S. TRYBUŁA (Wrocław)

O MINIMAKSOWEJ ESTYMACJI PARAMETRÓW W ROZKŁADZIE WIELOMIANOWYM

1. W niniejszej pracy rozpatrzymy problemat minimaksowej estymacji wartości $p_1, \ldots, p_k$ dla dyskretnej zmiennej losowej X, gdzie $p_i = P(X = x_i)$ i strata jest kombinacją liniową o nieujemnych współczynnikach kwadratów różnic między prawdziwymi wartościami p_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ a estymowanymi. Poruszona będzie kwestia jednoznaczności otrzymanego minimaksowego rozwiązania oraz uogólnienia problematu na przypadek, gdy ilość wartości, jakie może przyjmować zmienna losowa X, jest przeliczalna.

2. Zdefiniujmy pewne pojęcia z teorii gier, która będzie pomocniczym aparatem w naszych rozważaniach. Będziemy się zajmowali wyłącznie dwuosobowymi grami o sumie zero i to w pewnej tzw. postaci normalnej.

DEFINICJA 1. *Dwuosobową grą o sumie zero w postaci normalnej* będziemy nazywali układ $G = (S, T, W)$, gdzie S i T są ustalonymi przestrzeniami, a W jest ograniczoną funkcją liczbową zdefiniowaną na iloczynie kartezjańskim $S \times T$. Punkty $s \in S$ i $t \in T$ będziemy nazywali *strategiami* odpowiednio dla gracza I i II, a W *wypłatą*.

W grę G gra się w sposób następujący: Gracz I wybiera strategię $s \in S$, gracz II wybiera $t \in T$; obaj robią to niezależnie i jednocześnie. Gracz II płaci graczowi I kwotę $W(s, t)$.

TABLICA 1

		gracz II t_1	gracz II t_2
gracz I	s_1	1	-1
gracz I	s_2	-1	1

W dalszej części naszej pracy przez termin *gra* będziemy rozumieli dwuosobową grę w postaci zdefiniowanej wyżej.

PRZYKŁAD. Dwaj gracze jednocześnie kładą na stół po złotym. Jeżeli okaże się, że są dwa orły lub dwie reszki, gracz I wygrywa 1 złotego. W innym przypadku gracz II wygrywa 1 złotego.

I (II) ma więc dwie strategie: s_1 (t_1) — położyć monetę orłem do góry, i s_2 (t_2) — położyć monetę reszką do góry. Wypłatę W określa tablica 1.

Jeżeli gracz I wybrał strategię s_i, a gracz II strategię t_j $(i, j = 1, 2)$, to gracz II zapłaci graczowi I wartość leżącą na przecięciu i-tego wiersza i j-tej kolumny.

Jeżeli gracz I stosuje strategię s_0, to w konsekwencji tego wyboru wygra $W(s_0, t)$. Jeżeli przez $\underline{\vartheta}(s_0)$ oznaczymy

$$\underline{\vartheta}(s_0) = \inf_{t \in T} W(s_0, t), \tag{1}$$

to gracz I stosując strategię s_0 nie wygra mniej niż $\underline{\vartheta}(s_0)$.

DEFINICJA 2. Liczbę $\underline{\vartheta}(s_0)$ zdefiniowaną wzorem (1) będziemy nazywali *wartością gwarantowaną przez strategię* s_0.

Analogicznie:

DEFINICJA 3. Liczbę

$$\overline{\vartheta}(t_0) = \sup_{s \in S} W(s, t_0)$$

będziemy nazywali *wartością gwarantowaną przez strategię* t_0.

W interesie gracza I leży zagwarantować sobie jak największą wygraną. Mamy więc:

DEFINICJA 4. Jeżeli $\underline{\vartheta}(s)$ jest wartością gwarantowaną przez strategię s, to kres górny

$$\underline{w}(G) = \sup_{s \in S} \underline{\vartheta}(s)$$

nazywamy *wartością dolną gry*, a strategię s_0 (jeśli taka istnieje), przy której osiąga się ten kres górny, *najlepszą* strategią dla gracza I.

DEFINICJA 5. Kres dolny

$$\overline{w}(G) = \inf_{t \in T} \overline{\vartheta}(t)$$

będziemy nazywali *wartością górną gry*, a strategię t_0, przy której osiąga się ten kres dolny, *najlepszą* (albo *minimaksową*) strategią dla gracza II.

Oczywiście zawsze zachodzi $\underline{w}(G) \leqslant \overline{w}(G)$.

DEFINICJA 6. Jeżeli $\underline{w}(G) = \overline{w}(G)$, to grę G nazywamy *domkniętą*, a liczbę $w(G) = \underline{w}(G)$ *wartością* gry. Jeżeli $\underline{w}(G) < \overline{w}(G)$, to grę G nazywamy *otwartą*.

