa(\alpha)$ *непрерывна слева*;

6. *если* $Z$ *строго нормированно и* $q > 1$, $\varrho_\eta^\varkappa(\alpha)$ *непрерывна*;

7. *если выполнено условие*

$$\|u_\delta\| > \delta + \mu_\eta^\varkappa(u_\delta, A_h), \tag{8}$$

*то найдётся* $\alpha^* > 0$ *такое, что* $\overline{\lim\limits_{\alpha\to\alpha^*-0}} \varrho_\eta^\varkappa(\alpha) \leqslant 0 \leqslant \underline{\lim\limits_{\alpha\to\alpha^*+0}} \varrho_\eta^\varkappa(\alpha)$;

8. *если* $Z$ *строго нормированно*, $q > 1$ *и выполнено условие* (8), *найдётся* $\alpha^* > 0$ *такое, что* $\varrho_\eta^\varkappa(\alpha^*) = 0$;

9. *пусть* $\alpha^* > 0$ — *значение параметра регуляризации, указанное в п.п.* 7–8. *Тогда найдётся элемент* $z_\eta^{\alpha^*} \in Z_\eta^{\alpha^*}$ *для которого выполнено равенство*

$$\|A_h z_\eta^{\alpha^*} - u_\delta\| = \delta + h\|z_\eta^{\alpha^*}\| + \mu_\eta^\varkappa(u_\delta, A_h). \tag{9}$$

Сформулируем теперь правило выбора параметра регуляризации — обобщённый принцип невязки: по заданным $\{u_\delta, A_h, \eta\}$, $\eta = (h, \delta)$, $h \geqslant 0$, $\delta > 0$ вычисляется $\mu_\eta^\varkappa(u_\delta, A_h)$ (если $u_\delta \in \overline{A_h D}$, то $\mu_\eta^\varkappa(u_\delta, A_h)$ можно положить равной нулю). Если условие (8) не выполнено, то полагаем приближённое решение уравнения (1) $z_\eta = 0$. Если условие (8) выполнено, то отыскивается $\alpha^* > 0$, существование которого было доказано в п.п. 7, 8 следствия 2. Если $\alpha^*$ — точка непрерывности $\varrho_\eta^\varkappa(\alpha)$, то в качестве приближённого решения (1) выбирается любая экстремаль $z_\eta^{\alpha^*}$, если же $\alpha^*$ — точка разрыва $\varrho_\eta^\varkappa(\alpha)$, то отыскивается экстремаль, удовлетворяющая (9): $z_\eta = z_\eta^{\alpha^*}$.

Теорема 1. *Пусть* $A$ — *взаимнооднозначный оператор, пространство* $Z$ *обладает* $H$-*свойством. Тогда обобщённый принцип невязки* *является регуляризующим по А. Н. Тихонову алгоритмом решения задачи* (1), *т.е. для любой последовательности* $\eta_n \to 0$, $\varkappa_n \to 0$, $\|A - A_{h_n}\| \leqslant h_n$, $\|\bar{u} - u_{\delta_n}\| \leqslant \delta_n$, $\bar{u} = A\bar{z}$, $\bar{z} \in D$ *последовательность* $z_{\eta_n} \to \bar{z}$ *по норме пространства* $Z$.

Следствие 3. *Если* $A$ *не является взаимнооднозначным оператором, то обобщённый принцип невязки обеспечивает сходимость последовательности регуляризованных приближений к нормальному решению уравнения* (1) *на множестве* $D$; *если нормальное решение не единственно, то обеспечивается* $\beta$*-сходимость к множеству нормальных решений.*

Следствие 4. *Если* $Z$ *не обладает* $H$*-свойством, то последовательность* $z_{\eta_n}$ *слабо сходится к* $\bar{z}$ *и* $\|z_{\eta_n}\| \to \|\bar{z}\|$.

