NUMERICAL ANALYSIS AND MATHEMATICAL MODELLING
BANACH CENTER PUBLICATIONS, VOLUME 24
PWN–POLISH SCIENTIFIC PUBLISHERS
WARSAW 1990

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ПОЛУЧЕНИЯ ДВУСТОРОННИХ ПРИБЛИЖЕНИЙ ДЛЯ СОБСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ

С. В. НИКИФОРОВСКИЙ, С. Б. СОРОКИН

Вычислительный центр СО АН СССР,
Новосибирск, СССР

В работе показана возможность приближения собственных чисел задачи Штурма–Лиувилля сверху и снизу собственными числами вспомогательных задач, построенными на основе метода фиктивных областей, с положительным и отрицательным параметрами продолжения ε.

Введение

В работе исследуется новый подход к построению двусторонних приближений для собственных чисел разностных аппроксимаций дифференциальных операторов эллиптического типа, основанный на использовании метода фиктивных областей. Основная идея метода фиктивных областей состоит в замене области $\mathscr{D}$, в которой решается исходная задача стандартной областью, в которой наиболее удобно и просто решить задачу на ЭВМ. В соответствии с идеей метода, вместо задачи $Au = f$ или $Au = \lambda u$ в $\mathscr{D}$ с краевыми условиями $lu|_{\partial\mathscr{D}} = 0$ решается задача $A_\varepsilon u_\varepsilon = f_\varepsilon$ или $A_\varepsilon u_\varepsilon = \lambda^\varepsilon u_\varepsilon$ в дополненной области $\mathscr{D}_0 = \mathscr{D}\cup\mathscr{D}_1$ с краевыми условиями $l_\varepsilon u_\varepsilon|_{\partial\mathscr{D}_0} = 0$. Под A_ε и f_ε понимаются продолжения A и f в область $\mathscr{D}_0$. Продолжения осуществляются с помощью некоторого малого параметра $\varepsilon > 0$ и выбираются так, чтобы обеспечить близость вспомогательного решения u_ε к u.

Обоснование метода фиктивных областей сводится к получению оценки близости $\|u_\varepsilon - u\|_{*,\mathscr{D}} \leqslant C\varepsilon^\alpha$ для краевых задач. Для задачи на собственные значения требуется получить еще одну оценку вида $\|\lambda_n^\varepsilon - \lambda\| \leqslant C\cdot\varepsilon^\beta$. Обоснованию метода посвящено большое количество работ, например, [1–3] для краевых задач и [4] для спектральных задач.

При изучении метода фиктивных областей В. К. Саульев [1] обратил внимание на одно важное свойство метода – возможность получения двусторонних приближений для решения краевой задачи. Для задачи $\Delta u = f$, $x \in \mathscr{D}$, $u|_{\partial\mathscr{D}} = 0$ он рассмотрел наряду с привычным продолжением по старшим коэффициентам с положительным параметром $\varepsilon > 0$

$$\Delta u_\varepsilon = f, \qquad x \in \mathscr{D},$$

$$\frac{1}{\varepsilon^\alpha}\Delta u_\varepsilon = 0, \qquad x \in \mathscr{D}_1,\ u_\varepsilon|_{\partial\mathscr{D}_0} = 0,\ \mathscr{D}_0 = \mathscr{D} \cup \mathscr{D}_1,$$

$$u_\varepsilon|_{\partial\mathscr{D}^+} = u_\varepsilon|_{\partial\mathscr{D}^-}, \qquad \left.\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial n}\right|_{\partial\mathscr{D}^+} = \left.\frac{1}{\varepsilon^\alpha}\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial n}\right|_{\partial\mathscr{D}^-}$$

продолжение с отрицательным $\varepsilon < 0$:

$$\Delta u_{-\varepsilon} = f, \qquad x \in \mathscr{D},$$

$$-\frac{1}{\varepsilon^\alpha}\Delta u_{-\varepsilon} = 0, \qquad x \in \mathscr{D}_1, \qquad u_{-\varepsilon}|_{\partial\mathscr{D}_0} = 0,$$

$$u_{-\varepsilon}|_{\partial\mathscr{D}^+} = u_{-\varepsilon}|_{\partial\mathscr{D}^-}, \qquad \left.\frac{\partial u_{-\varepsilon}}{\partial n}\right|_{\partial\mathscr{D}^+} = -\left.\frac{1}{\varepsilon^\alpha}\frac{\partial u_{-\varepsilon}}{\partial n}\right|_{\partial\mathscr{D}^-}.$$

При этом решение исходной задачи оказывается „зажатым" между решениями вспомогательных задач.