Jeżeli gracz I stosuje strategię s_0 i gracz II wie o tym, to powinien on stosować taką strategię t_1, dla której funkcja $W(s_0, t)$ osiąga minimum. Taką strategię będziemy nazywać *relatywnie najlepszą* względem strategii s_0. Analogicznie, *relatywnie najlepszą* strategią względem strategii t_0 będzie taka, dla której funkcja $W(s, t_0)$ osiąga maksimum. W teorii gier znane jest twierdzenie (którego łatwy dowód czytelnik znajdzie w książce

[3]), że jeżeli strategie s_0 i t_0 są relatywnie jedna względem drugiej najlepsze, to obie są najlepsze i gra jest domknięta. Z twierdzenia tego będziemy korzystać w dalszej części pracy.

Wróćmy teraz do przykładu ze stronicy 307. Przypuśćmy, że gracz I wybiera strategię s_1 z prawdopodobieństwem p_1 i strategię s_2 z prawdopodobieństwem $q_1 = 1-p_1$, a gracz II wybiera strategie t_1 i t_2 odpowiednio z prawdopodobieństwami p_2 i $q_2 = 1-p_2$. Korzystając z tych informacji nie możemy *a priori* przewidzieć, ile przegra gracz II, możemy natomiast wyrachować wartość oczekiwaną wypłaty

$$\mathrm{E} = 1\cdot p_1 p_2 + (-1) p_1 q_2 + (-1) p_2 q_1 + 1\cdot q_1 q_2 = 1 - 2(p_1+p_2) + 4 p_1 p_2 .$$

Jeżeli będziemy traktować układ liczb p_1, q_1 i p_2, q_2 jako nowe strategie u i v odpowiednio dla gracza I i II, a wartość oczekiwaną wypłaty, odpowiadającą tym strategiom, jako nową funkcję W, to otrzymamy nową grę

DEFINICJA 7. Niech $G = (S, T, W)$ będzie grą. Grę $\Gamma = (U, V, \mathrm{E})$, gdzie U i V zawierają wszystkie rozkłady prawdopodobieństwa u i v na S i T, a $\mathrm{E}(u, v)$ jest wartością oczekiwaną wypłaty odpowiadającą rozkładom u i v, będziemy nazywali *zrandomizowanym przedłużeniem* gry G.

DEFINICJA 8. Jeżeli mamy określoną grę $G = (S, T, W)$ i jej zrandomizowane przedłużenie $\Gamma = (U, V, \mathrm{E})$, to punkty $s \in S$, $t \in T$ będziemy nazywać *czystymi strategiami* w G, a punkty $u \in U$, $v \in V$ *zrandomizowanymi strategiami* w G.

Podstawowe twierdzenie z teorii gier mówi, że jeżeli zbiory S i T są skończone, to gra Γ, będąca zrandomizowanym przedłużeniem gry G, jest domknięta. Twierdzenie to przy pewnych ograniczeniach o funkcji $W(s, t)$ daje się rozszerzyć na niektóre nieskończone zbiory strategii.

3. Przejdźmy teraz do sedna sprawy. Zacznijmy od przykładu. Przypuśćmy, że rzuciliśmy 5 razy zdeformowaną monetą i 4 razy wypadł nam orzeł, a raz reszka. Powstaje problemat: Jak na podstawie tej informacji ocenić prawdopodobieństwo otrzymania orła? Problematy tego rodzaju są podstawowe w statystyce matematycznej i jest wiele dobrze znanych sposobów podejścia do nich. Jednym, historycznie najnowszym sposobem, który rozwinął A. Wald w ogólnej teorii funkcji decyzyjnych [5], jest traktowanie problematu estymacyjnego jako gry. Teoria zbudowana przez A. Walda jest bardzo ogólna. Do naszego użytku wystarczy zdefiniować problemat estymacyjny w sposób następujący: Zmienna losowa X przybiera wartości w $\mathfrak{X}$. Niech $P_\omega(x)$ będzie, przy ustalonym $\omega \in \Omega$, dystrybuantą tej zmiennej losowej. Za przykładem [4] nadajmy zagadnieniu allegoryczną szatę gry statystyka przeciw diabłu. Załóżmy więc, że diabeł wybiera parametr ω. Statystyk chce estymować

$g(\omega)$, gdzie g jest funkcją, której zbiorem argumentów jest Ω, a zbiorem wartości pewna przestrzeń $g(\Omega)$. Estymatorem jest funkcja $f(z)$ przybierająca wartości w A, gdzie $z \epsilon Z$ jest punktem przestrzeni prób. Jeżeli statystyk zaobserwował z, a prawdziwą wartością parametru jest ω i jeżeli stosuje on estymator $f(z)$, to zapłaci diabłu kwotę $L(\omega, f(z))$, gdzie L jest funkcją zdefiniowaną na iloczynie kartezjańskim $g(\Omega) \times A$. Zdefiniujmy ryzyko R jako

$$R(\omega, f) = \sum_{z \epsilon Z} L(\omega, f(z)) p(z|\omega), \tag{2}$$

gdzie $p(z|\omega)$ oznacza prawdopodobieństwo zaobserwowania z, jeśli prawdziwą wartością parametru jest ω.

Estymator $\bar{f}$ będziemy nazywać *najlepszym* albo *minimaksowym*, jeżeli minimizuje on $\sup_{\omega} R(\omega, f)$.

