

**О РЕГУЛЯРИЗАЦИИ НЕКОРРЕКТНО ПОСТАВЛЕННЫХ
ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ ПРИ НЕТОЧНО
ЗАДАНЫХ ИСХОДНЫХ ДАННЫХ**

Ф. П. ВАСИЛЬЕВ

*Московский Государственный Университет, Факультет Вычислительной
Математики и Кибернетики, Москва, СССР*

М. КОВАЧ

Вычислительный Центр Университета им. Этвэша Лоранда, Будапешт, Венгрия

Многие задачи техники, экономики, проектирования, оптимального управления сводятся к задачам поиска максимума или минимума тех или иных функций, выражающих собой стоимость затрат, прибыль, энергию, расстояние и т.д., то есть к задачам, которые принято называть экстремальными задачами. Разработка методов решения экстремальных задач является одним из интенсивно развивающихся направлений вычислительной математики.

Следует однако заметить, что в большинстве работ, посвященных методам минимизации, предполагается, что минимизируемая функция и множество, на котором ищется минимум, известны точно. В то же время у значительного числа прикладных задач исходная информация носит приближенный характер. В связи с этим возникает важный практический вопрос, будет ли решение поставленной задачи непрерывно зависеть от исходных данных, или, иначе говоря, будет ли искомое решение устойчивым по отношению к возмущениям входных данных. В самых различных областях техники, экономики и т.д. встречаются экстремальные задачи, решение которых не является непрерывно зависящим от входных данных и решение приближенной задачи может как угодно сильно отличаться от искомого точного решения. Это обстоятельство затрудняет использование классических методов минимизации для решения неустойчивым, или, как говорят, некорректно поставленных задач, так как, вообще говоря, нет гарантий того, чтобы построенные с их помощью последовательности сходились

к точке минимума, и более того, такие последовательности могут не быть даже минимизирующими. Поэтому разработка методов решения некорректно поставленных экстремальных задач представляет особый интерес.

Основным инструментом для исследования таких экстремальных задач служат методы регуляризации, разработанные в трудах А. Н. Тихонова, В. К. Иванова, М. М. Лаврентьева и др. [1]–[3]. Число работ, в которых рассматриваются методы решения некорректных экстремальных задач, продолжает расти — см., например, [4]–[26]. Настоящая статья представляет собой обзор, составленный по работам [14]–[26], а также содержит некоторые новые результаты, и примыкает к обзорной статье [4].

1. Постановка задачи

Пусть на некотором заданном множестве U_0 определены функции $I(u)$, $g_i(u)$, $i = 1, \dots, s$, принимающие конечное значение в каждой точке $u \in U_0$. Пусть

$$(1) \quad U = \{u \in U_0: g_i(u) \leq 0, i = 1, \dots, n; g_i(u) = 0, i = n+1, \dots, s\}.$$

Всюду в дальнейшем предполагается, что задача минимизации функции $I(u)$ на U удовлетворяет следующим трем условиям:

R1: на U_0 задана некоторая топология τ и функции $I(u)$, $g_i(u)$, $i = 1, \dots, n$, $|g_i(u)|$, $i = n+1, \dots, s$, τ -секвенциально полунепрерывны снизу на U_0 . Напоминаем, что функция $I(u)$ τ -секвенциально полунепрерывна снизу на U_0 , если в любой точке $u \in U_0$ для любой последовательности $\{u_k\} \in U_0$, τ -сходящейся к u , имеет место неравенство $\lim_{k \rightarrow \infty} I(u_k) \geq I(u)$.

$$(2) \quad \text{R2: } \inf_U I(u) = I_* > -\infty, \quad U_* = \{u \in U: I(u) = I_*\} \neq \emptyset.$$

R3: функция Лагранжа

$$L(u, \lambda) = I(u) + \sum_{i=1}^s \lambda_i g_i(u), \quad u \in U_0,$$

$$\lambda \in \dot{A}_0 = \{\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_s); \lambda_1 \geq 0, \dots, \lambda_n \geq 0\},$$

на множестве $U_0 \times A_0$ имеет седловую точку $(u_*, \lambda^*) \in U_0 \times A_0$, т.е.

$$L(u_*, \lambda) \leq L(u_*, \lambda^*) \leq L(u, \lambda^*), \quad u \in U_0, \lambda \in A_0.$$

Будем рассматривать задачу минимизации второго типа [1], [4], когда для заданных числа $\varepsilon > 0$ и окрестности $O(\delta)$ множества U_* следует найти точку $u_{\varepsilon, \delta} \in U_0$ такую, что

$$(3) \quad |I(u_{\varepsilon, \delta}) - I_*| \leq \varepsilon, \quad u_{\varepsilon, \delta} \in O(\delta).$$

Пусть вместо точного значения функций $I(u)$, $g_i(u)$, $i = 1, \dots, s$, нам известны лишь их приближения $I_k(u)$, $g_{ik}(u)$, $i = 1, \dots, s$, $k = 1, 2, \dots$, причем погрешности

$$|I_k(u) - I(u)|, \quad \max_{1 \leq i \leq s} |g_{ik}(u) - g_i(u)|$$

при каждом $u \in U_0$ стремятся к нулю при $k \rightarrow \infty$. Тогда для решения задачи (1)–(3) можно попытаться найти точки

$$u_k \in U_k = \{u \in U_0: g_{ik}(u) \leq 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad g_{ik}(u) = 0, \quad i = n+1, \dots, s\}$$

из условия

$$I_k(u_k) \leq \inf_{U_k} I_k(u) + \varepsilon_k, \quad \varepsilon_k \geq 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon_k = 0,$$

решая при каждом $k \geq 1$ задачу минимизации функции $I_k(u)$ на множестве U_k с помощью какого-либо приближенного метода, а затем в качестве искомой точки $u_{\varepsilon, \delta}$ использовать точку u_k с достаточно большим k . Однако нетрудно привести примеры задач ([4], [21]), когда множество U_k пусто при всех $k = 1, 2, \dots$, и, следовательно, такой подход просто нереализуем. Более того, если даже $U_k \neq \emptyset$, $k = 1, 2, \dots$, то для получаемой при этом последовательности $\{u_k\}$ может не соблюдаться равенство

$$\lim_{k \rightarrow \infty} I(u_k) = I_*,$$

так что точка $u_{\varepsilon, \delta} = u_k$ может не удовлетворять условиям (3) ни при каком k . Это значит, что задача (1)–(3) из-за неточности в задании исходных данных, вообще говоря, некорректна как по аргументу в нужной топологии, так и по функционалу и для ее решения следует применять методы регуляризации.

Для учета ограничения типа равенств и неравенств из (1) могут быть использованы либо штрафные функции, либо барьерные функции, либо расширение множества.

Ограничения типа равенств и неравенств, задающие множество (1), разделим на три группы:

$$\begin{aligned}
 U_1 &= \{u \in U_0: g_i(u) \leq 0, i = 1, \dots, l; g_i(u) = 0, i = n+1, \dots, q\}, \\
 U_2 &= \{u \in U_0: g_i(u) \leq 0, i = l+1, \dots, m; g_i(u) = 0, \\
 (4) \quad & \quad \quad \quad i = q+1, \dots, r\}, \\
 U_3 &= \{u \in U_0: g_i(u) \leq 0, i = m+1, \dots, n; g_i(u) = 0, \\
 & \quad \quad \quad i = r+1, \dots, s\},
 \end{aligned}$$

так что

$$U = U_1 \cap U_2 \cap U_3.$$

Для учета ограничений первой группы будем пользоваться штрафными функциями, для учета второй группы — обобщенными барьерными функциями, остальные ограничения будут учтены с помощью расширения множества. Заметим, что в последующих рассмотрениях не исключаются также случаи, когда в (4) отсутствуют какие-либо ограничения типа равенств или неравенств.

Напомним [27], что функция $\tilde{P}_k(u)$ называется штрафной функцией множества U_1 , если

- 1) $0 \leq \tilde{P}_k(u) < \infty$ при всех $u \in U_0$, $k = 1, 2, \dots$;
- 2) для некоторой положительной последовательности $\{A_k\}$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A_k \tilde{P}_k(u) = \begin{cases} 0, & \text{если } u \in U_1, \\ \infty, & \text{если } u \in U_0 \setminus U_1. \end{cases}$$

Ниже мы ограничимся рассмотрением тех штрафных функций, которые согласованы с исходной задачей в следующем смысле:

P1: функция $\tilde{P}_k(u)$ τ -секвенциально полунепрерывна снизу для всех $k = 1, 2, \dots$, на U_0 , и $A_k \tilde{P}_k(u)$ монотонно неубывающая по k для всех $u \in U_0 \setminus U_1$.

P2: существует неотрицательная последовательность $\{\mu_k\}$ такая, что при всех $u \in U_0$, $k \geq k_0$:

$$(5) \quad \sum_{i=1}^l \lambda_i^* g_i(u) + \sum_{i=n+1}^q \lambda_i^* g_i(u) \leq A_k \tilde{P}_k(u) + \mu_k,$$

причем $\mu_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$; здесь λ_i^* взяты из условия R3.