В работе [5] было получено разложение решений вспомогательных задач по параметру ε для случая эллиптической задачи второго порядка с краевыми условиями Дирихле. С помощью полученных разложений доказана справедливость одного из поточечных неравенств

$$O(\varepsilon^{2\alpha}) + u_{-\varepsilon}(x) \leqslant u(x) \leqslant u_\varepsilon(x) + O(\varepsilon^{2\alpha}),$$

$$O(\varepsilon^{2\alpha}) + u_\varepsilon(x) \leqslant u(x) \leqslant u_{-\varepsilon}(x) + O(\varepsilon^{2\alpha}), \qquad \forall x \in \mathscr{D},$$

где $u_\varepsilon(x)$, $u_{-\varepsilon}(x)$ решения задач, полученных путем использования стандартного продолжения ($\varepsilon > 0$) и продолжения с отрицательным ε ($\varepsilon < 0$). Тем самым результат, полученный В. К. Саульевым с помощью принципа максимума, распространен на более общий случай задач, для которых этот принцип не справедлив.

Идея использования продолжения задачи по методу фиктивных областей с положительным и отрицательным ε для получения двусторонних приближений оказалась плодотворной и для спектральных задач. В данной работе получены двусторонние приближения вида

$$\lambda^\varepsilon \leqslant \lambda \leqslant \lambda^{-\varepsilon}$$

для собственных чисел λ исходной задачи. Величины λ^ε и $\lambda^{-\varepsilon}$ являются собственными числами вспомогательных задач построенных по методу фиктивных областей с положительным и отрицательным параметром ε. Следует отметить, что основное содержание работы состоит в получении неравенства $\lambda \leqslant \lambda^{-\varepsilon}$, поскольку неравенство $\lambda^{\varepsilon} \leqslant \lambda$ хорошо известно.

Постановка задачи

В целях простоты изложения рассмотрим модельную задачу на собственные значения

$$-u'' = \lambda u, \quad x \in (0,1),\ u(0) = u(1) = 0. \tag{1}$$

Для общего случая задачи Штурма–Лиувилля все результаты остаются справедливы и могут быть получены почти дословно повторяя приведенные ниже рассуждения. Напряду с задачей (1) рассмотрим две вспомогательные задачи

Первая задача

$$\begin{gathered} -u_\varepsilon'' = \lambda^{\varepsilon} u_\varepsilon, \quad x \in (0,1), \\ -\frac{1}{\varepsilon^2} u_\varepsilon'' = \lambda^{\varepsilon} u_\varepsilon, \quad x \in (1, 1+\delta), \\ -u_\varepsilon(0) = u_\varepsilon(1+\delta) = 0, \quad \left[\frac{du_\varepsilon}{dx}\right]_{x=1} = [u_\varepsilon]_{x=1} = 0. \end{gathered} \tag{2}$$

Здесь $[u_\varepsilon]_{x=1} = u_\varepsilon|_{1-0} - u_\varepsilon|_{1+0}$, $\left[\frac{du_\varepsilon}{dx}\right]_{x=1} = \left(\frac{du_\varepsilon}{dn}\right)_{1-0} - \frac{1}{\varepsilon^2}\left(\frac{du_\varepsilon}{dn}\right)_{1+0}$.

Вторая задача

$$\begin{cases} -u_{-\varepsilon}'' = \lambda^{-\varepsilon} u_{-\varepsilon}, & x \in (0,1), \\ \frac{1}{\varepsilon^2} u_{-\varepsilon}'' = \lambda^{-\varepsilon} u_{-\varepsilon}, & x \in (1, 1+\delta), \\ u_{-\varepsilon}(0) = u_{-\varepsilon}(1+\delta) = 0, & [u_{-\varepsilon}]_{x=1} = \left[\frac{du_{-\varepsilon}}{dx}\right]_{x=1} = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Здесь $\left[\frac{du_{-\varepsilon}}{dx}\right]_{x=1} = \left(\frac{du_{-\varepsilon}}{dx}\right)_{1-0} + \frac{1}{\varepsilon^2}\left(\frac{du_{-\varepsilon}}{dx}\right)_{1+0}$. Задача (2) соответствует продолжению в соответствии с методом фиктивных областей задачи (1) с параметром $\varepsilon^2 > 0$ в область $(1, 1+\delta)$. Задача (3) есть аналогичное продолжение задачи (1) в область $(1, 1+\delta)$ но уже с параметром $(-\varepsilon^2) < 0$.

Следуя теории консервативных разностных схем [6] построим конечно-разностные аппроксимации задач (1), (2) и (3).