Powstaje zagadnienie: Znaleźć minimaksowy estymator prawdopodobieństw $p_1, \ldots, p_k$, z jakimi zmienna losowa X przyjmuje wartości $x_1, \ldots, x_k$, jeżeli są to wszystkie możliwe wartości zmiennej losowej i jeżeli strata L jest postaci

$$L(\omega, f) = \sum_{i=1}^{k} c_i [p_i - p_i'(m_1, \ldots, m_k)]^2. \tag{3}$$

Układ $f = \{p_1'(m_1, \ldots, m_k), \ldots, p_k'(m_1, \ldots, m_k)\}$ oznacza estymator wartości $p_1, \ldots, p_k$, jeżeli statystyk m_i razy zaobserwował, że $X = x_i$; c_i są pewnymi stałymi nieujemnymi ($\sum_{i=1}^{k} m_i = n$; n ustalone).

Przypadek $k = 2$ wynika z pracy [2]. Przypadek $c_1 = \ldots = c_k > 0$ rozwiązał H. Steinhaus [4].

4. W sformułowaniu ogólnego estymacyjnego problemu zdefiniowanego w poprzednim ustępie estymator $f(z)$ jest całkowicie zdefiniowany przez zaobserwowaną wartość z. Z punktu widzenia teorii gier estymator taki jest więc czystą strategią dla statystyka. Można by rozpatrywać problemat estymacyjny, w którym estymator odpowiadający z jest sam zmienną losową, tj. zrandomizowaną strategią dla statystyka. Analogicznie można by zwiększyć klasę strategii diabła założywszy, że parametr ω jest zmienną losową. Z twierdzenia udowodnionego w pracy [2] wynika jednak, że dla naszego specjalnego problematu rozpatrywanie zrandomizowanych estymatorów nie jest potrzebne. D o k a ż d e g o z r a n d o m i z o w a n e g o e s t y m a t o r a m o ż n a z n a l e ź ć c z y s t y e s t y m a t o r, k t ó r y j e s t o d n i e g o l e p s z y w s e n s i e f u n k c j i r y z y k a. W zasadzie nie będziemy korzystać z tego wyniku. Ze sposobu, w jaki wykażemy najlepszość podanego przez nas czystego estymatora, wyniknie, że żaden zrandomizowany estymator nie może zagwarantować mniejszej wartości ryzyka. Rozpatrywanie zrandomizowanych strategii dla diabła okaże się jednak pożyteczne. Pokażemy, że nasza gra statystyczna zdefiniowana przy końcu sekcji 3, w której statystyk stosuje czyste strategie, a diabeł zrandomizowane, jest domknięta, i podamy najlepszą strategię dla diabła.

5. Jeżeli diabeł wybrał układ liczb $P = (p_1, \ldots, p_k)$, a statystyk stosuje estymator $f = \{p_1'(m_1, \ldots, m_k), \ldots, p_k'(m_1, \ldots, m_k)\}$ i jeżeli strata jest zdefiniowana wzorem (3), to ryzyko R ma postać

$$(4)\quad R(f, P) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{m_1+\ldots+m_k=n} \frac{n!}{m_1! \ldots m_k!} p_1^{m_1} \ldots p_k^{m_k} [p_i - p_i'(m_1, \ldots, m_k)]^2.$$

Bez naruszenia ogólności możemy założyć, że $c_1 \geqslant \ldots \geqslant c_k \geqslant 0$. Załóżmy dodatkowo, że $c_2 \neq 0$. Przypadek, gdy wszystkie c_i są równe zeru, jest banalny. Przypadek, gdy tylko c_1 jest różne od zera, sprowadza się do estymowania wartości p w rozkładzie dwumianowym, co już wcześniej zostało rozwiązane w pracy [2]. Niech l_0 będzie największym takim wskaźnikiem, że $c_{l_0} \neq 0$ i niech $L \leqslant l_0$ będzie największą liczbą naturalną taką, że

$$(5)\quad \sum_{i=1}^{L} 1/c_i > (L-2)/c_L.$$

Przy podanych wyżej założeniach takie L oczywiście istnieje i jest co najmniej równe 2.

Pokażemy, *że estymator* $\bar{f} = \{\bar{p}_1'(m_1, \ldots, m_k), \ldots, \bar{p}_k'(m_1, \ldots, m_k)\}$, *gdzie* $\bar{p}_i'$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ *są zdefiniowane wzorem*

$$(6)\quad \bar{p}_i' = \begin{cases} \dfrac{m_i + \left(1 - (L-2)/c_i \sum_{j=1}^{L} 1/c_j\right) \frac{1}{2}\sqrt{n}}{n+\sqrt{n}} & \text{dla} \quad i \leqslant L, \\[2ex] \dfrac{m_i}{n+\sqrt{n}} & \text{dla} \quad i > L, \end{cases}$$

jest estymatorem minimaksowym.