P3: существуют положительная последовательность $\{\nu_k\}$ и число $p \geq 1$ такие, что

$$(6) \quad \sum_{i=1}^l \lambda_i^* g_i(u) + \sum_{i=n+1}^q \lambda_i^* g_i(u) \leq \nu_k (\tilde{P}_k(u))^{1/p}, \quad u \in U_0,$$

причем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \nu_k A_k^{-1} = 0 \quad \text{при} \quad p = 1,$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \nu_k^{\bar{p}} A_k^{1-\bar{p}} = 0 \quad \text{при} \quad p > 1, \quad \bar{p} = p(p-1)^{-1}.$$

Штрафные функции множества

$$U_{1k} = \{u \in U_0: g_{ik}(u) \leq 0, \quad i = 1, \dots, l; \quad g_{ik}(u) = 0, \quad i = n+1, \dots, q\}$$

составленные по приближенно заданным данным, будем обозначать через $P_k(u)$. Нетрудно показать [16], что многие широко используемые на практике штрафные функции обладают свойствами P1–P3. Например, таковы функции

$$(7) \quad \tilde{P}(u) = \sum_{i=1}^l |g_i^+(u)|^p + \sum_{i=n+1}^q |g_i^+(u)|^p,$$

$$P_k(u) = \sum_{i=1}^l |g_{ik}^+(u)|^p + \sum_{i=n+1}^q |g_{ik}^+(u)|^p,$$

где $z_i^+ = \max\{z_i; 0\}$ при $i = 1, \dots, l$, и $z_i^+ = |z_i|$ при $i = n+1, \dots, q$. В случае, когда в U_1 имеются лишь ограничения типа неравенств ($q = n$), можно принять

$$(8) \quad \tilde{P}_k(u) = \sum_{i=1}^l e^{D_k g_i(u)}, \quad P_k(u) = \sum_{i=1}^l e^{D_k g_{ik}(u)}, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} D_k = +\infty.$$

Обсудим возможность применения барьерных функций для учета ограничений, задающих множество U_2 . В классическом виде [27] барьерные функции определены только во внутренности допустимой области, и они стремятся к бесконечности при приближении к границе области. Такой подход не позволяет рассмотреть задачи с ограничениями типа равенств, поскольку внутренность таких множеств может быть пустой. Кроме того, если функции заданы с погрешностями, то приближенное множество

$$U_{2k} = \{u \in U_0: g_{ik}(u) \leq 0, \quad i = l+1, \dots, m; \quad g_{ik}(u) = 0, \quad i = q+1, \dots, r\},$$

и тем более его внутренность могут оказаться пустыми, и для приближенного множества классическая барьерная функция не будет иметь смысла. Для того, чтобы расширить область применения метода барьерных функций (в [27] этот метод называется методом внутренней точки) предлагается обобщить понятие барьерной функции [19].

Функцию $B_k(u)$ будем называть *обобщенной барьерной функцией множества U_2* , если существует последовательность множеств $\{V_k\}$ такая, что $U_2 \subseteq V_k$, $k = 1, 2, \dots$, $B_k(u)$ определена на V_k и

1. $-\infty < B_* \leq B_k(u) < +\infty$ при всех $u \in V_k$, $k = 1, 2, \dots$;
2.
$$\lim_{k \rightarrow \infty} B_k(u) \begin{cases} < \infty & \text{если } u \in U_2, r = q_1 \max_{l+1 \leq i \leq m} g_i(u) < 0, \\ = \infty & \text{если } u \in U_2, r \geq q \text{ и хотя бы для одного} \\ & i \in \{l+1, \dots, m, q+1, \dots, r\}, g_i(u) = 0; \end{cases}$$
3. для некоторой положительной последовательности $\{a_k\}$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k B_k(u) = 0 \quad \text{при всех } u \in U_2.$$

В дальнейшем мы будем рассматривать только такие обобщенные барьерные функции, которые удовлетворяют следующим двум условиям:

В1: расширенные множества V_k , $k = 1, 2, \dots$, определены следующим образом:

$$(9) \quad V_k = \{u \in U_0: \max(\max_{l+1 \leq i \leq m} g_{ik}(u), \max_{q+1 \leq i \leq r} |g_{ik}(u)|) \leq \omega_k(u)\},$$

где функция $\omega_k(u)$ при каждом фиксированном $u \in U_0$ стремится к нулю при $k \rightarrow \infty$, а функция $B_k(u)$ имеет вид

$$(10) \quad B_k(u) = \sum_{i=l+1}^m \varphi(\gamma_k + \omega_k(u) + g_{ik}(u)) + \sum_{i=q+1}^r \varphi(\gamma_k + \omega_k(u) - g_{ik}(u)) + \\ + \sum_{i=q+1}^r \varphi(\gamma_k + \omega_k(u) + g_{ik}(u)), \quad \gamma_k > 0, \lim_{k \rightarrow \infty} \gamma_k = 0,$$

где $\varphi(z)$ скалярная функция от z , которая определена, непрерывна, не возрастает на $(0, \infty)$, причем

$$\inf_{0 < z < \infty} \varphi(z) = \varphi_* > -\infty, \quad \lim_{z \rightarrow 0} \varphi(z) = \infty, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} a_k \varphi(\gamma_k) = 0;$$

В2: для каждого $k \geq 1$ существует число $L_k > 0$ такое, что

$$(11) \quad |\varphi(x) - \varphi(y)| \leq L_k |x - y| \quad \text{для всех } x, y \geq \gamma_k.$$

Нетрудно проверить, что функция, определенная конструкцией В1, в самом деле является обобщенной барьерной функцией. В качестве примера в (10) можно, например, взять функции

$$\varphi(z) = z^{-1}; \quad \varphi(z) = (\max\{-\ln z; 0\})^p, \quad p \geq 1.$$

Наконец, в качестве расширения множества U_3 будем рассматривать множества

$$(12) \quad W_k = \{u \in U_0: g_{ik}(u) \leq \omega_k(u), \quad i = m+1, \dots, n; \\ |g_{ik}(u)| \leq \omega_k(u), \quad i = r+1, \dots, s\}, \quad k = 1, 2, \dots;$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \omega_k(u) = 0, \quad u \in U_0.$$

Функции $\omega_k(u)$ в (9), (12) ниже будут выбираться так, чтобы в отличие от множеств U_2 и U_3 , которые могут быть и пустыми, V_k и W_k не были пустыми ни при каких $k \geq 1$.

Заметим, что в тех случаях, когда требуется, чтобы приближенное решение задачи (1)–(3) удовлетворяло тому или иному ограничению с высокой точностью, т.е. погрешность в нарушении соответствующего ограничения была сравнима с точностью задания исходных данных, использование обобщенных барьерных функций или расширения множества может оказаться предпочтительнее использования штрафных функций. Для тех ограничений, для которых трудно гарантировать допустимость или „почти” допустимость начальной точки u_1 , и достаточно, чтобы эти ограничения выполнялись лишь при приближении к оптимуму, целесообразно использовать штрафную функцию. Перейдем к изложению метода решения задачи (1)–(3), представляющего собой метод регуляризации А. Н. Тихонова в сочетании с методом штрафных и обобщенных барьерных функций и метода расширения множества.

2. Метод регуляризации

Возьмем какой-либо τ -стабилизатор $\Omega(u)$ задачи (1)–(3) [4]. Напоминаем, что τ -стабилизатором задачи (1)–(3) называется функционал $\Omega(u)$, определенный на множестве U_0 и удовлетворяющий следующим условиям:

1. $\Omega(u) \geq 0$ для всех $u \in U_0$;
2. множество $\Omega_C = \{u \in U_0: \Omega(u) \leq C\}$ является τ -секвенциально компактным при любом $C = \text{const} \geq 0$, т.е. любая последовательность

$\{u_k\} \in \Omega_C$ имеет хотя бы одну подпоследовательность $\{u_{k_n}\}$, τ -сходящуюся к некоторой точке $u \in \Omega_C$.

Точка $u_* \in U_*$ называется Ω -нормальным решением задачи (1)–(3), если

$$\Omega(u_*) = \Omega_* = \inf_{U_*} \Omega(u).$$

Будем предполагать, что погрешности в задании приближенных значений $I_k(u)$, $g_{ik}(u)$, $i = 1, \dots, s$, $\Omega_k(u)$ функций $I(u)$, $g_i(u)$, $i = 1, \dots, s$, $\Omega(u)$ и расширение множеств V_k и W_k из (9) и (12), соответственно, согласованы со стабилизатором в следующем смысле:

$$(13) \quad \max \{ |I_k(u) - I(u)|, |P_k(u) - \tilde{P}_k(u)|, \max_{\substack{l+1 \leq i \leq n \\ q+1 \leq i \leq s}} |g_{ik}(u) - g_i(u)| \} \leq \delta_k (1 + \Omega(u)),$$

$$(14) \quad \Omega_k(u) \geq 0, \quad |\Omega_k(u) - \Omega(u)| \leq \chi_k (1 + \Omega(u)),$$

$$(15) \quad \omega_k(u) \leq \theta_k (1 + \Omega(u)),$$

причем $\{\delta_k\}$, $\{\chi_k\}$ и $\{\theta_k\}$ неотрицательные последовательности, стремящиеся к нулю, $\chi_k < 1$ и $\delta_k \leq \theta_k (1 - \chi_k)$, $k = 1, 2, \dots$. Эти условия обеспечивают непустоту множеств V_k , W_k и включение $U_* \subset V_k \cap W_k$, $k = 1, 2, \dots$.

