

HOMOLOGIE DES ESPACES COMPLEXES

GIORGIO BOLONDI

*Département de Mathématique, Université de Trento,
 Trento, Italie*

Quand on étudie les propriétés topologiques (en particulier le type d'homotopie et l'homologie singulière) des espaces analytiques complexes, on rencontre une différence assez marquée entre le cas lisse et le cas des espaces complexes singuliers. Ceci est dû, essentiellement, au fait que dans le cas lisse on peut employer directement la théorie classique de Morse, tandis que ceci n'est pas possible quand on a des singularités.

Nous voulons étudier comment des propriétés topologiques (en particulier l'homologie singulière) des espaces analytiques complexes (qu'on suppose toujours dénombrables à l'infini et réduits) dépendent des propriétés analytiques.

Le premier résultat de ce type, qui a été le point de départ, est le suivant.

THÉORÈME 1 ([A-F], [MI]). *Soit X une variété analytique complexe, $\dim_{\mathbb{C}} X = n$, $X \subset \mathbb{C}^p$ fermée. Alors X a le type d'homotopie d'un CW-complexe de dimension au plus n .*

Démonstration. On donne ici une esquisse de démonstration, qui nous a été suggérée par F. Lazzeri, un peu différente des démonstrations mentionnées plus haut, parce que ceci permet de mieux comprendre dans quelle direction il faut chercher une généralisation.

On peut choisir des coordonnées de façon telle que $\psi: X \rightarrow \mathbb{R}$, $\psi: \xi \rightarrow d(\xi, 0)$, soit une fonction de Morse. Son Hessian est $H(\psi) = (v_{ij})$, avec $1 \leq i \leq 2n$, $1 \leq j \leq 2n$, où $v_{ij} = \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{\xi}$, et les coordonnées complexes sont $z_i = x_{2i-1} + ix_{2i}$. Il s'agit d'une forme bilinéaire symétrique, et il existe une décomposition de $V = H(\psi)$ en $V = A_0 + B_0$, où A_0 est la partie réelle de $A = 4 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} \right)_{\xi}$ (forme de Lévi), et B_0 est la partie réelle de

$B = 4 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} \right)_z$. On peut voir sans difficulté que B_0 a le même nombre de valeurs propres positives que négatives. Ce qui est le plus intéressant est que A_0 est semi-définie positive: on écrit M (localement) comme le graphe de $p-n$ fonctions holomorphes de n variables complexes

$$z_{n+1} = f_{n+1}(z_1, z_2, \dots, z_n),$$

$$z_p = f_p(z_1, z_2, \dots, z_n).$$

On a alors

$$d(\xi, 0) = \sum |z_i|^2 = |z_1|^2 + \dots + |z_n|^2 + |f_{n+1}|^2 + \dots + |f_p|^2.$$

Il suffit alors de vérifier que la forme de Levi de $\psi = |f|^2$, où f est une fonction holomorphe, est définie positive. En employant un simple lemme d'algèbre linéaire on peut conclure que V a, au maximum, n valeurs propres négatives. \square

On peut bien voir que la forme de Levi joue, ici, un rôle essentiel. C'est pour ça que, quand on a voulu généraliser ce type de résultats à des variétés ou espaces plus généraux, on a pensé aux espaces q -complets (étudiés surtout par Andreotti et Grauert dans leur célèbre article [A-G] du (1962).

DEFINITION. Un espace complexe X est dit q -complet quand il existe une fonction C^∞ $h: X \rightarrow \mathbb{R}$ exhaustive et fortement q -plurisubharmonique, c'est à dire telle que $X(c) = \{x \in X \mid h(x) < c\}$ est relativement compact dans $X \quad \forall c \in \mathbb{R}$, et tout $x \in X$ a un voisinage V avec un isomorphisme $\chi: V \rightarrow A \subset U \subset \mathbb{C}^p$ (A analytique dans U ouvert), et une fonction C^∞ $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $h = \varphi \chi$, et la forme de Levi

$$L(\varphi, y)(u) = \sum \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} \right)_y u_i u_j$$

a au moins $p-q$ valeurs propres positives pour tout $y \in U$. La fonction h est dite *fortement q -plurisubharmonique*.