Skorzystajmy z następujących tożsamości:

$$(7)\quad \sum_{m_1+\ldots+m_k=n} \frac{n!}{m_1! \ldots m_k!} p_1^{m_1} \ldots p_k^{m_k} = 1,$$

$$(8)\quad \sum_{m_1+\ldots+m_k=n} \frac{n!}{m_1! \ldots m_k!} m_i p_1^{m_1} \ldots p_k^{m_k} = np_i \quad (i = 1, 2, \ldots, k),$$

$$(9)\qquad \sum_{m_1+\ldots+m_k=n} \frac{n!}{m_1!\ldots m_k!} m_i^2 p_1^{m_1}\ldots p_k^{m_k} = n^2 p_i^2 + np_i(1-p_i)$$
$$(i = 1, 2, \ldots, k).$$

Ryzyko R przyjmie wtedy postać

$$(10)\qquad R(\bar{f}, P) = \frac{1}{(\sqrt{n}+1)^2}\left[\frac{L-2}{\sum_{j=1}^{L} 1/c_j} + \sum_{i=1}^{L} \frac{1}{4} c_i \left(1 - \frac{L-2}{c_i \sum_{j=1}^{L} 1/c_j}\right)^2 + \right.$$
$$\left. + \sum_{i=L+1}^{k} p_i \left(c_i - \frac{L-2}{\sum_{j=1}^{L} 1/c_j}\right)\right].$$

Pokażemy, że

$$(11)\qquad (L-2)\Big/\sum_{j=1}^{L} 1/c_j \geqslant c_i$$

dla $i = L+1, L+2, \ldots, k$. Wobec założenia $c_i \geqslant c_{i+1}$ $(i = 1, 2, \ldots, k-1)$ wystarczy udowodnić nierówność (11) dla $i = L+1$. Z definicji liczby L wynika, że albo $c_{L+1} = 0$ i wtedy nierówność jest oczywista, gdyż z założenia mamy $L \geqslant 2$, albo

$$(12)\qquad \sum_{j=1}^{L+1} 1/c_j \leqslant (L-1)/c_{L+1}.$$

Odejmując od obu stron liczbę $1/c_{L+1}$ otrzymamy nierówność

$$(13)\qquad \sum_{j=1}^{L} 1/c_j \leqslant (L-2)/c_{L+1},$$

z której natychmiast otrzymujemy (11).

Z wzorów (10) i (11) wynika, że każda strategia diabła, dla której zachodzi równość

$$(14)\qquad \sum_{i=1}^{L} p_i = 1,$$

jest relatywnie najlepsza względem strategii (6).

Załóżmy, że diabeł stosuje zrandomizowaną strategię, tj. że układ liczb $P = (p_1, \ldots, p_k)$ jest zmienną losową, której dystrybuantę zadaje diabeł. Wartość oczekiwana ryzyka ma wtedy postać

$$\text{(15)} \quad \mathrm{E}[R(f,P)] =$$

$$= \int\limits_U \sum_{i=1}^{k} \sum_{m_1+\ldots+m_k=n} \frac{n!}{m_1!\ldots m_k!} p_1^{m_1}\ldots p_k^{m_k} c_i[p_i - p_i'(m_1,\ldots,m_k)]^2 dF,$$

gdzie U jest obszarem w $(k-1)$-wymiarowej przestrzeni euklidesowej, określonym nierównościami

$$\text{(16)} \qquad \sum_{i=1}^{k-1} p_i \leqslant 1, \quad p_1 \geqslant 0, \quad \ldots, \quad p_{k-1} \geqslant 0.$$

Załóżmy, że diabeł stosuje strategię $\overline{F}$ spełniającą warunki

$$\text{(17)} \qquad \sum_{i=1}^{L} p_i = 1,$$

$$\text{(18)} \qquad g(p\ ,\ldots,p_{L-1}) = cp_1^{s_1}\ldots p_L^{s_L},$$

gdzie g jest gęstością prawdopodobieństwa na hiperpłaszczyźnie $(L-1)$-wymiarowej o równaniu

$$\text{(19)} \qquad p_1+\ldots+p_L = 1.$$

Wyrażenie (15) przyjmie wtedy postać

$$\text{(20)} \quad \mathrm{E}[R(f,P)] = c \int\limits_{\substack{p_1\geqslant 0,\ldots,p_{L-1}\geqslant 0\\ p_1+\ldots+p_{L-1}\leqslant 1}} \!\!\!\ldots\!\int \sum_{i=1}^{k} \sum \frac{n!}{m_1!\ldots m_L!} p_1^{m_1+s_1}\ldots p_L^{m_L+s_L} \times$$

$$\times c_i[p_i - p_i'(m_1,\ldots,m_L,0,\ldots,0)]^2 dp_1\ldots dp_{L-1},$$

gdzie sumowanie w drugiej sumie pod całką rozciąga się na wszystkie układy $m_1,\ldots,m_L$ takie, że

$$\sum_{i=1}^{L} m_i = n.$$

Wyrażenie (20) możemy traktować jako formę kwadratową zmiennych $p_i'(m_1,\ldots,m_L,0,\ldots,0)$ $(i = 1,2,\ldots,k)$ określoną dodatnio. Do znalezienia minimum tej formy wystarczy rozwiązać układ równań

$$\text{(21)} \qquad \frac{\partial \mathrm{E}(R(f,P))}{\partial p_i'(m_1,\ldots,m_k,0,\ldots,0)} = 0 \quad \left(i = 1,2,\ldots,k;\ \sum_{k=1}^{L} m_k = n\right).$$