Составим функцию Тихонова в виде

$$T_k(u) = I_k(u) + A_k P_k(u) + a_k B_k(u) + \alpha_k \Omega_k(u), \quad u \in V_k \cap W_k,$$

где последовательности $\{A_k\}$ и $\{a_k\}$ взяты из определения штрафной и барьерной функции, $\{\alpha_k\}$ — положительная последовательность, стремящаяся к нулю. Рассмотрим задачу минимизации этой функции на множестве $V_k \cap W_k$, а именно: при каждом фиксированном $k \geq 1$ определим точку u_k , удовлетворяющую условиям

$$(16) \quad \begin{aligned} T_k^* &\leq T_k(u_k) \leq T_k^* + \varepsilon_k, \quad u_k \in V_k \cap W_k, \\ \varepsilon_k &> 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon_k = 0, \quad T_k^* = \inf_{V_k \cap W_k} T_k(u). \end{aligned}$$

Если нижняя грань $T_k(u)$ на $V_k \cap W_k$ достигается хотя бы в одной точке $u_k \in V_k \cap W_k$, то в (16) можно допустить возможность $\varepsilon_k = 0$. Оказывается, что при согласованном изменении параметров δ_k , χ_k , θ_k , A_k , μ_k , ν_k , a_k , γ_k , I_k , α_k , ε_k последовательность $\{u_k\}$, определяемая условиями (16), существует, минимизирует функцию $I(u)$ на U и τ -сходится к множеству U_* . А именно, справедлива следующая

ТЕОРЕМА 1. Если последовательности $\{\delta_k\}$, $\{\chi_k\}$, $\{\theta_k\}$, $\{A_k\}$, $\{\mu_k\}$, $\{\nu_k\}$, $\{a_k\}$, $\{\gamma_k\}$, $\{L_k\}$, $\{\alpha_k\}$, $\{\varepsilon_k\}$ из определений $P_k(u)$, $B_k(u)$, $T_k(u)$ и из (5), (6), (11), (13)–(15) таковы, что

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} (\delta_k + \chi_k + a_k + \alpha_k + a_k L_k) &= 0, \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\delta_k(1 + A_k) + \theta_k + \mu_k + \gamma_k + \varepsilon_k + |a_k \varphi(\gamma_k)|}{\alpha_k} &= 0, \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(\gamma_k) &= \infty; \quad \chi_k < 1, \quad \delta_k \leq \theta_k(1 - \chi_k), \quad k = 1, 2, \dots, \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{A_k \bar{P}_k(u)}{\alpha_k} &= 0 \text{ для всех } u \in U_1; \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\nu_k}{A_k} = 0, \text{ если } p = 1, \end{aligned}$$

и

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \nu_k^{\bar{p}} A_k^{1-\bar{p}} = 0, \quad \text{если } p > 1, \quad \bar{p} = p(p-1)^{-1},$$

то последовательность $\{u_k\}$, определяемая условиями (16), существует, τ -сходится к множеству U_* , $\lim_{k \rightarrow \infty} I(u_k) = I_*$, причем при больших k справедливы следующие оценки:

$$\begin{aligned} I(u_k) - I_* &= O(\alpha_k), \\ A_k \bar{P}_k(u_k) &= \begin{cases} O(\alpha_k) & \text{при } p = 1, \\ O\left(\frac{\nu_k^{\bar{p}}}{A_k^{\bar{p}-1}} + \alpha_k\right) & \text{при } p > 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Если кроме того $\Omega(u)$ τ -секвенциально полунепрерывна снизу на U_0 , то $\lim_{k \rightarrow \infty} \Omega(u_k) = \Omega_*$ и последовательность $\{u_k\}$ τ -сходится к множеству U_{**} Ω -нормальных решений.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть задача (1)–(3) выпукла, т.е. функции $I(u)$, $g_i(u)$, $i = 1, \dots, n$, $|g_i(u)|$, $i = n+1, \dots, s$, выпуклы на выпуклом и замкнутом множестве U_0 рефлексивного банахова пространства B . Пусть выполнены все условия теоремы для случая, когда τ слабая топология пространства B , и $\Omega(u)$ строго равномерно выпуклая функция. Тогда последовательность $\{u_k\}$, определяемая условиями (16), существует, минимизирует функцию $I(u)$ на U , сходится к единственному Ω -нормальному решению u_* задачи (1)–(3) по норме B и

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \Omega(u_k) = \Omega(u_*) = \Omega_*.$$

Приведенная выше теорема 1 является обобщением аналогичных теорем из [4], [11]–[21], ее доказательство проводится с помощью техники этих работ. В [4] приведен обзор работ, в которых метод регуляризации Тихонова в сочетании со штрафными функциями типа (7) применяется к конечномерным задачам. В [11] для конечномерной задачи применен метод регуляризации в сочетании со штрафными функциями типа (8), причем ограничения типа равенств в этой работе не рассматриваются, а исходные данные предполагаются точными. В [12]–[21] рассматривались некорректные экстремальные задачи без предположения ее конечномерности. В [13] рассмотрена задача выпуклого программирования в гильбертовом пространстве при предположении, что функции $I(u)$ и $g_i(u)$ известны точно, а штрафная функция (7) взята при $p = 2$. В [14] единообразно изучались метод регуляризации Тихонова, метод невязки и метод квазирешений для задач минимизации в топологическом пространстве, когда функция и множество, на котором ищется минимум этого функционала, известны приближенно. В этой работе взяты негладкие штрафные функции (7) с $p = 1$. Метод регуляризации в топологическом пространстве с неточными исходными данными в сочетании с гладкими штрафными функциями вида (7) ($p > 1$) изучен в (15) и в сочетании со штрафными функциями общего вида в [16]. В работах [17], [21] рассматривалась регуляризация комбинированного метода штрафных функций и расширения множества. В статье [12] изложена регуляризация метода барьерных функций для выпуклых задач в гильбертовом пространстве с ограничениями типа неравенств при точных данных. В [18] доказывалась сходимость метода регуляризации для случая, когда ограничения учитывались с помощью конкретной обобщенной барьерной функции вида (10) с функцией $\varphi(z) = z^{-1}$ при точных и приближенных данных, соответственно. Метод регуляризации с неточными исходными данными в сочетании с обобщенными барьерными функциями общего вида изучен в [19]. В работе [20] предложена регуляризация комбинированного метода штрафных и обобщенных барьерных функций с конкретными штрафными и барьерными функциями.

3. Итеративная регуляризация

Изложенный выше метод регуляризации для решения некорректных экстремальных задач, как мы видели, заключается в том, что исходную задачу минимизации $I(u)$ на U заменяем семейством вспомогательных задач минимизации по функционалу функции Тихонова $T_k(u)$ на множестве $V_k \cap W_k$. Как было показано, сходимость получаемой при этом последовательности $\{u_k\}$ к решению исходной задачи зависит

только от согласования параметров, входящих в определение функции $T_k(u)$, погрешности задания исходных данных и точности решения вспомогательных задач минимизации, и не зависит от того, какими методами проводится минимизация функции $T_k(u)$ на множестве $V_k \cap W_k$. Однако, следует заметить, что применение обычных сходящихся по функционалу итерационных методов минимизации при каждом k хотя и позволяет найти точку u_k из (16) за конечное число итераций n_k , но при больших k число n_k может оказаться очень большим, и может даже случиться, что $n_k \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$. Чтобы избежать неудобств, которые могут возникнуть при практической реализации изложенного выше метода регуляризации, вместо последовательных минимизаций можно попытаться построить такой нестационарный процесс [10], в котором будут согласованы изменения упомянутых выше величин и параметров конкретного метода. Для этой цели оказывается полезным принцип итеративной регуляризации, предложенный в [6]. Этот принцип заключается в следующем. Берется за основу подходящий базовой итеративный метод (например, какой-либо метод градиентного типа, или метод Ньютона) для минимизации $T_k(u)$. Пусть при некотором k точка u_k уже известна. Тогда делается один шаг базового метода применительно к функции $T_k(u)$, считая точку u_k начальной, и находят точку u_{k+1} . Затем переходят к следующей функции $T_{k+1}(u)$ и делается один шаг базового метода исходя из точки u_{k+1} и т.д. Кроме того, принцип итеративной регуляризации предполагает согласование параметров метода регуляризации и базового метода минимизации.

В [5]–[7] итеративная регуляризация методов проекции градиента, Ньютона излагается для случая, когда множество, на котором ищется минимум, известно точно, в [8] изучается влияние возмущения области. В [9] рассмотрена конечномерная задача с неточно заданным множеством. В настоящем параграфе, представляющим собой обзор по работам [21]–[25], рассматривается итеративная регуляризация методов проекции градиента, условного градиента, Ньютона и одного метода третьего порядка (описание этих базовых методов см. например в [28]) при неточном задании исходных данных и без предположения конечномерности задачи.

В последующих двух параграфах всюду будем считать, что

IR1: U_0 — выпуклое замкнутое множество из гильбертова пространства H , функции $I(u)$, $g_i(u)$, $i = 1, \dots, s$, и их приближения $I_k(u)$, $g_{ik}(u)$, $i = 1, \dots, s$, дифференцируемы по Фреше, $I(u)$, $g_i(u)$, $i = 1, \dots, n$ $|g_i(u)|$, $i = n+1, \dots, s$, выпуклы на H ;

IR2: выполнены условия R2 и R3;

IR3: в качестве стабилизатора взята функция $\Omega(u) = \frac{1}{2} \|u\|^2$.