Пусть x_i означают узлы равномерной сетки на отрезке $[0, 1+\delta]$, $x_i = ih$, $h = (1+\delta)/(N+1)$. Число внутренних узлов сетки равняется N. Пусть при этом в основной области $[0,1]$ находится m, а в фиктивной

$[1, 1+\delta]$ — k внутренних узлов сетки. Пусть, кроме того, точка $x = 1$ является узлом сетки. Таким образом $N = m+k+1$.

Задаче (1) соответствует следующая конечномерная задача на собственные значения

(4) $$A^h u^h = \lambda^h u^h.$$

В (4) $A^h = A^h_m$. A^h_m означает матрицу порядка m вида

$$A^h_m = \frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Конечномерные задачи, соответствующие (2) и (3), в принятых обозначениях можно записать в следующем виде.

(5) $$A^h_\varepsilon u^h_\varepsilon = \lambda^{\varepsilon h} u^h_\varepsilon,$$

(6) $$A^h_{-\varepsilon} u^h_{-\varepsilon} = \lambda^{-\varepsilon h} u^h_{-\varepsilon}.$$

Задача (5) соответствует (2), а задача (6) задаче (3). Здесь

(7) $$A^h_{\pm\varepsilon} = \left[\begin{array}{c|ccc} A^h_m & -1/h^2 & & \\ \hline -1/h^2 & \frac{1}{h^2}\left(1 \pm \frac{1}{\varepsilon^2}\right) & \mp\frac{1}{h^2\varepsilon^2} & \\ & \mp\frac{1}{h^2\varepsilon^2} & \pm\frac{1}{\varepsilon^2} A^h_k & \end{array}\right].$$

Собственные числа задач в дальнейшем будем считать упорядоченными в порядке их возрастания.

Целью исследования является установление связи между собственными числами задачи (4) и задач (5), (6). В следующих разделах будет показана возможность получения приближений снизу для собственных чисел задачи (4) с помощью собственных чисел задачи (5) и приближений сверху с помощью собственных чисел задачи (6).

Приближения снизу

Приведем теорему Коши о разделении [7].

Теорема 1. *Пусть*

$$\tilde{A} = \begin{array}{|c|c|} \hline A & B \\ \hline B^* & H \\ \hline \end{array}$$

где A и H симметричные матрицы. Пусть N и m размерности матриц $\tilde{A}$ и A, соответственно. Тогда

$$\lambda_j(\tilde{A}) \leqslant \lambda_j(A) \leqslant \lambda_{j+N-m}(\tilde{A}), \quad j = 1, 2 \dots m.$$

В формулировке теоремы $\lambda_j(A)$, $\lambda_j(\tilde{A})$ есть j-ое собственное число матрицы A, $\tilde{A}$, соответственно.

Непосредственное применение этой теоремы к задаче (5) приводит к неравенству

$$\lambda_j^{\varepsilon h} \leqslant \lambda_j^h \leqslant \lambda_{j+k+1}^{\varepsilon h}, \quad j = 1, 2 \dots m, \tag{8}$$

где λ_j^h собственные числа задачи (4), а $\lambda_j^{\varepsilon h}$ — задачи (5). Отметим, что матрица A_ε^h положительно определена и симметрична, следовательно $\lambda_j^{\varepsilon h} > 0$ для всех j.

Известно, что все m собственных чисел задачи (4) лежат в интервале $(0, 4/h^2)$. Процедура продолжения задачи по методу фиктивных областей увеличивает размерность задачи. В связи с этим наряду с собственными числами „соответствующими исходной области $[0,1]$" появляются собственные числа „соответствующие фиктивной области". Среди всех продолжений разумными, по всей видимости, являются те, которые не перемешивают эти две части спектра задачи (5). Сформулируем теорему, использование которой позволяет выбрать параметр ε, гарантирующий неперемешивание собственных чисел.

Обозначим через $P_i(\lambda)$ — характеристический многочлен ведущей $(i \times i)$ подматрицы матрицы A-λE порядка N, $P_0(\lambda) \equiv 1$ тогда справедлива [7].

Теорема 2. *Число совпадений знаков в последовательности чисел $P_i(\tau)$, $i = \overline{0, N}$ равно числу собственных значений λ матрицы A больших τ, а число перемен знаков равно числу собственных значений меньших τ.*

Очевидно, что в формулировке теоремы последовательность $P_i(\tau)$, $i = \overline{0, N}$ можно строить как по ведущим подматрицам, стоящим на пересечении первых i строк и столбцов, так и стоящим на пересечении последних i строк и столбцов. Первый способ соответствует построению главных подматриц в общепринятом смысле, второй — построению начиная с правого нижнего угла матрицы. В следующих ниже рассуждениях построенную вторым способом последовательность будем обозначать через $R_i(\tau)$, $i=\overline{0,N}$.