Różniczkując wyrażenie (20) pod znakiem całkowania, przekonamy się, że osiąga ono minimum dla

$$(22)\quad p_i'(m_1, \ldots, m_L, 0, \ldots, 0) =$$

$$= \frac{\int \ldots \int p_1^{m_1+s_1} \ldots p_i^{m_i+s_i+1} \ldots p_L^{m_L+s_L} dp_1 \ldots dp_{L-1}}{\int \ldots \int p_1^{m_1+s_1} \ldots p_i^{m_i+s_i} \ldots p_L^{m_L+s_L} dp_1 \ldots dp_{L-1}} =$$

$$= \frac{\big(\Gamma(m_1+s_1+1) \ldots \Gamma(m_i+s_i+2) \ldots \Gamma(m_L+s_L+1)\big)/\Gamma\big(n+\sum_{j=1}^{L} s_j+L+1\big)}{\big(\Gamma(m_1+s_1+1) \ldots \Gamma(m_i+s_i+1) \ldots \Gamma(m_L+s_L+1)\big)/\Gamma\big(n+\sum_{j=1}^{L} s_j+L\big)} =$$

$$= \frac{m_i+s_i+1}{n+\sum_{j=1}^{L} s_j+L}, \quad \text{gdy} \quad i = 1, 2, \ldots, L;$$

$$(22a)\quad p_i'(m_1, \ldots, m_L, 0, \ldots, 0) = 0, \quad \text{gdy} \quad i = L+1, L+2, \ldots, k.$$

Podstawiając we wzorze (22)

$$(23)\quad s_i = \left(1 - \frac{L-2}{c_i \sum_{j=1}^{L} 1/c_j}\right)\frac{\sqrt{n}}{2} - 1 > -1 \quad (i = 1, \ldots, L)$$

otrzymamy wzór (6), co oznacza, że estymator (6) jest relatywnie najlepszy względem strategii diabła określonej wzorami (17), (18) i (23). Jak już wspominaliśmy w sekcji 2, z teorii gier wiadomo, że jeżeli w pewnej grze dwie strategie są relatywnie jedna względem drugiej najlepsze, to są najlepsze i gra jest domknięta. Strategia diabła zdefiniowana wzorami (17) (18) i (23) spełnia warunek (14), jest więc relatywnie najlepsza względem estymatora (6). Stąd wynika, że estymator (6) jest estymatorem minimaksowym, gra zaś, w której statystyk stosuje czyste estymacje $f = \{p_1'(m_1, \ldots, m_k), \ldots, p_k'(m_1, \ldots, m_k)\}$, a diabeł zrandomizowane strategie $F = F(p_1, \ldots, p_{k-1})$, jest domknięta. Najlepszą strategię dla diabła określają wzory (17), (18) i (23). Wartością gry w_{kn} jest wartość gwarantowana przez estymator (6), tj. na mocy (10) i (11) liczba

$$(24)\quad w_{kn}(c_1, \ldots, c_k) = \bar{\vartheta}(f) = \frac{1}{4(\sqrt{n}+1)^2}\left[\sum_{i=1}^{L} c_i - \frac{(L-2)^2}{\sum_{j=1}^{L} 1/c_j}\right].$$

Ponieważ gra jest domknięta i strategia diabła zdefiniowana wzorami (17), (18) i (23) jest najlepszą strategią w tej grze, więc jej wartość gwarantowana jest równa w_{kn}. Żaden więc estymator zrandomizowany nie może zagwarantować statystykowi wartości mniejszej niż $w_{kn} = \bar{\vartheta}(f)$, tj. nie może być lepszy od estymatora (6), co obiecaliśmy wykazać w sekcji 4.

6. Pozostaje do rozpatrzenia problemat jednoznaczności obu najlepszych strategii. Pokażemy, że jeżeli L jest liczbą zdefiniowaną wzorem (5), jeżeli statystyk w n obserwacjach otrzymał liczby $m_1, \ldots, m_k$ i jeśli $m_{L+1} = m_{L+2} = \ldots = m_k = 0$, to każdy minimaksowy estymator, jaki on może zastosować, pokrywa się z estymatorem (6). Przypuśćmy bowiem, że istnieje minimaksowy estymator $f^* = \{p_1^{*\prime}(m_1, \ldots, m_k), \ldots, p_k^{*\prime}(m_1, \ldots, m_k)\}$ taki, że $p_i^{*\prime}(m_1, \ldots, m_L, 0, \ldots, 0) \neq \bar{p}_i'(m_1, \ldots, m_L, 0, \ldots, 0)$ dla pewnego układu $m_1, \ldots, m_L$ i pewnego i. Ponieważ dla $m_{L+1} = \ldots = m_k = 0$ i m_i ustalonych $(i = 1, 2, \ldots, L)$ liczby p_i' $(i = 1, 2, \ldots, k)$ z wzorów (22) i (22a) są wyznaczone jednoznacznie i dla s_i zdefiniowanych wzorem (23) równe odpowiednio $\bar{p}_i'$, więc estymator f^* nie może być relatywnie najlepszy względem strategii $\bar{F}$ określonej wzorami (17), (18), (23). Ponieważ strategia $\bar{F}$ gwarantuje wartość w_{kn}, więc estymator f^* musi gwarantować wartość większą, a zatem nie może być estymatorem minimaksowym.