Эти три условия гарантируют выпуклость, замкнутость множества U_* . Отсюда и из сильной выпуклости функции $\Omega(u)$ следует, что нормальное решение существует и единственно.

Наряду с условиями IR1–IR3 в этом параграфе еще предполагается, что в (1) все ограничения типа равенств и неравенств учитываются штрафными функциями (7) при $p > 1$, т.е. $U = U_1$, $n = m = l$, $s = r = q$ и

$$\begin{aligned}\tilde{P}(u) &= \sum_{i=1}^n (\max\{g_i(u); 0\})^p + \sum_{i=n+1}^s |g_i(u)|^p, \\ P_k(u) &= \sum_{i=1}^n (\max\{g_{ik}(u); 0\})^p + \sum_{i=n+1}^s |g_{ik}(u)|^p, \quad u \in U_0.\end{aligned}$$

(а) *Метод проекции градиента* [15], [17], [21]. Возьмем функцию Тихонова в виде

$$(17) \quad T_k(u) = I_k(u) + A_k P_k(u) + \frac{1}{2} \alpha_k \|u\|^2.$$

В силу сделанных предположений $T_k(u)$ дифференцируема по Фреше и

$$T'_k(u) = I'_k(u) + A_k P'_k(u) + \alpha_k u.$$

Построим последовательность $\{u_k\}$ следующим образом:

$$(18) \quad \begin{aligned}u_{k+1} &= P_{U_0}(u_k - \beta_k T'_k(u_k)), \quad k = 1, 2, \dots; \quad u_1 \in U_0, \\ \beta_k &> 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \beta_k = 0,\end{aligned}$$

где $P_{U_0}(u)$ — проекция точки u на множество U_0 , определяемая условием

$$\|u - P_{U_0}(u)\| = \inf_{v \in U_0} \|u - v\|.$$

Оказывается, что можно априорно назначить последовательности параметров регуляризации, штрафной функции, итеративного процесса проекции градиента и погрешности в задании исходных данных, что процедура (18) будет сходиться по норме к нормальному решению. А именно, справедлива следующая

ТЕОРЕМА 2. Пусть

1. градиенты функции $I(u)$, $g_i(u)$, $i = 1, \dots, s$, таковы, что

$$\max\{\|I'(u)\|, \|\tilde{P}'(u)\|\} \leq L_0(1 + \|u\|), \quad u \in U_0, L_0 = \text{const} > 0;$$

2. погрешности в задании приближений $I'_k(u)$, $g'_{ik}(u)$, $i = 1, \dots, s$ для градиентов $I'(u)$, $g'_i(u)$, $i = 1, \dots, s$, удовлетворяют условиям

$$(19) \quad \max \{ \|I'_k(u) - I'(u)\|, \|P'_k(u) - \tilde{P}'(u)\| \} \leq \delta_k(1 + \|u\|), \quad u \in U_0;$$

3. последовательности $\{A_k\}$, $\{\alpha_k\}$, $\{\delta_k\}$, $\{\beta_k\}$ из (17), (18), (19) таковы, что

$$(20) \quad A_{k+1} \geq A_k > 0, \quad \alpha_k > 0, \quad \delta_k \geq 0, \quad \beta_k > 0, \quad k = 1, 2, \dots,$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\alpha_k + \beta_k + \delta_k + A_k^{-1}) = 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k A_k^{\bar{p}-1} = \infty, \quad \bar{p} = p(p-1)^{-1},$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\delta_k A_k + \beta_k A_k^2}{\alpha_k} = 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{A_{k+1} - A_k + |a_{k+1} - a_k|}{\alpha_k^2 \beta_k} = 0.$$

Тогда последовательность $\{u_k\}$, определяемая из (18), сходится по норме H к Ω -нормальному решению u_* задачи минимизации $I(u)$ на U .

Заметим, что последовательности $\{A_k\}$, $\{\alpha_k\}$, $\{\beta_k\}$, удовлетворяющие условиям (20), существуют. Их можно искать, например, в виде $A_k = k^A$, $\alpha_k = k^{-\alpha}$, $\beta_k = k^{-\beta}$, где A , α , β положительные константы. В частности, при $p = 2$ можно взять $A_k = k^{1/6}$, $\alpha_k = k^{-1/6}$, $\beta_k = k^{-1/2}$, $k = 1, 2, \dots$

Заметим, что в том случае, когда $U_0 = H$, (18) переходит в метод градиентного спуска:

$$(21) \quad u_{k+1} = u_k - \beta_k T'_k(u_k), \quad k = 1, 2, \dots; \quad u_1 \in H.$$

(б) Метод условного градиента [21]–[23]. Запишем функцию Тихонова в виде

$$(22) \quad T_k(u) = A_k^{-1} I_k(u) + P_k(u) + \frac{1}{2} \alpha_k A_k^{-1} \|u\|^2, \quad u \in U_0.$$

Пусть $u_1 \in U_0$, пусть k -е приближение $u_k \in U_0$, $k \geq 1$ уже известно. Определим точку $v_k \in U_0$ из условия

$$(23) \quad \langle T'_k(u_k), v_k - u_k \rangle \leq \inf_{u \in U_0} \langle T'_k(u_k), u - u_k \rangle + \varepsilon_k,$$

и положим

$$(24) \quad u_{k+1} = u_k - \beta_k (v_k - u_k),$$

где

$$0 \leq \beta_k \leq 1,$$

$$(25) \quad T_k(u_{k+1}) \leq \inf_{0 \leq \beta \leq 1} T_k(u_k + \beta(v_k - u_k)) + \delta_k.$$

Оказывается, при определенных условиях на исходные данные и согласованном изменении параметров метода (22)–(25) последовательность $\{u_k\}$ сходится по норме к нормальному решению. А именно, справедлива

ТЕОРЕМА 3. Пусть

1. U_0 — ограниченное множество, и градиенты $I'(u)$, $\tilde{P}'(u)$ таковы, что

$$(26) \quad \max \{ \|I'(u) - I'(v)\|, \|\tilde{P}'(u) - \tilde{P}'(v)\| \} \leq L \|u - v\|$$

при всех $u, v \in U_0$, $L = \text{const} \geq 0$;

2. функции $I_k(u)$, $g_{ik}(u)$, $i = 1, \dots, s$, таковы, что

$$(27) \quad \begin{aligned} & \max \{ |I(u) - I_k(u)|, |\tilde{P}(u) - P_k(u)| \} \leq \eta_k, \\ & \max \{ \|I'(u) - I'_k(u)\|, \|\tilde{P}'(u) - P'_k(u)\| \} \leq \xi_k, \\ & u \in U_0, \quad k = 1, 2, \dots; \end{aligned}$$

3. последовательности $\{\alpha_k\}$, $\{A_k\}$, $\{\delta_k\}$, $\{\varepsilon_k\}$, $\{\eta_k\}$, $\{\xi_k\}$ таковы, что

$$(28) \quad \begin{aligned} & \alpha_k > 0, \quad A_k > 0, \quad \delta_k \geq 0, \quad \varepsilon_k \geq 0, \quad \eta_k \geq 0, \quad \xi_k \geq 0, \\ & \alpha_{k+1} \leq \alpha_k, \quad A_{k+1} \geq A_k, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} (\alpha_k + \delta_k + \varepsilon_k + \eta_k + \xi_k + A_k^{-1}) = 0, \\ & \lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k A_k^{\bar{p}-1} = \infty, \quad \bar{p} = p(p-1)^{-1}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} (\delta_k + \eta_k) < \infty, \\ & \alpha_k A_{k+1} - \alpha_{k+1} A_k \leq C_1 (A_{k+1} - A_k), \quad \alpha_k A_k^{-1} \geq C_2 k^{-\nu}, \end{aligned}$$

$$(29) \quad A_k^{-1} - A_{k+1}^{-1} + \eta_k + \xi_k + \varepsilon_k + \delta_k \leq C_3 k^{-2\varrho},$$

где $C_1, C_2, C_3, \varrho, \nu$ — какие-либо положительные постоянные, $0 < \nu < \varrho < 1$.

Тогда последовательность $\{u_k\}$, определяемая из (22)–(25) сходится по норме H к нормальному решению u_* .

В качестве последовательностей, удовлетворяющих условиям (28), (29) можно, например, взять $\alpha_k = k^{-a}$, $\delta_k = k^{-\delta}$, $\varepsilon_k = k^{-\varepsilon}$, $\eta_k = k^{-\eta}$, $\xi_k = k^{-\xi}$, $A_k = k^{-A}$, где $0 < A < \varrho$ при $0 < \varrho \leq \frac{1}{2}$ или $2\varrho - 1 \leq A < \varrho$ при $\frac{1}{2} < \varrho < 1$, $\varepsilon = \xi \geq 2\varrho$, $\delta = \eta > \max\{1; 2\varrho\}$, $0 < a < \min\{\varrho - A, A(\bar{p} - 1)\}$.