DEFINITION. Un espace complexe X est dite *cohomologiquement q -complet* si $H^i(X, F) = 0 \quad \forall i \geq q+1$, et pour tout faisceau cohérent F .

Le théorème central est le suivant; il s'agit d'un théorème de type "théorème B de Cartan-Serre".

THÉORÈME 2 ([A-G]). X q -complet $\Rightarrow X$ cohomologiquement q -complet.

En effet, on a que X est 0-complet $\Leftrightarrow X$ est cohomologiquement 0-complet $\Leftrightarrow X$ est un espace de Stein. Nous signalons en passant que on ne connaît pas la réponse en général à la question " X cohomologiquement q -complet $\Rightarrow X$ q -complet?" (mais cfr. [E-VS]).

Ce notion donnée, on a le théorème suivant de Sorani, dont la démonstration utilise aussi la théorie de Morse:

THÉORÈME 3 ([SO 1]). *Soit X une variété analytique complexe q -complète, $\dim_{\mathbb{C}} X = n$. Alors on a $H_i(X, \mathbb{Z}) = 0 \quad \forall i > n + q$, et $H_{n+q}(X, \mathbb{Z})$ est libre.*

Le premier résultat dans la direction des espaces singuliers est dû à R. Narasimhan (1967), qui démontre

THÉORÈME 4 ([NA]). *Soit X un espace 0-complet (c'est à dire de Stein), $\dim_{\mathbb{C}} X = n$. Alors on a $H_i(X, \mathbb{Z}) = 0, \quad \forall i > n$, et $H_n(X, \mathbb{Z})$ est sans torsion.*

Démonstration. (Ce théorème a été démontré aussi par L. Kaup [KA]). Ici on ne peut pas employer directement la théorie de Morse; il faut alors employer aussi les propriétés analytiques globales de X et la généralisation au cas "relatif" du théorème de Andreotti-Frankel. Si X et Y sont deux espaces analytiques complexes, Y ouvert contenu dans X , on dit que (X, Y) est une paire de Runge si la restriction $\rho_Y^X: \Gamma(X, O_X) \rightarrow \Gamma(Y, O_Y)$ est dense. Andreotti et Narasimhan ([A-N 1]) ont démontré que si (A, B) est une paire de Runge de variétés de Stein, alors $H_k(B, A; G) = 0 \quad \forall$ group abélien $G, \quad \forall k > n$.

Narasimhan démontre que tout sous-ensemble analytique d'un espace de Stein X a un système fondamental $\{Y_i\}$ de voisinages ouverts dans X qui sont de Runge dans X . On considère alors une fonction holomorphe globale qui s'annule sur le lieu singulier de X ; soit A son lieu des zéros. Par excision on a $H_k(X \setminus A, Y_i \setminus A; G) = H_k(X, Y_i; G) \quad \forall i, k, \quad \forall G$. Mais $X \setminus A$ est lisse, $(X \setminus A, Y_i \setminus A)$ est une paire de Runge, donc ce group est nul si $k > n$. En faisant un passage à la limite on trouve $H_k(X, A; G) = 0 \quad \forall G \quad \forall k > n$. Il suffit alors d'employer la suite exacte de la couple (X, A) et la récurrence sur $\dim X$. \square

En 1983 un remarquable progrès a été obtenu par Hamm:

THÉORÈME 5 ([HA]). *Soit A un sous-espace complexe fermé d'un espace de Stein X , tel que $\dim_{\mathbb{C}}(X \setminus A) = n$. Alors il existe un CW-complexe relatif (K, A) tel que $\dim_{\mathbb{R}}(K \setminus A) = n$, et l'identité de A se prolonge à une équivalence homotopique $M \rightarrow K$. En particulier, $H_k(X, A; \mathbb{Z})$ est libre.*

Hamm utilise une théorie de Morse pour les variétés à bord; la technique de Narasimhan est strictement liée aux propriétés des fonctions holomorphes dans les espaces de Stein, qui permettent la réduction au cas

lisse. Si on est dans un espace de Stein on peut alors généraliser le résultat de Sorani:

THÉORÈME 6 ([CO]). *Soit Q un ouvert q -complet d'un espace de Stein de dimension n . Alors on a $H_k(Q, Z) = 0 \ \forall k > n+q$, $H_{n+q}(Q, Z)$ est sans torsion.*

Il y a un autre approche à l'homologie des espaces complexes. En employant des théories de type "De Rham" on peut étudier la cohomologie à coefficients dans C . En 1970, Ferrari et Lepotier, en employant l'article de Bloom-Herrera [B-H], démontrèrent que

THÉORÈME 7 ([FE 1], [FE 2], [LP]). *Si X est cohomologiquement q -complet, alors $H^k(X, C) = 0 \ \forall k > n+q$.*

Via le théorème des coefficients universaux, on a que $H_k(X, C) = 0$ et $H_k(X, Z)$ est de torsion $\forall k > n+q$.

La démonstration de l'annulation de l'homologie singulière d'un espace q -complet quelconque utilise ces résultats et le lemma du "petit bouton" de Andreotti-Grauert.

THÉORÈME 8 ([B-B]). *Soit X un espace complexe q -complet de dimension n . Alors on a $H_k(X, Z) = 0 \ \forall k > n+q$.*

Démonstration. Soit φ la fonction qui définit la q -complétude de X , et $X(c) = \{x \in C \mid \varphi(x) < c\}$. On peut supposer que l'ensemble des points de minimum local de φ soit discret. On démontre que $A = \{t \in [m, +\infty[\mid H_k(X(p), Z) = 0 \ \forall p < t \ \forall k > n+q\}$, où $m = \min \varphi$, est non vide, ouvert et fermé dans $[m, +\infty[$, et donc $A = [m, +\infty[$. Le fait que A est non vide vient du théorème de Coen; pour démontrer que $t \in A \Rightarrow t + \varepsilon \in A$, si ε est assez petit, on utilise le lemma mentionné plus haut. La conclusion suit des propriétés de l'homologie singulière. \square

Il faut remarquer deux faits:

1. On ne connaît rien, dans ce cas, de $H_{n+q}(X, Z)$. Dans le cas lisse, on sait que il est libre. Si X a des singularités, on sait que il est libre si $q = 0$.

2. Le côté "relatif" du problème, qu'on a mentionné à propos des paires de Runge, est toujours ouvert dans le cas singulier. Si (X, Y) est une paire de Runge d'espaces de Stein à singularités isolées, alors $H_k(X, Y; Z) = 0 \ \forall k > n+q$, et $H_k(X, Y; Z)$ est sans torsion. On dit que (X, Y) est une q -paire de Runge si la restriction $\varrho_Y^X: H^q(X, \Omega_X^p) \rightarrow H^q(Y, \Omega_Y^p)$ est dense $\forall p$, $0 \leq p \leq n$ (pour la définition de Ω_X^p cfr [FE 1] et [FE 2]). Sorani a démontré que si (X, Y) est une q -paire de Runge de variétés, alors $H_k(X, Y; Z) = 0 \ \forall k > n+q$. On sait que la même chose est vraie si Y seulement est lisse ([B-B]).

Nous terminons avec une petite application de ces techniques au problème de Levi.

Soit X un ouvert d'un espace S . On dit que X est localement de Stein dans S si $\forall x \in X$ il existe un voisinage ouvert U de x tel que $U \cap X$ est de Stein. Le problème de Levi qui nous intéresse est le suivant: soit S un espace de Stein et X localement de Stein dans S . Est-ce que X aussi est un espace de Stein? La réponse est affirmative si les singularités de S sont isolées ([A-N 2]); on ne connaît pas la réponse en général. Nous pouvons démontrer que X a, au moins, l'homologie d'un espace de Stein.