Jeżeli $L = k$, to estymator $\bar{f}$ jest jedynym relatywnie najlepszym względem strategii diabła $\bar{F}$, a więc jedynym najlepszym.

Diabeł ma nieskończenie wiele najlepszych strategii. Wynika to z tego, że przy ustalonym estymatorze statystyka wartość oczekiwana ryzyka (15) zależy tylko od momentów stopnia nie wyższego niż $n+2$ dystrybuanty F określającej rozkład wielowymiarowej zmiennej losowej P. Każda więc dystrybuanta, której wszystkie momenty stopnia $1, 2, \ldots, n+2$ są równe odpowiednim momentom dystrybuanty $\bar{F}$, jest również najlepsza. Oczywiście dystrybuant takich jest nieskończenie wiele.

7. Postarajmy się uogólnić otrzymane wyniki na przypadek, gdy zbiór wartości, jakie może przybierać zmienna losowa X, jest przeliczalny. Bez naruszenia ogólności możemy założyć, że jest on zbiorem liczb naturalnych. Przypuśćmy więc, że zmienna losowa X przyjmuje wartości $1, 2, \ldots, i, \ldots$ z prawdopodobieństwami $p_1, p_2, \ldots, p_i, \ldots$ Załóżmy, że jeżeli statystyk zaobserwował wartości $m_1, m_2, \ldots, m_i, \ldots$ $\left(\sum_{i=1}^{\infty} m_i = n,\right.$ $\left.n\text{ — ustalone}\right)$ i na podstawie tej obserwacji podał wartości $p_1', p_2', \ldots, p_i', \ldots$, to zapłaci on diabłu kwotę

$$L(f, P) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i(p_i - p_i')^2 \quad (c_i \geqslant 0). \tag{25}$$

Czystą strategią diabła będzie teraz ciąg liczb $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_i, \ldots\}$ $\left(\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1\right)$, a czystą strategią statystyka ciąg funkcji $f = \{p_1', p_2', \ldots, p_i', \ldots\}$. Niech będzie

$$s = \limsup c_i < \infty. \tag{26}$$

Niech dalej $I = \{i_1, i_2, \ldots, i_k, \ldots\}$ będzie skończonym lub nieskończonym ciągiem tych wskaźników, dla których $c_i > s$. Zbiór $C_I = \{c_{i_1}, c_{i_2}, \ldots \ldots, c_{i_k}, \ldots\}$ można dobrze uporządkować za pomocą relacji $\geqslant$. Bez naruszenia ogólności w dalszej części pracy będziemy zakładali, że ciąg C_I jest nierosnący. Łatwo sprawdzić następujący

LEMAT. *Jeżeli $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_l, \ldots\}$ jest ciągiem nierosnącym o wyrazach dodatnich i jeśli dla pewnego $l \geqslant 2$ zachodzi nierówność*

$$a_l \sum_{i=1}^{l} 1/a_i \leqslant l-2,$$

to

$$a_{l+1} \sum_{i=1}^{l+1} 1/a_i \leqslant l-1.$$

Załóżmy, że zbiór C_I ma co najmniej dwa elementy. Korzystając z lematu dochodzimy do wniosku, że mogą zachodzić co najwyżej dwa przypadki:

1. Istnieje największe takie $l = L$ $(L \geqslant 2)$, że

$$c_{i_l} \sum_{k=1}^{l} 1/c_{i_k} > l-2. \tag{27}$$

2. Ciąg C_I jest nieskończony i nierówność (27) zachodzi dla każdego l $(l = 1, 2, \ldots)$.

Zajmijmy się przypadkiem pierwszym. Niech I_L będzie ciągiem utworzonym z pierwszych L wyrazów ciągu I. Pokażemy, że estymator $\bar{f} = \{\bar{p}_1', \bar{p}_2', \ldots, \bar{p}_i', \ldots\}$ określony wzorem

$$\bar{p}_i' = \begin{cases} \dfrac{m_i + \left(1-(L-2)/c_i \sum_{k=1}^{L} 1/c_{i_k}\right)\frac{1}{2}\sqrt{n}}{n+\sqrt{n}} & \text{dla} \quad i \in I_L, \\[2ex] \dfrac{m_i}{n+\sqrt{n}} & \text{dla} \quad i \operatorname{non} \in I_L \end{cases} \tag{28}$$

jest estymatorem minimaksowym.