Аналогично проводится итеративная регуляризация другого варианта метода условного градиента, когда последовательность $\{u_k\}$

строится по формулам (23), (24), а величина β_k определяется соотношениям

$$(30) \quad \beta_k = \begin{cases} 0, & \text{если } \langle T'_k(u_k), u_k - v_k \rangle \leq 0, \\ \min \left\{ 1; \frac{\langle T'_k(u_k), u_k - v_k \rangle}{\|u_k - v_k\|^2} \right\}, & \text{если } \langle T'_k(u_k), u_k - v_k \rangle > 0, \end{cases}$$

$$0 < \varrho \leq \varrho_k \leq 2(1 - \varepsilon)(L + LA_1^{-1} + 2a_1 A_1^{-1})^{-1}, \quad 0 < \varepsilon < 1,$$

и постоянная L взята из (26). При выполнении условий теоремы 3 с заменой условия (29) на $A_k^{-1} - A_{k+1}^{-1} + \eta_k + \xi_k + \varepsilon_k \leq C_3 k^{-2\varrho}$ можно показать, что $\{u_k\}$ из (23), (24), (30) сходится к u_* по норме H .

Возможно и другое определение величины β_k :

$$(31) \quad \beta_k = \begin{cases} 0, & \text{если } \varepsilon \langle T'_k(u_k), u_k - v_k \rangle \leq \chi_k \|u_k - v_k\|, \\ 2^{-i_0}, & \text{если } \varepsilon \langle T'_k(u_k), u_k - v_k \rangle > \chi_k \|u_k - v_k\|, \end{cases}$$

где i_0 — наименьшее неотрицательное целое число, для которого выполняется неравенство

$$(32) \quad T_k(u_k) - T_k(u_k + 2^{-i_0}(v_k - u_k)) \geq 2^{-i_0}(\varepsilon \langle T'_k(u_k), u_k - v_k \rangle - \chi_k \|u_k - v_k\|), \quad 0 < \varepsilon < 1.$$

Для того чтобы последовательность $\{u_k\}$, определяемая условиями (23), (24), (31), (32), сходилась к точке u_* по норме H достаточно выполнения всех условий теоремы 3 с заменой неравенства (29) на $A_k^{-1} - A_{k+1}^{-1} + \eta_k + \chi_k + \varepsilon_k \leq C_3 k^{-2\varrho}$ и, кроме того, условия

$$2\xi_k(1 + A_k^{-1}) \leq \chi_k, \quad k = 1, 2, \dots$$

Наконец, остановимся на еще одном варианте метода условного градиента.

ТЕОРЕМА 4. Пусть выполнены условия 1, 2 теоремы 3, кроме условия (27), а последовательности $\{\alpha_k\}$, $\{A_k\}$, $\{\beta_k\}$, $\{\xi_k\}$, $\{\varepsilon_k\}$ таковы, что

$$\alpha_k > 0, \quad A_k > 0, \quad \beta_k > 0, \quad \xi_k \geq 0, \quad \varepsilon_k \geq 0, \quad \alpha_k \geq \alpha_{k+1}, \quad A_k \leq A_{k+1},$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\alpha_k + \beta_k + \xi_k + \varepsilon_k + A_k^{-1}) = 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k A_k^{\bar{p}-1} = \infty, \quad \bar{p} = p(p-1)^{-1},$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\alpha_k - \alpha_{k+1} + A_{k+1} - A_k}{\alpha_k \beta_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\beta_k A_k + \varepsilon_k + \xi_k A_k}{\alpha_k} = 0.$$

Пусть последовательность u_k определена из условий (23), (24), причем в (23) вместо функции (22) взята функция (17).

Тогда $\{u_k\}$ сходится по норме H к нормальному решению u_* .

(в) Метод Ньютона [21], [22], [24]. Применение метода Ньютона для регуляризации некорректных экстремальных задач предполагает, что функция Тихонова дважды непрерывно дифференцируема. Пусть $u_k \in U_0$ известное k -е приближение решения задачи. Определим следующее приближение $u_{k+1} \in U_0$ из условия

$$(33) \quad N_k(u_{k+1}) \leq \inf_{U_0} N_k(u) + \varepsilon_k,$$

где $N_k(u)$ представляет собой квадратичную часть приращения $T_k(u) - T_k(u_k)$ функции (22), то есть

$$N_k(u) = \langle T'_k(u_k), u - u_k \rangle + \frac{1}{2} \langle T''(u_k)(u - u_k), u - u_k \rangle.$$

ТЕОРЕМА 5. Пусть

1. U_0 — выпуклое замкнутое множество с непустой внутренностью, существуют вторые производные $I''(u)$ и $\tilde{P}''(u)$, причем

$$\max \{ \|I''(u) - I''(v)\|; \|\tilde{P}''(u) - \tilde{P}''(v)\| \} \leq L \|u - v\|$$

для всех $u, v \in U_0$, $L = \text{const} \geq 0$;

2. для нормального решения u_* имеется априорная оценка $\|u_*\| \leq R < \infty$;

3. функции $I_k(u)$, $g_{ik}(u)$ дважды непрерывно дифференцируемы по Фреше на U_0 и таковы, что

$$|N_k(u) - F_k(u)| \leq \eta_k,$$

где $F_k(u)$ — квадратичная часть приращения точной функции Тихонова

$$\tilde{T}_k(u) = A_k^{-1} I(u) + \tilde{P}(u) + \frac{1}{2} \alpha_k A_k^{-1} \|u\|^2;$$

4. последовательности $\{\alpha_k\}$, $\{A_k\}$, $\{\varepsilon_k\}$, $\{\eta_k\}$ таковы, что

$$\alpha_k > 0, \quad \varepsilon_k \geq 0, \quad \eta_k \geq 0, \quad \alpha_{k+1} \leq \alpha_k, \quad A_{k+1} \geq A_k > 1,$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\alpha_k + \varepsilon_k + \eta_k + A_k^{-1}) = 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k A_k^{\bar{p}-1} = \infty, \quad \bar{p} = p(p-1)^{-1};$$

$$\frac{\alpha_k}{A_k} \leq b \frac{\alpha_{k+1}}{A_{k+1}}, \quad 256 b^2 L^2 (\varepsilon_k + \eta_k) \leq \frac{\alpha_k}{A_k} \left(\frac{\alpha_{k+1}}{A_{k+1}} \right)^2,$$

$$\frac{\alpha_k - \alpha_{k+1}}{\alpha_k} \leq \frac{1}{16 b L R_1} \frac{\alpha_{k+1}}{A_{k+1}}, \quad \frac{A_{k+1} - A_k}{\alpha_k} \leq \frac{1}{8 b L \psi(R_1)} \frac{\alpha_{k+1}}{A_{k+1}},$$

где $R_1 = (R^2 + 2 \sum_{i=1}^s |\lambda_i^*| \bar{p}^{-1} p^{1-\bar{p}} \sup_{k \geq 1} \alpha_k A_k^{1-\bar{p}})^{1/2}$, $b = \text{const} \geq 1$, а $\psi(\varrho)$ — какая-либо неубывающая функция при $\varrho \geq 0$ такая, что

$$\|\tilde{P}'(u)\| \leq \psi(\|u\|);$$

5. начальное приближение $u_1 \in U_0$ таково, что

$$2bL\|u_1 - v_1\| \leq \alpha_1/A_1, \quad \text{где} \quad u_1 \in U_0, \quad \tilde{T}_1(v_1) = \inf_{U_0} \tilde{T}_1(u).$$

Тогда последовательность $\{u_k\}$, определяемая условием (33), существует и $\lim_{k \rightarrow \infty} \|u_k - u_*\| = 0$.

В качестве последовательностей, удовлетворяющих условиям теоремы 5, можно, например, взять $\alpha_k = (k+m)^{-\alpha}$, $A_k = (k+m)^A$, $\varepsilon_k = \eta_k = (k+m)^{-\alpha}$, $k = 1, 2, \dots$, где $0 < \alpha < 1/2\varrho$, $\alpha/(\bar{p}-1) < A < 1/2-\alpha$, $\varepsilon > 3/2$, m — достаточно большое число. Примером функции $\psi(\varrho)$ из условия этой теоремы может служить

$$\psi(\varrho) = \|\tilde{P}'(w)\| + (\|\tilde{P}''(w)\| + L)(\varrho + \|w\| + 1)^2, \quad w \in U_0.$$

Приведем другой способ итеративной регуляризации метода Ньютона для случая, когда $U_0 = H$.

ТЕОРЕМА 6. Пусть $U_0 = H$, выполнены условия 1, 2 теоремы 5,

$$(34) \quad \|\tilde{P}'(u)\| \leq L_0(1 + \|u\|), \quad u \in H, \quad L_0 = \text{const} \geq 0,$$

и числовые последовательности $\{\alpha_k\}$, $\{A_k\}$ таковы, что

$$(35) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} A_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k A_k^{\bar{p}-1} = \infty, \quad \bar{p} = p(p-1)^{-1},$$

$$(36) \quad \alpha_k > 0, \quad A_k \geq 1, \quad 1 \leq \frac{\alpha_k}{\alpha_{k+1}} \leq 2, \quad 1 \leq \frac{A_{k+1}}{A_k} \leq 2, \\ \frac{A_{k+1} - A_k}{\alpha_{k+1}} \leq \frac{1}{L_0},$$

$$(37) \quad \frac{(\alpha_k - \alpha_{k+1})A_{k+1}}{\alpha_{k+1}^2} \leq \frac{1}{3R_1 L t}, \quad \frac{(A_{k+1} - A_k)A_{k+1}}{\alpha_{k+1}^2} \leq \frac{1}{3L L_0(1 + R_1)},$$

где R_1 взято из теоремы 5, а t — произвольное фиксированное число, лишь бы $t \geq 96$ (например, можно взять $t = 96$). Пусть, кроме того,

$$(38) \quad A_1 L t \|\tilde{T}'_1(u_1)\| \leq \alpha_1^2,$$

где

$$(39) \quad \tilde{T}_k(u) = I(u) + A_k \tilde{P}(u) + \frac{1}{2} \alpha_k \|u\|^2.$$

Тогда последовательность $\{u_k\}$, определяемая условиями

$$u_{k+1} = u_k - (\tilde{T}_k''(u_k))^{-1} \tilde{T}_k(u_k), \quad k = 1, 2, \dots,$$

существует и сходится по норме H к нормальному решению u_* .