*Замечание* 3. Из результатов С. Л. Троянски [7]–[8] следует, что в рефлексивном пространстве $Z$ может быть введена эквивалентная норма так, что пространство станет локально равномерно выпуклым, а, следовательно, строго нормированным и с $H$-свойством. В этом случае, если $q > 1$, функции (4)–(6) и обобщённая невязка являются непрерывными, выбор параметра регуляризации и приближённого решения по обобщённому принципу невязки обеспечивает сильную сходимость регуляризованных приближений к нормальному решению уравнения (1) на множестве $D$.

*Замечание* 4. В [15] доказана оптимальность по порядку обобщённого принципа невязки на компакте, являющемся образом шара рефлексивного пространства при вполне непрерывном отображении.

*Замечание* 5. Переход к конечноразностной аппроксимации при решении линейных некорректных задач может быть интерпретирован как внесение дополнительной погрешности в оператор, а, следовательно, для регуляризации может быть использован обобщённый принцип невязки. Эта идея, впервые высказанная и обоснованная в работе [25], может быть использована для построения устойчивых разностных схем [26], [27].

*Замечание* 6. Вместо обобщённой невязки $\varrho_\eta^\varkappa(\alpha)$ можно рассматривать обобщённую невязку $\varrho_\eta^{\varkappa,r}(\alpha) = \beta_\eta^r(\alpha) - \big(\delta + h\gamma_\eta(\alpha)\big)^r - \big(\mu_\eta^\varkappa(u_\delta, A_h)\big)^r$, где $r > 0$ — фиксированное число. Свойства функции $\varrho_\eta^{\varkappa,r}(\alpha)$ идентичны свойствам функции $\varrho_\eta^\varkappa(\alpha)$, если вместо условия (8) рассматривать условие

$$\|u_\delta\|^r > \delta^r + \big(\mu_\eta^\varkappa(u_\delta, A_h)\big)^r, \tag{10}$$

а вместо равенства (9) равенство

$$\|A_h z_\eta^{\alpha*} - u_\delta\|^r = (\delta + h\|z_\eta^{\alpha*}\|)^r + \big(\mu_\eta^\varkappa(u_\delta, A_h)\big)^r. \tag{11}$$

В § 3 мы будем рассматривать обобщённую невязку со значением $r = 2$.

Предложенный в настоящем параграфе подход к решению линейных задач с приближённо заданным оператором можно считать обобщением метода наименьших квадратов Лежандра [28] и Гаусса [29].

Устойчивые методы решения задач с приближённо заданным оператором впервые были предложены А. Н. Тихоновым [1], [2]. Обобщённый принцип невязки является обобщением принципа невязки выбора параметра регуляризации из равенства $\beta_\eta(\alpha) = \delta$, $\eta = (0, \delta)$, $\delta > 0$, $\|u_\delta\| > \delta$, наиболее детально исследованного в работах В. А. Морозова [18]–[22]. Описание обобщённого принципа невязки и список литературы можно найти в монографиях [30], [15], [31]. Обобщённый принцип невязки для нелинейных задач рассмотрен в работах А. С. Леонова [32], [33], А. А. Баева [34].

В заключение параграфа рассмотрим вопрос об эквивалентности обобщённого метода невязки и обобщённого принципа невязки для линейных задач. Этот вопрос впервые был рассмотрен В. П. Тананой [35] (см. также [15]), однако при некоторых излишних предположениях.

Обобщённый принцип невязки для задачи (1) состоит в решении экстремальной задачи с невыпуклыми ограничениями: найти

$$\text{(12)} \qquad \inf \|z\|; \qquad z \in \{z \in D\colon \|A_h z - u_\delta\| \leqslant \delta + h\|z\| + \mu_\eta^\varkappa(u_\delta, A_h)\}.$$

Отметим, что в силу условия $\delta > 0$ и определения $\mu_\eta^\varkappa(u_\delta, A_h)$ множество $\{z \in D\colon \|A_h z - u_\delta\| \leqslant \delta + h\|z\| + \mu_\eta^\varkappa(u_\delta, A_h)\}$ не пусто.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия, сформулированные в начале § 2 до леммы 1. Тогда обобщённый принцип невязки и обобщённый метод невязки эквивалентны, т.е. множество решений, находимых по обобщённому принципу невязки, совпадает с множеством решений экстремальной задачи* (12).