Применение теоремы 2 с последовательностью $R_i(\tau)$ для $\tau=\gamma$, где $\gamma \geqslant \lambda_{\max}(A^h)$ и использование стандартного вида блока соответствующего продолжению в фиктивную область дает оценку на ε, гарантирующую наличие ровно $k+1$ собственных чисел больших γ („ соответветствующих фиктивной области"). В нашем случае $\gamma=4/h^2$ и ε^2 следует выбирать меньшим $h^2/(2\delta^2)$.

Приближения сверху

Применим теорему 2 к задаче (6) с $\tau=0$. Известно, что матрица A^h_m положительно определена. По критерию Сильвестера все ее главные миноры больше 0. При $\tau=0$ последовательность $P_i(0)$, $i=\overline{1,N}$ есть не что иное, как последовательность главных миноров. Таким образом, $P_i(0)>0$, $i=\overline{0,m}$ и в последовательности $P_i(0)$, $\tau=\overline{0,N}$ имеется по крайней мере m совпадений знаков. Следовательно, у матрицы $A^h_{-\varepsilon}$ имеется по крайней мере m положительных собственных чисел. С другой стороны в матрице $A^h_{-\varepsilon}$ правый нижний блок, а именно $-\frac{1}{\varepsilon^2}A^h_k$, является симметричной отрицательно определенной матрицей. Следовательно, все собственные числа матрицы $-\frac{1}{\varepsilon^2}A^h_k$ отрицательны и в последовательности $R_0(0)$, $R_1(0)\ldots R_k(0)$ по Теореме 2 имеется ровно k перемен знака. Таким образом, и матрица $A^h_{-\varepsilon}$ имеет по крайней мере k отрицательных собственных чисел.

Специальный вид блока $-\frac{1}{\varepsilon^2}A^h_k$ позволяет явно вычислить i-ый член последовательности

$$R_i(0)=\left(\frac{1}{h^2\varepsilon^2}\right)^i(-1)^i(i+1), \qquad i=0,1\ldots k. \tag{9}$$

Вычислим $R_{k+1}(0)$. По определению это детерминант матрицы

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{h^2}\left(1-\frac{1}{\varepsilon^2}\right) & \frac{1}{h^2\varepsilon^2} & \\ \frac{1}{h^2\varepsilon^2} & \boxed{\begin{matrix} & \\ & -\frac{1}{\varepsilon^2}A^h_k \end{matrix}} \end{bmatrix}.$$

Разлагая определитель по первой строке и используя (9), получаем

$$R_{k+1}(0) = \frac{1}{h^2}\frac{1}{k+1}R_k(0)\left[k+1-\frac{1}{\varepsilon^2}\right].$$

Таким образом, смена знака при переходе от $R_k(0)$ к $R_{k+1}(0)$ происходит если $k+1-1/\varepsilon^2 < 0$ или $\varepsilon^2 < 1/(k+1) = h/\delta$. Суммируя вышесказанное приходим к заключению, что при выполнении этого условия матрица $A^h_{-\varepsilon}$ порядка $N = m+k+1$ имеет m положительных и $(k+1)$ отрицательных собственных чисел.

Применим Теорему 1 к задаче (6). Получаем

$$\lambda_j^{-\varepsilon h} \leqslant \lambda_j^h \leqslant \lambda_{j+(k+1)}^{-\varepsilon h}, \quad j = 1, \dots m, \tag{10}$$

где $\lambda_j^{-\varepsilon h}$ собственные числа задачи (6).

Первое неравенство в (10), вообще говоря, не информативно, поскольку содержит в том числе и $(k+1)$ отрицательных собственных чисел в то время, как собственные числа λ_j^h задачи (4) положительны. Набор чисел $\lambda_{j+(k+1)}^{-\varepsilon h}$, $j = 1, \dots m$ исчерпывает все положительные собственные числа задачи (6), которые и являются приближениями сверху для собственных значений задачи (4).