THÉORÈME 9. *Soit S un espace de Stein, $X \subset S$ ouvert localement de Stein dans S , $\dim_{\mathbb{C}} S = n$. Alors $H_k(X, \mathbb{Z}) = 0 \ \forall k > n$, et $H_k(X, \mathbb{Z})$ est sans torsion.*

Démonstration. Par récurrence sur $\dim S$. Si $\dim S = 0$, c'est trivial. Soit $\dim S > 0$, et $f \in \Gamma(S, \mathcal{O}_S)$ telle que $\text{Sing } S \subset A_0 = \{s \in S \mid f(s) = 0\}$. $S \setminus A_0$ est une variété de Stein; soit $A = A_0 \cap X$; $X \setminus A$ est une variété de Stein, parce que est un ouvert localement de Stein de $S \setminus A_0$, et on peut employer le théorème de Andreotti–Narasimhan mentionné plus haut. Donc on a $H_k(X \setminus A; G) = 0$ si $k > n$, pour tout groupe abélien G . En outre, A est un ouvert localement de Stein dans l'espace de Stein A_0 , qui a dimension $< n$. Par récurrence on trouve $H^k(A, G) = 0 \ \forall k \geq n, \ \forall G$.

Soit $V = \{V_{0,i}\}_i$ une famille de voisinages ouverts de Stein de A_0 , de Runge dans S , et soit $V_i = V_{0,i} \cap X \ \forall i$. Dans ce cas,

$$H_k(X, A; G) = \lim H_k(X, V_i; G) = \lim H_k(X \setminus A, V_i \setminus A; G) = 0,$$

parce que $V_i \setminus A = V_i \cap (X \setminus A)$ est un ouvert de Stein, de Runge dans $X \setminus A$, et $X \setminus A$ est lisse. Donc $H_k(X \setminus A; G) = 0 \ \forall k > n$. De la suite exacte

$$\dots \rightarrow H_p(X; G) \rightarrow H_p(X, A; G) \rightarrow H_{p-1}(A; G) \rightarrow \dots$$

on tire la thèse. □

Références

- [A-F] A. Andreotti and T. Frankel, *The Lefschetz theorem on hyperplane sections*, Ann. of Math. (2) 69 (1969), 713–717.
- [A-G] A. Andreotti et H. Grauert, *Théorèmes de finitude pour la cohomologie des espaces complexes*, Bull. Soc. Math. France 90 (1962), 193–259.
- [A-N 1] A. Andreotti and R. Narasimhan, *A topological property of Runge pairs*, Ann. of Math. (2) (1963), 499–509.
- [A-N 2] —, —, *Oka's Hefungslemma and the Levi problem for complex spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 111 (1964), 345–366.
- [B-B] E. Ballico and G. Bolondi, *On the homology groups of q -complete spaces*, Rend. Sem. Math. Univ. Padova 69 (1983), 19–25.

- [B-H] T. Bloom and M. Herrera, *De Rham cohomology of an analytic space*, Invent. Math. 7 (1969), 275–296.
- [CO] S. Coen, *Sull'omologia degli aperti q -completi di uno spazio di Stein*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) 23 (1969), 289–303.
- [E-VS] M. Eastwood and G. Vigna Suria, *Cohomologically complete and pseudoconvex domains*, Comment. Math. Helv. 55 (1980), 413–426.
- [FE 1] A. Ferrari, *Cohomology and holomorphic differential forms on complex analytic spaces*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) 24 (1970), 65–77.
- [FE 2] –, *Coomologia e forme differenziali olomorfe sugli spazi analitici complessi*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) 25 (1971), 469–477.
- [HA] H. A. Hamm, *Zur Homotopietyp Steinscher Raume*, J. Reine Angew. Math. 338 (1983), 121–135.
- [KA] L. Kaup, *Eine topologische Eigenschaft Steinscher Raume*, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen II: Math. Phys. Kl. (1966), 213–224.
- [LP] J. Le Potier, *Une propriété topologique des espaces q -convexes*, Bull. Soc. Math. France 98 (1970), 319–328.
- [MI] J. Milnor, *Morse Theory*, Princeton University Press, Princeton 1963.
- [NA] R. Narasimhan, *On the homology groups of Stein spaces*, Invent. Math. 2 (1967), 377–385.

*Presented to the semester
Singularities
15 February–15 June, 1985*