Обобщённый принцип невязки в рефлексивных пространствах был рассмотрен в работах [36], [37], обоснования утверждений настоящего параграфа можно найти в [37].

### 3. Обобщённый принцип невязки в гильбертовых пространствах

Пусть выполнены условия, сформулированные в начале § 2 до леммы 1, и пусть $Z$ и $U$ — гильбертовы пространства. Естественно в этом случае положить в функционале Тихонова $p = q = 2$ и рассматривать функционал

$$\text{(1)} \qquad M^\alpha[z] \equiv \|A_h z - u_\delta\|^2 + \alpha\|z\|^2.$$

В условиях § 2 $M^\alpha[z]$ дифференцируем по Фреше, причём

$$(M^\alpha[z])' = 2(A_h^* A_h z - A_h^* u_\delta + \alpha z), \tag{2}$$

где $A_h^*$ — оператор, действующий из $U$ в $Z$, сопряжённый к $A_h$.

Т.к. $M^\alpha[z]$ — выпуклый функционал (более того, он является сильно выпуклым), то необходимое и достаточное условие того, что элемент $z_\eta^\alpha$ есть экстремаль $M^\alpha[z]$ на $D$, имеет вид

$$(A_h^* A_h z_\eta^\alpha + \alpha z_\eta^\alpha - A_h^* u_\delta,\ z - z_\eta^\alpha) \geqslant 0 \tag{3}$$

для любого $z \in D$, причём, если $z_\eta^\alpha$ — внутренняя точка $D$, то

$$A_h^* A_h z_\eta^\alpha + \alpha z_\eta^\alpha = A_h^* u_\delta. \tag{4}$$

Существование и единственность $z_\eta^\alpha$ легко следует из результатов предыдущего параграфа.

В настоящем параграфе целесообразно изменить определения вспомогательных функций и обобщённой невязки, представив их в виде [24]:

$$\varphi_\eta(\alpha) = \|A_h z_\eta^\alpha - u_\delta\|^2 + \alpha\|z_\eta^\alpha\|^2; \tag{5}$$

$$\gamma_\eta(\alpha) = \|z_\eta^\alpha\|^2; \tag{6}$$

$$\beta_\eta(\alpha) = \|A_h z_\eta^\alpha - u_\delta\|^2; \tag{7}$$

$$\varrho_\eta^\varkappa(\alpha) = \beta_\eta(\alpha) - \left(\delta + h\sqrt{\gamma_\eta(\alpha)}\right)^2 - \left(\mu_\eta^\varkappa(u_\delta, A_h)\right)^2. \tag{8}$$

Из результатов § 2 следует, что все функции (5)–(8) непрерывны.

Лемма 1. *Пусть $D = Z$. Тогда*

1. *функции (5)–(7) непрерывно дифференцируемы при $\alpha > 0$, причём*

$$\varphi'_\eta(\alpha) = \gamma_\eta(\alpha); \tag{9}$$

$$\gamma'_\eta(\alpha) = -\left((A_h^* A_h + \alpha E)^{-1} z_\eta^\alpha,\ z_\eta^\alpha\right); \tag{10}$$

$$\beta'_\eta(\alpha) = -\alpha\gamma'_\eta(\alpha). \tag{11}$$

*Функция $\varrho_\eta^\varkappa(\alpha)$ непрерывно дифференцируема при $\alpha > 0$ таких, что $z_\eta^\alpha \neq 0$, причём*

$$\left(\varrho_\eta^\varkappa(\alpha)\right)' = -\gamma'_\eta(\alpha)\left(\alpha + \frac{h\delta}{\sqrt{\gamma_\eta(\alpha)}} + h^2\right) \tag{12}$$

2. *экстремали $z_\eta^\alpha \neq 0$, $\alpha > 0$ и функции (5)–(8) строго монотонны при выполнении достаточного условия*

$$\|u_\delta\|^2 > \delta^2 + \left(\mu_\eta^\varkappa(u_\delta, A_h)\right)^2; \tag{13}$$

3. *функция* $B_\eta(\lambda) = \beta_\eta(1/\lambda)$ *выпукла по* $\lambda$ *при* $\lambda > 0$.