Объединяя неравенства (8) и (10), получаем двусторонние приближения для собственных чисел задачи (4)

$$\lambda_j^{\varepsilon h} \leqslant \lambda_j^h \leqslant \lambda_{j+(k+1)}^{-\varepsilon h}, \quad j = 1, \dots m.$$

Используя описанный алгоритм, для собственных чисел задачи (4) – разностная аппроксимация задачи (1) – были получены двусторонние приближения. В качестве вспомогательных задач выбирались задачи (5), (6) с $m = 99$, $k = 49$ ($h = 0.01$ и $\delta = 0.5$) и $\varepsilon^2 = 0.0001$. Собственные числа задач (5), (6) вычислялись с помощью программы BISECT [8], основанной на Теореме 2. Результаты расчетов приведены в таблице:

ε^2	j	$\lambda_j^{\varepsilon h}$	λ_j^h	$\lambda_{j+(k+1)}^{-\varepsilon h}$
10^{-4}	1	9.8678	9.8687	9.8697
	2	39.4614	39.4654	39.4693
	99	39990.12	39990.13	39990.131

Предложенный метод допускает обобщение на более сложные случаи. Авторами получены двусторонние оценки для собственных чисел эллиптических уравнений второго порядка для двумерных областей, граница которых состоит из отрезков параллельных осям координат.

В соответствии с методом фиктивных областей исходная область $\mathscr{D} \subset R^2$ дополняется до стандартной – прямоугольника. Для собственных чисел разностных аппроксимаций $A^h_{\pm\varepsilon}$ вспомогательных операторов с параметрами продолжения $(\pm\varepsilon)$ имеет место

Теорема. *При $\varepsilon^2 < Ch^2$ у вспомогательной разностной задачи с параметром продолжения $(-\varepsilon)$ положительных собственных чисел ровно столько, сколько всего собственных чисел у исходной разностной задачи. Эти числа являются приближениями сверху. Приближениями снизу служат первые собственные числа разностной задачи с параметром продолжения $(+\varepsilon)$:*

$$\lambda_j^{\varepsilon h} \leqslant \lambda_j^h \leqslant \lambda_{j+(N-m)}^{-\varepsilon h}, \qquad j = 1, 2 \ldots m.$$

Доказательство теоремы в основном повторяет ход рассуждений для модельной задачи. Отличие заключается в нахождении условия на ε и h, при котором правый нижний блок размерности $(N-m)$ матрицы $A^h_{-\varepsilon}$ отрицательно определен. Здесь m — количество внутренних узлов в $\mathscr{D}$, N — в прямоугольнике $\mathscr{D}_0$.

Были произведены расчеты собственных чисел λ^h оператора Лапласа для L — образной области, состоящей из трех квадратов со стороной 1/2, и собственных чисел $\lambda^{\varepsilon h}$, $\lambda^{-\varepsilon h}$ вспомогательных задач. Результаты расчетов для $N = 49$, $m = 33$, шага сетки $h = 1/8$ приведены в таблице:

ε^2	j	$\lambda_j^{\varepsilon h}$	λ_j^h	$\lambda_{j+(N-m)}^{-\varepsilon h}$
10^{-2}	1	38.016	38.565	39.119
	2	57.389	57.493	57.597
	33	473.268	473.43	473.56

ε^2	j	$\lambda_j^{\varepsilon h}$	λ_j^h	$\lambda_{j+(N-m)}^{-\varepsilon h}$
10^{-3}	1	38.510	38.565	38.620
	2	57.483	57.493	57.504
	33	473.42	473.43	473.45

Авторы благодарны Коновалову А. Н. за постановку задачи и внимание к работе.

Литература

[1] В. К. Саульев, *Об одном методе автоматизации решения краевых задач на быстродействующих вычислительных машинах*, Докл. АН СССР 144 (3) (1962), 497–500.

[2] А. Н. Коновалов, *Метод фиктивных областей в задачах фильтрации двухфазной несжимаемой жидкости с учетом капиллярных сил*, В кн.: Численные методы механики сплошной среды, Новосибирск 1972, т. 3, № 5, 52–68.

[3] А. Н. Бугров, *Метод фиктивных областей для уравнений с частными производными эллиптического типа*, В сб.: Численные методы решения задач теории упругости и пластичности, II (Материал V Всесоюз. конф.). Новосибирск 1978, 24–35.

[4] Н. И. Николаева, *Метод фиктивных областей в задачах на собственные значения*, В кн.: Численные методы механики сплошной среды, Новосибирск 1979, т. 10, № 6, 105–112.

[5] Г. В. Конюх, *Повышение точности метода фиктивных областей*, Дипломная работа, Новосибирский государственный университет имени Ленинского комсомола 1983.
[6] А. А. Самарский, *Теория разностных схем*, Наука, Москва 1983.
[7] Б. Парлетт, *Симметричная проблема собственных значений. Численные методы*, Мир, Москва 1983.
[8] Дж. Уилкинсон, К. Райнш, *Справочник алгоритмов на языке алгол*, Линейная алгебра. Машиностроение, Москва.

Presented to the Semester
Numerical Analysis and Mathematical Modelling
February 25—May 29, 1987