В качестве последовательностей $\{\alpha_k\}$, $\{A_k\}$ здесь могут быть взяты

$$(40) \quad \alpha_k = Dk^{-\alpha}, \quad A_k = k^A, \quad k = 1, 2, \dots$$

Нетрудно показать, что для любого начального приближения u_1 положительные постоянные D , α , A могут быть выбраны удовлетворяющими условиям (35)–(38).

(г) *Метод третьего порядка* [25]. В [29] был предложен следующий итерационный метод минимизации функции $I(u)$ на гильбертовом пространстве H :

$$(41) \quad \bar{u}_k = u_k - \Gamma_k I'(u_k), \quad u_{k+1} = \bar{u}_k - \Gamma_k F'(\bar{u}_k), \quad k = 1, 2, \dots,$$

где $\Gamma_k = (I'(u_k, u_k - \beta_k I'(u_k)))^{-1}$, β_k — параметр метода. Здесь через $I'(u, v)$ обозначена разделенная разность градиента $I'(u)$, которая по определению, представляет собой линейный оператор, действующий из H в H и удовлетворяющий равенству

$$I'(u, v)(u - v) = I'(u) - I'(v), \quad u, v \in H.$$

Например, если $I(u)$ дважды дифференцируемая функция в n -мерном евклидовом пространстве переменных $u = (u^1, u^2, \dots, u^n)$, то $I'(u, v)$ представляет собой матрицу порядка $n \times n$ с элементами $I'_{ij}(u, v)$, определенными следующим образом:

$$I'_{ij}(u, v) = \begin{cases} (I_{u^i}(v^1, \dots, v^{j-1}, u^j, u^{j+1}, \dots, u^n) - I_{u^i}(v^1, \dots, v^{j-1}, v^j, u^{j+1}, \dots, \\ \dots, u^n)) (u^j - v^j)^{-1} & \text{при } u^j \neq v^j, \\ I_{u^i u^j}(v^1, \dots, v^{j-1}, v^j, u^{j+1}, \dots, u^n) & \text{при } u^j = v^j, \end{cases}$$

Здесь через $I_{u^i}(u)$, $I_{u^i u^j}(u)$ обозначены первые и соответственно вторые производные по переменным u^i, u^j , $i, j = 1, \dots, n$.

Рассмотрим следующий вариант итеративной регуляризации метода (41):

$$(42) \quad \bar{u}_k = u_k - \Gamma_k \tilde{T}'_k(u_k), \quad u_{k+1} = \bar{u}_k - \Gamma_k \tilde{T}'_k(\bar{u}_k), \quad k = 1, 2, \dots,$$

где $\Gamma_k = (\tilde{T}'_k(u_k, u_k - \beta_k \tilde{T}'_k(u_k)))^{-1}$, функция Тихонова $\tilde{T}_k(u)$ определена согласно (39).

ТЕОРЕМА 7. Пусть $U_0 = H$, функции $I(u)$, $g_i(u)$, $i = 1, \dots, s$ непрерывно дифференцируемы по Фреше на H , градиенты $I'(u)$, $\tilde{P}'(u)$ функций $I(u)$, $\tilde{P}(u)$ обладают разделенными разностями $I'(u, v)$, $\tilde{P}'(u, v)$, причем

$$\langle I'(u, v)\xi, \xi \rangle \geq 0, \quad \langle \tilde{P}'(u, v)\xi, \xi \rangle \geq 0, \quad u, v \in H;$$

$$\max \{ \|I'(u, v) - I'(u, w)\|; \|\tilde{P}'(u, v) - \tilde{P}'(u, w)\| \} \leq L(\|u - v\| + \|v - w\|), \\ u, v, w \in H; L = \text{const} \geq 0;$$

справедливо неравенство (34) и для нормального решения u_* известна априорная оценка $\|u_*\| \leq R < \infty$. Пусть, кроме того,

$$(43) \quad |\beta_k| \leq C\alpha_k^{-1}, \quad k = 1, 2, \dots; \quad C = \text{const} > 0,$$

последовательности $\{\alpha_k\}$, $\{A_k\}$ и начальное приближение u_1 удовлетворяют соотношениям (40)–(43) с заменой неравенства $t \geq 96$ на неравенство

$$(44) \quad 576(1+C)^2(t^{-2} + 2t^{-3}) \leq 1.$$

Тогда последовательность $\{u_k\}$, определяемая из (42), сходится по норме H к нормальному решению u_* .

Если задано какое-либо начальное приближение u_1 и зафиксированы положительные числа C, t из (43), (44), то в качестве последовательностей $\{\alpha_k\}$, $\{A_k\}$, удовлетворяющих условиям теоремы 7, можно взять те же последовательности (40) с подходящим выбором постоянных a, A, D .

Доказательство теорем 2–7 из-за их громоздкости мы опускаем, отсылая читателя к работам [21]–[25].

4. Непрерывные аналоги итеративной регуляризации

Итеративный процесс (21) можно рассматривать, как решение методом ломаных Эйлера дифференциального уравнения

$$(45) \quad \dot{u}(t) = -\beta(t)T'(u(t), t), \quad u(0) = u_1,$$

где $T(u, t)$ является непрерывным аналогом функции Тихонова. Это значит, что решение задачи (1)–(3) можно искать, как предельную точку траекторий (45), и при этом доказательство сходимости приведенного непрерывного метода сведется к исследованию асимптотического поведения траекторий уравнения (45). В [26] метод (45) изучен для случая, когда ограничения учитывались штрафными функциями

вида (7). Существуют непрерывные аналоги и других дискретных методов минимизации, которые также могут быть регуляризованы. Так, например, в [30] рассмотрена регуляризация непрерывного метода ньютоновского типа в предположении, что исходные данные известны точно.

Большой интерес к непрерывным методам минимизации объясняется тем, что эти методы оставляют довольно широкую свободу при выборе методов численного интегрирования получаемых при этом дифференциальных уравнений и определяют таким образом, целый класс дискретных методов, и, кроме того, непрерывные методы весьма удобны для моделирования на аналоговых вычислительных машинах. Немаловажно и то, что для исследования асимптотического поведения траекторий дифференциальных уравнений имеется такой хорошо разработанный аппарат, как аппарат функций Ляпунова. Следует однако заметить, что теоремы прямого метода Ляпунова в их классической форме не всегда применимы для таких исследований и требует своего обобщения. Такие обобщения можно найти, например, в работах [31] и [32], где доказана сходимость траекторий ко множеству точек минимума даже в том случае, когда это множество, вообще говоря, не является устойчивым по Ляпунову, правда, такая сходимость получена лишь при условии, когда начальное приближение выбирается из области притяжения множества. Заметим также, что в этих работах предполагается, что исходные данные известны точно.

В нашем исследовании важную роль играют следующие две леммы об асимптотическом поведении при $\tau \rightarrow \infty$ семейства траекторий, удовлетворяющих параметрическим (от τ) дифференциальным неравенствам:

Лемма 1. Пусть скалярная функция $x(t, \tau)$ непрерывна по t , и неотрицательна на $[t_0, \infty)$, $0 \leq x(t_0, \tau) \leq K$ для всех $\tau \geq 0$, где K не зависит от τ , и $x(t, \tau)$ на $[t_0, \tau]$ удовлетворяет дифференциальному неравенству

$$\frac{d}{dt} x(t, \tau) \leq -a(t)b(\tau)x(t, \tau),$$

где $a(t) \geq 0$, $b(t) \geq 0$ убывающие и непрерывно дифференцируемы на $[t_0, \tau]$ причем

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} a(\tau) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} b(\tau) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{|\dot{a}(\tau)|}{a^2(\tau)b(\tau)} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{|\dot{b}(\tau)|}{b^2(\tau)a(\tau)} = 0.$$

Тогда $\lim_{\tau \rightarrow \infty} x(\tau, \tau) = 0$.

ЛЕММА 2. Пусть скалярная функция $x(t, \tau)$ непрерывна по t и неотрицательна на $[t_0, \infty)$, $x(t_0, \tau) \leq K$ для всех $\tau \geq 0$, где K не зависит от τ , и $x(t, \tau)$ на $[t_0, \tau]$ удовлетворяет дифференциальному неравенству

$$\frac{d}{dt} x(t, \tau) \leq -f_0(t)x(t, \tau) + f(t)(\tau - t)^n, \quad n \geq 0,$$

где $f_0(t), f(t)$ неотрицательны и интегрируемы на $[t_0, \tau]$,

$$\int_{t_0}^{\infty} f_0(t) dt = \infty, \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} f_0(\tau) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{f(\tau)}{(f_0(\tau))^{n+1}} = 0.$$

Кроме того, при $n > 0$ дополнительно потребуем, чтобы функция $f_0(\tau)$ была дифференцируема и

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} f'_0(\tau) (f_0(\tau))^{-2} = 0.$$

Тогда $\lim_{\tau \rightarrow \infty} x(\tau, \tau) = 0$.