Дифференцируемость функций (5)–(7) и выпуклость $B_\eta(\lambda)$ отмечены В. А. Морозовым [38], [22].

Кроме того, для функций (5)–(8) справедливы ряд свойств, отмеченных в предыдущем параграфе.

Обобщённый принцип невязки в гильбертовых пространствах можно сформулировать следующим образом: пусть условие (13) не выполнено, тогда положим приближённое решение уравнения (1) из § 2 $z_\eta = 0$; если же условие (13) выполнено, то параметр регуляризации в функционале Тихонова (1) возьмём из решения уравнения

$$\varrho_\eta^\times(\alpha) = 0. \tag{14}$$

Существование решения уравнения (14) $\alpha^* > 0$ обеспечивается условием (13) и свойствами функции $\varrho_\eta^\times(\alpha)$, указанными в предыдущем параграфе. В качестве приближённого решения уравнения (1) из § 2 выбирается $z_\eta = z_\eta^{\alpha^*}$. То, что обобщённый принцип невязки является регуляризующим по Тихонову алгоритмом отмечалось в § 2.

Рассмотрим подробнее вопрос об отыскании корня уравнения (14) в случае $D = Z$. В этом случае $\varrho_\eta^\times(\alpha)$ строго монотонно возрастающая, дифференцируемая функция $\alpha$; причём, если $h = 0$, то функция $\beta_\eta(1/\lambda)$ выпукла. Для реализации поиска корня уравнения (14) желательно иметь оценку сверху для $\alpha^*$, т.е. значение параметра $\bar{\alpha} > \alpha^*$ такое, что $\varrho_\eta^\alpha(\bar{\alpha}) > 0$. Для простоты будем считать, что $\overline{A_h Z} = U$, т.е. $\mu_\eta^\times(u_\delta, A_h) = 0$.

Лемма 2. *Пусть точное решение уравнения* $Az = u$ *есть* $\bar{z} \neq 0$, $\|u_\delta - A\bar{z}\| \leqslant \delta \to 0$ *при* $\delta \to 0$, *и для* $\delta \in (0, \delta_0]$ $\|u_\delta\|/\delta > c > 1$ ($c = \mathrm{const}$). *Тогда* $\alpha^* < \bar{\alpha}$,

$$\bar{\alpha} = \|A_h\| \left( h + \frac{\sqrt{h^2 + (\tilde{\alpha} + h^2)(c^2 - 1)} + h}{c^2 - 1} \right), \tag{15}$$

*где*

$$\tilde{\alpha} = \frac{\|A_h\|^2 c\delta}{\|u_\delta\| - c\delta}. \tag{16}$$

Из результатов леммы 1 следует, что для отыскания корня уравнения (14) применим метод Ньютона, однако, вообще говоря, лишь начиная с некоторого начального приближения, достаточно близкого к корню уравнения (14). Поскольку функция $\varrho_\eta^\times(1/\lambda)$ выпукла по $\lambda$, если $h = 0$, итерационный процесс метода Ньютона удобно строить по формуле

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2(\varrho_\eta^\varkappa(a_n))'}{a_n + \varrho_\eta^\varkappa(a_n)}; \quad n = 0, 1, 2, \ldots; \tag{17}$$

решая при каждом фиксированном $a_n$ уравнение Эйлера (4). В качестве $a_0$ можно взять $\bar{a}$, полученное в лемме 2. Если $h = 0$, то последовательность $a_n$, полученная по формуле (17), будет сходиться к $a^*$. Если $h \neq 0$, то поскольку сходимость метода Ньютона, начиная с любого начального приближения не гарантируется, необходимо применять метод хорд или метод деления отрезка пополам до тех пор, пока не найдётся начальное приближение, начиная с которого сходится итерационный процесс (17).