Jeśli diabeł będzie stosował strategię $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_i, \ldots\}$, a statystyk estymację $\bar{f}$, to ponieważ wartości $\bar{p}_i'$ we wzorze (28) nie zależą od m_j dla $j \neq i$, ryzyko R przyjmie postać

$$(29)\quad R(\bar{f}, P) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{m_1=0}^{n} \frac{n!}{m_i!(n-m_i)!} p_i^{m_i}(1-p_i)^{m_i}[p_i - \bar{p}_i'(m_i)]^2 =$$

$$= \frac{1}{(\sqrt{n}+1)^2} \left[\frac{L-2}{\sum_{l=1}^{L} 1/c_{i_l}} + \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{L} c_{i_k} \left(1 - \frac{L-2}{c_{i_k} \sum_{l=1}^{L} 1/c_{i_l}}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \sum_{i \operatorname{non} \in I_L} \left(c_i - \frac{L-2}{\sum_{l=1}^{L} 1/c_{i_l}}\right) p_i \right].$$

Z definicji ciągu I_L wynika, że dla i non $\in I_L$

$$(30)\quad c_i \leqslant (l-2) \Big/ \sum_{l=1}^{L} 1/c_{i_l},$$

tzn. każda strategia diabła spełniająca warunek

$$(31)\quad \sum_{l=1}^{L} p_{i_l} = 1$$

jest relatywnie najlepsza względem strategii (28). W szczególności jest nią zrandomizowana strategia zdefiniowana wzorem (31) i

$$(32)\quad g(p_{i_1}, \ldots, p_{i_{L-1}}) = c p_{i_1}^{s_1} \ldots p_{i_L}^{s_L},$$

gdzie g jest gęstością prawdopodobieństwa $(L-1)$-wymiarowej zmiennej losowej $(p_{i_1}, \ldots, p_{i_{L-1}})$ w obszarze spełniającym warunki

$$(33)\quad \sum_{l=1}^{L-1} p_{i_l} \leqslant 1, \quad p_{i_l} \geqslant 0 \quad (l = 1, 2, \ldots, L-1),$$

$$(34)\quad s_l = \left(1-(L-2)/c_{i_l} \sum_{k=1}^{L} 1/c_{i_k}\right) \tfrac{1}{2}\sqrt{n} - 1 \quad (l = 1, 2, \ldots, L).$$

Analogicznie jak w sekcji 5 dowodzi się, że estymator (28) jest relatywnie najlepszy względem strategii diabła zdefiniowanej wyżej. Gra jest więc domknięta i obie strategie są najlepsze.

Załóżmy, że zachodzi drugi z rozpatrywanych przypadków, tj. że

$$(35)\quad c_{i_l} \sum_{k=1}^{l} 1/c_{i_k} > l-2 \quad \text{dla} \quad l = 1, 2, \ldots$$

Niech s będzie liczbą zdefiniowaną wzorem (26). Zatem estymator $\bar{f} = \{\bar{p}_1', \bar{p}_2', \ldots, \bar{p}_i', \ldots\}$, gdzie

$$(36) \qquad \bar{p}_i' = \begin{cases} \dfrac{m_i + (1 - s/c_i)\frac{1}{2}\sqrt{n}}{n+\sqrt{n}} & \text{dla} \quad i \in I, \\ \dfrac{m_i}{n+\sqrt{n}} & \text{dla} \quad i \operatorname{non} \in I, \end{cases}$$

jest estymatorem minimaksowym.

Ryzyko R dane jest wzorem

$$(37) \qquad R(\bar{f}, P) = \frac{1}{(\sqrt{n}+1)^2}\left[s + \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{\infty} c_{i_k}\left(1 - \frac{s}{c_{i_k}}\right)^2 + \sum_{i \operatorname{non} \in I} (c_i - s)p_i\right].$$

Lecz dla $i \operatorname{non} \in I$ mamy $c_i \leqslant s$, a więc wartość gwarantowana estymatora $\bar{f}$ jest równa

$$(38) \qquad \bar{\vartheta}(\bar{f}) = \frac{1}{4(\sqrt{n}+1)^2}\left[\sum_{k=1}^{\infty} c_{i_k}\left(1 - \frac{s}{c_{i_k}}\right)^2 + 4s\right].$$

Pokażemy, że szereg (38) jest skończony dla dowolnego ciągu C_I spełniającego warunek (35). Ponieważ ciąg C_I jest nierosnący, wystarczy pokazać, że

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1 - s/c_{i_k})^2 < \infty.$$

Z nierówności (35) otrzymujemy

$$(39) \qquad \lim_{l\to\infty}\left[(L-2)\Big/\sum_{k=1}^{l} 1/c_{i_k}\right] = \lim_{l\to\infty} c_{i_l} = s.$$

Niech

$$(40) \qquad a_l = (l-2)\Big/\sum_{k=1}^{l} 1/c_{i_k} \quad (l = 2, 3, \ldots);$$

zatem

$$(41) \quad a_{l+1} - a_l = \frac{\sum_{k=1}^{l} 1/c_{i_k} - (l-2)/c_{i_{l+1}}}{\sum_{k=1}^{l} 1/c_{i_k} \sum_{k=1}^{l+1} 1/c_{i_k}} = \frac{c_{i_{l+1}} \sum_{k=1}^{l+1} 1/c_{i_k} - [(l+1)-2]}{c_{i_{l+1}} \sum_{k=1}^{l} 1/c_{i_k} \sum_{k=1}^{l+1} 1/c_{i_k}} \geqslant 0.$$