Будем считать, что задача (1)–(3) удовлетворяет условиям IR1–IR3, причем $U_0 = H$ и приближенные значения $I(u, t)$ и $g_i(u, t)$, $i = 1, \dots, s$, функции $I(u)$ и $g_i(u)$, $i = 1, \dots, s$, зависят от непрерывно меняющегося параметра t . Будем еще предполагать, что штрафные и обобщенные барьерные функции, используемые для учета ограничений типа равенств и неравенств, также зависят от непрерывно меняющегося параметра.

(а) Случай штрафных функций. Пусть $U = U_1$, т.е. $m = n = l$, $s = r = q$. Возьмем некоторую штрафную функцию, удовлетворяющую непрерывным аналогам условий P1–P3. Будем также предполагать, что $\tilde{P}(u, t)$ выпукла, $\tilde{P}(u, t)$ и ее приближение $P(u, t)$ Фреше-дифференцируемы по u , и измеримы по t .

Составим функцию Тихонова в виде

$$(46) \quad T(u, t) = I(u, t) + A(t)P(u, t) + \frac{1}{2}\alpha(t)\|u(t)\|^2,$$

и изучим предельные точки траекторий уравнения (45) при $t \rightarrow \infty$, где $\beta(t) \geq 0$ для всех $t \geq 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \beta(t) = 0$, u_1 — произвольная точка из H .

ТЕОРЕМА 8. Пусть

1. выполнены условия роста по u и по t , т.е. производные Фреше

$I'(u), \tilde{P}'(u, t)$ таковы, что

$$\begin{aligned} \|I'(u)\| &\leq L(1 + \|u\|), \quad L = \text{const} > 0, \\ (47) \quad \|\tilde{P}'(u, t)\| &\leq L_1(t)(1 + \|u\|), \quad L_1(t) > 0, \quad t \geq 0, \\ \|A(t)\tilde{P}'(u, t) - A(\tau)\tilde{P}'(u, \tau)\| &\leq |M(t) - M(\tau)|(1 + \|u\|), \end{aligned}$$

для всех $t, \tau \geq 0, M(t) > 0$;

2. погрешности в задании $I'(u, t), g'_i(u, t), i = 1, \dots, s$, для производных $I'(u), g'_i(u), i = 1, \dots, s$, удовлетворяют условиям

$$(48) \quad \begin{aligned} \|I'(u) - I'(u, t)\| &\leq \delta(t)(1 + \|u\|), \\ \|\tilde{P}'(u, t) - P'(u, t)\| &\leq \delta(t)L_1(t)(1 + \|u\|), \quad t \geq 0; \end{aligned}$$

3. функции $A(t), \alpha(t), \beta(t), L_1(t), M(t), \mu(t), \nu(t)$ из (46)–(48), (5), (6) непрерывны и положительны при всех $t \geq 0, M(t)$ — вогнутая возрастающая, $\lim_{t \rightarrow \infty} M(t) = \infty, \alpha(t)$ — выпуклая, убывающая,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left(\alpha(t) + \frac{\mu(t)}{\alpha(t)} + \frac{A(t)\tilde{P}(u, t)}{\alpha(t)} \right) = 0 \quad \text{для всех } u \in U,$$

$\beta(t)$ — убывающая,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \beta(t) = 0, \quad \sup_{t \geq 0} \beta(t)A(t)L_1(t) < \infty,$$

причем $\lim_{t \rightarrow \infty} A(t)L_1(t) = \infty, \delta(t)$ — интегрируема на любом конечном отрезке,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left(\delta(t) + \delta(t)L_1(t) + \frac{\delta(t)A(t)}{\alpha(t)} \right) = 0,$$

$M(t), \alpha(t), \beta(t)$ — непрерывно дифференцируемы и

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\dot{M}(t) + |\dot{\alpha}(t)|}{\alpha^2(t)\beta(t)} = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{|\dot{\beta}(t)|}{\beta^2(t)\alpha(t)} = 0.$$

Тогда решения уравнения (45) продолжимы на всю полуось $[0, \infty)$ и при $t \rightarrow \infty$ сходятся по норме H к точке минимума задачи (1)–(3) с минимальной нормой.

Доказательство теоремы проводится аналогично [26] с использованием лемм 1, 2.

Если штрафная функция имеет вид (7), то в качестве функции параметров можно взять, например, $A(t) = t^{1/4}, \alpha(t) = t^{-1/5}, \beta(t) = t^{-1/4}$. Остается лишь потребовать, чтобы функция $\delta(t)$, характеризующая

точность в задании исходных данных, удовлетворяла условию $\frac{\delta(t)A(t)}{a(t)} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Интересно бы выразить $A(t)$, $a(t)$, $\beta(t)$ через $\delta(t)$ с соблюдением условий теоремы 8. Нам это удалось сделать для случая, когда $\delta(t)$ имеет вид $\delta(t) = t^{-\delta}$, $\delta = \text{const} > 0$. Тогда достаточно положить $A(t) = \delta(t)^{-A}$, $a(t) = \delta(t)^a$, $\beta(t) = \delta(t)^{-\beta}$, где A, a — положительные константы,

$$0 < a < A(\bar{p}-1), \quad a+A < \min\{1/2\delta; 1\}.$$

(б) Случай обобщенных барьерных функций. Пусть теперь все ограничения типа равенств и неравенств учитываются обобщенными барьерными функциями, т.е. $U = U_2$, $l = 0$, $m = n = q$, $r = s$. Пусть обобщенная барьерная функция $B(u, t)$ удовлетворяет непрерывным аналогам условий В1–В2. Тогда справедлива следующая

ТЕОРЕМА 9. Пусть

1. функция $\varphi(z)$ дифференцируема на $(0, \infty)$, выпукла; для любых $0 < C < 1$

$$|\varphi'(\gamma(t) + x)| \leq K_C |\varphi'(\gamma(t))| \quad \text{для всех } x \in [-(1-C)\gamma(t), \infty),$$

где K_C зависит только от C , и кроме того,

$$|\varphi'(\gamma(t) + x) - \varphi'(\gamma(\tau) + x)| \leq N_C(t) |\gamma(t) - \gamma(\tau)| |\varphi'(\gamma(\tau))|$$

для всех $x \in [-(1-C)\gamma(\tau), \infty)$, $N_C(t) > 0$, $0 \leq t \leq \tau$;

2. для всех t замыкание множества

$$W^0(t) = \{u \in H: g_j(u) < \gamma(t), \quad i = 1, \dots, n; \quad |g_i(u)| < \gamma(t), \\ i = n+1, \dots, s\}$$

совпадает со множеством

$$W(t) = \{u \in H: g_i(u) \leq \gamma(t), \quad i = 1, \dots, n; \quad |g_i(u)| \leq \gamma(t), \\ i = n+1, \dots, s\};$$

3. производные Фреше $I'(u)$, $g'_i(u)$ таковы, что

$$\|I'(u)\| \leq L(1 + \|u\|),$$

$$\|g'_i(u)\| \leq L(1 + \|u\|), \quad i = 1, \dots, s, \quad L = \text{const} > 0;$$

4. погрешности в задании исходных данных согласованы со стабили-

заторм в следующем смысле

$$\begin{aligned} \max \{ |I(u, t) - I(u)|, \max_{1 \leq i \leq s} |g_i(u, t) - g_i(u)| \} &\leq \delta(t) (1 + \frac{1}{2} \|u\|^2), \\ \max \{ \|I'(u, t) - I'(u)\|, \max_{1 \leq i \leq s} \|g'_i(u, t) - g'_i(u)\| \} &\leq \sigma(t) (1 + \|u\|), \\ \sigma(t) &\geq \delta(t); \end{aligned}$$

5. функции $\gamma(t)$, $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $N_C(t)$ непрерывны и положительны при всех $t \geq 0$; $\gamma(t)$, $\alpha(t)$ — выпуклы и убывают, $\lim_{t \rightarrow \infty} N_C(t) \alpha(t) = \infty$, $\alpha(t) = (\varphi(\gamma(t)))^{-1/C}$, $\alpha(t) |\varphi'(\gamma(t))|$ монотонно убывает,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha(t) |\varphi'(\gamma(t))| = 0 \quad \text{причем} \quad \sup_{t \geq 0} \alpha(t) |\varphi'(\gamma(t))| N_C(t) < \infty,$$

$$\sup_{t \geq 0} \beta(t) < \infty, \quad \int_0^\infty \beta(t) \alpha(t) dt = \infty, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\gamma(t)}{\alpha(t)} = 0,$$

$\sigma(t)$ — интегрируема на любом конечном отрезке, $\sigma(t) \geq 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \sigma(t) = 0$, $\gamma(t)$, $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\delta(t)$ — дифференцируемы и

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\dot{\delta}(t)}{\dot{\alpha}(t)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\frac{d}{dt} \varphi(\gamma(t))}{\alpha^2(t) \beta(t)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\dot{\alpha}(t)}{\alpha^2(t) \beta(t)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\dot{\beta}(t)}{\beta^2(t) \alpha(t)} = 0.$$

Тогда при достаточно малом $0 < C < 1$ траектория $u(t)$ уравнения (45) продолжима при $t \rightarrow \infty$, $u(t) \in W_C(t)$, где

$$\begin{aligned} W_C(t) &= \{u \in H: g_i(u) \leq (1-C)\gamma(t), \quad i = 1, \dots, n, \\ &\quad |g_i(u)| \leq (1-C)\gamma(t), \quad i = n+1, \dots, s\}, \end{aligned}$$

$$T(u, t) = I(u) + \alpha(t) B(u, t) + \frac{1}{2} \alpha(t) \|u\|^2, \quad \text{и} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \|u(t) - u_*\| = 0.$$

Доказательство. Продолжимость решения следует из того, что при любом фиксированном C вдоль траектории $\frac{d}{dt} T(u(t), t) < 0$ внутри $W_C(t)$, т.е. $T(u(t), t)$ убывает. В самом деле, если бы для любого C траектория $u(t)$ достигала границы множества $W_C(t)$, то при $C \rightarrow 0$, учитывая свойства функции $\varphi(z)$, получили бы, что $T(u(t), t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$, и пришли бы к противоречию с убыванием функции $T(u(t), t)$.