В случае $D \neq Z$ функции (5)–(8), вообще говоря, не дифференцируемы. Для поиска корня уравнения (14) необходимо применять методы отыскания корней монотонных непрерывных функций (метод деления отрезка пополам, „золотого сечения" и т.д.). Отыскание $z_\eta^a$ при фиксированном $a$ является задачей минимизации квадратичного функционала (1) на выпуклом множестве $D$, для чего имеются эффективные численные методы (см., например, [40]).

При программной реализации на ЭВМ обобщённый принцип невязки показал высокую эффективность.

В заключение параграфа отметим, что В. П. Танана [41] доказал, что в формулировке обобщённого принципа невязки можно $\mu_\eta^\varkappa(u_\delta, A_h)$ положить равным нулю даже, если $\overline{A_h Z} \neq U$. В этом случае, если выполнено условие (13) и уравнение (14) имеет решение $a^* > 0$ (везде $\mu_\eta^\varkappa = 0$), то $z_\eta = z_\eta^{a^*}$. Если же выполнено условие (13), но уравнение (14) не имеет положительного решения, то $z_\eta = \lim\limits_{a \to +0} z_\eta^a$.

## Литература


[1] А. Н. Тихонов, *О некорректных задачах линейной алгебры и устойчивых методах их решения*, Докл. АН СССР 163.3 (1965), 591–594.

[2] —, *Об устойчивости алгоритмов для решения вырожденных систем линейных алгебраических уравнений*, Ж. вычисл. мат. и мат. физ. 5.4 (1965), 763–765.

[3] В. Д. Мильман, *Геометрическая теория пространств Банаха*, ч.2. *Геометрия единичной сферы*, Успехи мат. наук, 26.6 (1971), 73–149.

[4] Ф. П. Васильев, *Лекции по методам решения экстремальных задач*, Изд-во МГУ, Москва 1974.

[5] А. Н. Тихонов, *О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации*, Докл. АН СССР 151.3 (1963), 501–504.

[6] —, *О регуляризации некорректно поставленных задач*, ibid. 153.1 (1963), 49–52.

[7] С. Л. Троянски, *Эквивалентные нормы в несепарабельных B-пространствах*

*с безусловным базисом*; В сб. *Теория функций, функц. анализ и их применение*, вып. 6, Харьков 1968, стр. 59–65.

[8] S. Trojansky, *On locally uniformly convex and differentiable norms in certain nonseparable Banach spaces*, Studia Math. 37 (1971), 173–180.

[9] А. В. Гончарский, А. С. Леонов, А. Г. Ягола, *Об одном регуляризующем алгоритме для некорректно поставленных задач с приближённо заданным оператором*, Ж. вычисл. мат. и мат. физ. 12.6 (1972), 1592–1594.

[10] В. А. Морозов, *Об одном новом подходе к решению линейных уравнений 1-го рода с приближённым оператором*, *Труды I-ой конф. молодых учёных факультета вычис. матем. и кибернетики МГУ*, Изд-во МГУ, 1973, стр. 22–28.

[11] —, *О принципе оптимальности невязки при приближённом решении уравнений с нелинейными операторами*, Ж. вычисл. мат. и мат. физ. 14.4 (1974), 819–827.

[12] —, *Регулярные методы решения нелинейных операторных уравнений*, Изв. высш. уч. зав., Математика, 11 (1978), 74–86.

[13] D. L. Phillips, *A technique for numerical solution of certain integral equations of the first kind*, J. Assoc. Comput. Mach. 9.1 (1962), 84–97.

[14] В. К. Иванов, *О приближённом решении операторных уравнений первого рода*, Ж. вычисл. мат. и мат. физ. 6.6 (1966), 1089–1094.

[15] В. К. Иванов, В. В. Васин, В. П. Танана, *Теория линейных некорректных задач и её приложения*, „Наука", Москва 1978.

[16] В. А. Морозов, *Линейные и нелинейные некорректные задачи*; В сб. работ ВИНИТИ Итоги науки и техники, Математический анализ 11 (1973), 129–178.

[17] А. Г. Ягола, *О решении нелинейных некорректных задач с помощью обобщённого метода невязки*, Докл. АН СССР 252.4 (1980), 810–813.

[18] В. А. Морозов, *О решении функциональных уравнений методом регуляризации*, ibid. 167.3 (1966), 510–512.

[19] —, *О регуляризующих семействах операторов*; В сб. „*Вычисл. методы и программирование*", вып. 6, Изд-во МГУ, 1967, стр. 63–93.

[20] —, *О выборе параметра регуляризации при решении функциональных уравнений методом регуляризации*, Докл. АН СССР 175.6 (1967), 1225–1228.

[21] —, *О принципе невязки при решении операторных уравнений методом регуляризации*, Ж. вычисл. мат. и мат. физ. 8.2 (1968), 295–309.

[22] —, *Регулярные методы решения некорректных задач*, Изд-во МГУ, Москва 1974.

[23] А. В. Гончарский, А. С. Леонов, А. Г. Ягола, *Некоторое обобщение принципа невязки для случая оператора, заданного с ошибкой*, Докл. АН СССР 203.6 (1972), 1238–1239.

[24] —, —, —, *Обобщённый принцип невязки*, Ж. вычисл. мат. и мат. физ. 13.2 (1973), 294–302.

[25] —, —, —, *Конечноразностная аппроксимация линейных некорректных задач*, ibid. 14.1 (1974), 15–24.

[26] А. С. Леонов, *О построении устойчивых разностных схем решения нелинейных краевых задач*, Докл. АН СССР 224.3 (1975), 525–528.

[27] Ю. А. Ерёмин, А. С. Леонов, *О построении устойчивых разностных схем для линейных знаконеопределённых дифференциальных операторов*, Ж. вычисл. мат. и мат. физ. 15.3 (1975).

[28] A. M. Legendre, *Nouvelles méthodes pour la detérmination des orbites des comètes*, Courcier, Paris 1806.

[29] C. F. Gauss, *Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis solem ambientium*, Hamburg 1809.

[30] А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин, *Методы решения некорректных задач*, „Наука", Москва 1979.

[31] А. В. Гончарский, А. М. Черепашук, А. Г. Ягола, *Численные методы решения обратных задач астрофизики*, „Наука", Москва 1978.

[32] А. С. Леонов, *Об алгоритмах приближённого решения нелинейных некорректных задач с возмущённым оператором*, Докл. АН СССР 245.2 (1979), 300–304.

[33] —, *О выборе параметра регуляризации для нелинейных некорректных задач с приближённо заданным оператором*, Ж. вычисл. мат. и мат. физ. 19.6 (1979), 1363–1376.

[34] А. А. Баев, *О построении нормального решения нелинейных некорректных задач методом регуляризации*, ibid. 19.3 (1979), 594–600.

[35] В. П. Танана, *Об одном проекционно-итеративном алгоритме для операторных уравнений первого рода с возмущённым оператором*, Докл. АН СССР 224.5 (1975), 1028–1029.

[36] А. Г. Ягола, *Обобщённый принцип невязки в рефлексивных пространствах*, ibid. 249.1 (1979), 71–73.

[37] —, *О выборе параметра регуляризации при решении некорректных задач в рефлексивных пространствах*, Ж. вычисл. мат. и мат. физ. 20.3 (1980), 586–596.

[38] В. А. Морозов, *О принципе невязки при решении несовместных уравнений методом регуляризации А. Н. Тихонова*, ibid. 13.5 (1973), 1099–1111.

[39] А. Г. Ягола, *О выборе параметра регуляризации по обобщённому принципу невязки*, Докл. АН СССР 245.1 (1979), 37–39.

[40] Б. Н. Пшеничный, Ю. М. Данилин, *Численные методы в экстремальных задачах*, „Наука", Москва 1975.

[41] В. П. Танана, *О выборе параметра регуляризации при решении некорректных задач*, Всес. конф. по некорректно поставленным задачам, Тезисы докладов, „Илим", Фрунзе 1979, стр. 113–114.

*Presented to the Semester*
*Computational Mathematics*
*February 20 — May 30, 1980*