Далее точная функция Тихонова

$$\tilde{T}(u, t) = I(u) + a(t)\tilde{B}(u, t) + \frac{1}{2}a(t)\|u\|^2,$$

где

$$\tilde{B}(u, t) = \sum_{i=1}^s \varphi(\gamma(t) - g_i(u)) + \sum_{i=n+1}^s \varphi(\gamma(t) + g_i(u)),$$

сильно выпукла в $W^0(\tau)$ при любом фиксированном τ . Заметим также, что если $W(\tau)$ неограничено, то $\tilde{T}(u, \tau) \rightarrow \infty$ при $\|u\| \rightarrow \infty$. Кроме того, если u_k некоторая последовательность из $W^0(\tau)$, для которой $\lim_{k \rightarrow \infty} \|u_k - v\| = 0$, где $v \in \partial W(\tau)$, $\partial W(\tau)$ — граница множества $W(\tau)$, то $\tilde{T}(u_k, \tau) \rightarrow \infty$. Это значит, что для всех $\tau \geq 0$ существует единственная точка $v_\tau^* \in W^0(\tau)$ такая, что

$$\inf_{W^0(\tau)} \tilde{T}(u, \tau) = \tilde{T}(v_\tau^*, \tau), \quad \tilde{T}'(v_\tau^*, \tau) = 0.$$

Дальнейшее доказательство проводится так, как в случае штрафных функций.

Надо заметить, что определение константы C в описанном методе может оказаться непростым делом. На практике можно попробовать начать вычисление при каком-либо фиксированном C_1 , и в том случае, если соответствующая траектория достигнет в момент t_1 границы $W_{C_1}^0(t_1)$, то можно взять $0 < C_2 < C_1$ и продолжить вычисление. В этом случае $u(t_1) \in W_{C_2}^0(t_1)$ и поэтому вычисления могут быть продолжены дальше. Повторяя эту процедуру при постепенном уменьшении параметра C , вообще говоря, удастся найти требуемое значение этого параметра.

Литература

- [1] А. П. Тихонов, В. Я. Арсенин, *Методы решения некорректно поставленных задач*, „Наука“, Москва 1979.
- [2] В. К. Иванов, В. В. Васин, В. П. Танана, *Теория линейных некорректных задач и ее приложения*, „Наука“, Москва 1978.
- [3] М. М. Лаврентьев, В. Г. Романов, С. П. Шинятский, *Некорректные задачи математической физики и анализа*, „Наука“, Новосибирск 1980.
- [4] А. Н. Тихонов, Ф. П. Васильев, *Методы решения некорректных экстремальных задач*; В сб. *Mathematical Models and Numerical Methods*, Banach Center Publications, vol. 3, Warszawa 1978, стр. 297–342.
- [5] А. Б. Бакушинский, В. Т. Поляк, *О решении вариационных неравенств*, Докл. АН СССР 219.5 (1974), 1038–1041.

- [6] А. Б. Бакушинский, *Методы решения монотонных вариационных неравенств, основанных на принципе итеративной регуляризации*, Ж. вычисл. мат. и мат. физ. 17.6 (1977), 1350–1362.
- [7] —, *Регуляризирующий алгоритм на основе метода Ньютона–Канторовича для решения вариационных неравенств*, *ibid.* 16.6 (1976), 1397–1404.
- [8] —, *К принципу итеративной регуляризации*, *ibid.* 19.4 (1979), 1040–1043.
- [9] Д. В. Денисов, *Метод итеративной регуляризации в задачах условной минимизации*, *ibid.* 18.6 (1978), 1405–1415.
- [10] И. И. Еремин, В. Д. Мазауров, *Нестационарные процессы математического программирования*, „Наука”, Москва 1979.
- [11] I. Hartung, *Eine stabile exponentielle Penalty-Methoden*, International Tagung, Mathematische Optimierung Theorie und Anwendungen, Wartburg/Eisenach, 27, Nov. 2, Dez, 1978, 38–45.
- [12] —, *A stable interior penalty method for convex extremal problems*, Numer. Math. 29 (1978), 149–158.
- [13] А. С. Антипин, *Метод регуляризации в задачах выпуклого программирования*, Экономика и матем. методы 11.2 (1975), 336–342.
- [14] А. Н. Тихонов, Ф. П. Васильев, М. М. Потапов, А. Д. Юрий, *О регуляризации задач минимизации на множестве, заданном приближенно*, Вестник Московск. ун-та, серия вычисл. матем. и кибернетики 1 (1977), 4–15.
- [15] Ф. П. Васильев, *О регуляризации некорректных экстремальных задач*, Докл. АН СССР 241.5 (1978), 1001–1004.
- [16] Ф. П. Васильев, М. Ковач, *О регуляризации некорректных экстремальных задач в сочетании со штрафными функциями общего вида*; В сб.: *Проблемы вычислительной математики и системного программирования*, Труды НИВЦ МГУ и БУВЦ, Будапешт 1980, стр. 19–41.
- [17] Ф. П. Васильев, *О регуляризации некорректных задач минимизации на множествах, заданных приближенно*, Ж. вычисл. мат. и мат. физ. 20.1 (1980), 38–50.
- [18] М. Ковач, *О регуляризации некорректных экстремальных задач с использованием метода барьерных функций*, В сб.: *Численный анализ*, Труды НИВЦ МГУ и БУВЦ, Будапешт 1978, стр. 62–78.
- [19] —, *О сходимости метода обобщенных барьерных функций*, Вестник Московск. ун-та, серия вычисл. матем. и кибернетики 1 (1981), 40–44.
- [20] Ф. П. Васильев, М. Ковач, *О регуляризации некорректных экстремальных задач с использованием штрафных и барьерных функций*, *ibid.* 2 (1980), 29–35.
- [21] Ф. П. Васильев, *Методы решения экстремальных задач. Задачи минимизации в функциональных пространствах, регуляризация, аппроксимация*, „Наука”, Москва 1981.
- [22] Ф. П. Васильев, М. Д. Ячимович, *Об итеративной регуляризации метода условного градиента и метода Ньютона при неточно заданных исходных данных*, Докл. АН СССР 250.2 (1980), 265–270.
- [23] М. Ячимович, *Итеративная регуляризация одного варианта метода условного градиента*, Вестник Московск. ун-та, серия вычисл. матем. и кибернетики 4 (1980), 13–19.
- [24] Ф. П. Васильев, М. Д. Ячимович, *Об итеративной регуляризации метода Ньютона*, Ж. вычисл. мат. и мат. физ. 21.1 (1981).
- [25] Ф. П. Васильев, Л. Н. Хромова, М. Д. Ячимович, *Итеративная регуляризация одного метода минимизации третьего порядка*, Вестник Московск. ун-та, серия вычисл. матем. и кибернетики 1 (1981), 31–35.

- [26] М. Ковач, *Непрерывный аналог итеративной регуляризации градиентного типа*, *ibid.* 3 (1979), 36–42.
- [27] А. Фиакко, Г. Мак-Кормик, *Нелинейное программирование. Методы последовательной безусловной минимизации*, „Мир”, Москва 1972.
- [28] Ф. П. Васильев, *Численные методы решения экстремальных задач*, „Наука”, Москва 1980.
- [29] Л. Н. Хромова, *Об одном методе минимизации с кубической скоростью сходимости*, Вестник Московск. ун-та, серия вычисл. матем. и кибернетики 3 (1980), 52–56.
- [30] В. И. Венец, М. В. Рыбашов, *Метод функции Ляпунова в исследовании непрерывных алгоритмов математического программирования*, Ж. вычисл. мат. и мат. физ. 17.3 (1977), 622–633.
- [31] —, —, *Непрерывные алгоритмы выпуклого программирования с использованием штрафных функций*, Автоматика и телемеханика 11 (1975), 10–15.
- [32] Ю. Г. Евтушенко, В. Г. Жадан, *Применение метода функций Ляпунова для исследования сходимости численных методов*, Ж. вычисл. мат. и мат. физ. 15.1 (1975), 101–112.

*Presented to the Semester
Computational Mathematics
February 20 — May 30, 1980*