Stąd otrzymujemy, że

$$(42) \qquad 1 - s/c_{i_k} = 1 - \lim_{l\to\infty}(a_l/c_{i_k}) \leqslant 1 - a_k/c_{i_k} \leqslant 1 - (k-2)/k = 2/k.$$

Ponieważ z założenia $c_{i_k} > s$ dla każdego k, więc $1-s/c_{i_k} > 0$, czyli

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1-s/c_{i_k})^2 \leqslant 4\sum_{k=1}^{\infty}1/k^2 < \infty. \tag{43}$$

Podobnie jak w przypadku pierwszym załóżmy, że diabeł stosuje strategię zdefiniowaną wzorami (31)-(34), gdzie L jest teraz dowolną liczbą naturalną większą od jedności. Najlepszym relatywnie estymatorem względem strategii (31)-(34) jest estymator (28). Wartością gwarantowaną przez strategię (31)-(34) jest więc wartość ryzyka przy założeniu, że statystyk stosuje estymator (28), a diabeł strategię (31)-(34). Wartość tę można obliczyć z wzoru (29) przyjmując $p_i = 0$ dla i non ϵI_L. Wynosi ona

$$\underline{\vartheta}(F_L) = \frac{1}{4(\sqrt{n}+1)^2}\left[\sum_{k=1}^{L}c_{i_k}\left(1-\frac{L-2}{c_{i_k}\sum_{l=1}^{L}1/c_{i_l}}\right)^2+4\frac{L-2}{\sum_{l=1}^{L}1/c_{i_l}}\right]. \tag{44}$$

Łatwo zauważyć, że przy $L\to\infty$, $\underline{\vartheta}(F_L)\to\bar{\vartheta}(\bar{f})$, gdzie $\bar{\vartheta}(\bar{f})$ dane jest wzorem (38). Żaden więc estymator nie zagwarantuje wartości mniejszej niż $\bar{\vartheta}(\bar{f})$, co dowodzi, że estymator $\bar{f}$ jest minimaksowy.

Ponieważ w drugim z rozpatrywanych przypadków na ciąg $\{c_1, c_2, \ldots, c_i, \ldots\}$ nałożono mocne warunki, więc należałoby jeszcze pokazać, że istnieją ciągi, które te warunki spełniają. Przykładem może być tu ciąg, którego i-ty wyraz zdefiniowany jest wzorem

$$c_i = 2^i/(2^i-1) \quad (i = 1, 2, \ldots). \tag{45}$$

Na początku bieżącej sekcji założyliśmy, że zbiór I zawiera co najmniej dwa elementy. Udowodnimy teraz, że *jeżeli tylko $i_1 \epsilon I$, to minimaksowy estymator $\bar{f}$ określa wzór*

$$\bar{p}'_{i_1} = \frac{m_{i_1}+(c_{i_1}-s)\sqrt{n}/2c_{i_1}}{n+\sqrt{n}}; \quad \bar{p}'_i = \frac{m_i}{n+\sqrt{n}} \quad (i\neq i_1;\ i = 1, 2, \ldots). \tag{46}$$

Gdy zbiór I jest pusty, wzór ten przyjmuje postać

$$\bar{p}'_i = m_i/(n+\sqrt{n}) \quad (i = 1, 2, \ldots). \tag{47}$$

Dowód. W przypadku pierwszym ryzyko dane jest wzorem

$$R(\bar{f}, P) = \left(1/(\sqrt{n}+1)^2\right)\left[(c_{i_1}-s)^2/4c_{i_1}+sp_{i_1}+\sum_{i\neq i_1}c_ip_i\right]. \tag{48}$$

Wartość gwarantowana estymatora $\bar{f}$

$$\bar{\vartheta}(\bar{f}) = \left(1/(\sqrt{n}+1)^2\right)[(c_{i_1}-s)^2/4c_{i_1}+s]. \tag{49}$$

Z definicji liczby s wynika, że istnieje podciąg $C_K = \{c_{k_1}, c_{k_2}, \ldots, c_{k_l}, \ldots\}$ ciągu C zbieżny do s. Przyjmijmy $k_1 = i_1$. Niech L będzie pewną liczbą naturalną $\geqslant 2$. Oznaczmy przez F_L strategię diabła zdefiniowaną wzorami (31)-(33), przyjmując w nich

$$i_1 = k_1, \quad i_l = k_{L+l}, \quad s_1 = \big((c_{k_1} - s)/2c_{k_1}\big)\sqrt{n}-1,$$

$$s_l = (c_{k_1}+s)/2c_{k_1}(L-1)-1, \quad (l = 2, 3, \ldots, L).$$

Najlepszy relatywnie estymator f_L do strategii F_L wyraża się wzorem

$$p'_{k_1} = \frac{m_{k_1}+(c_{k_1}-s)\sqrt{n}/2c_{k_1}}{n+\sqrt{n}},$$

$$p'_{k_{L+l}} = \frac{m_{k_{L+l}}+(c_{k_1}+s)/2c_{k_1}(L-1)}{n+\sqrt{n}} \quad \text{dla} \quad l = 2, \ldots, L, \tag{50}$$

$$p'_k = m_k/(n+\sqrt{n}) \quad \text{dla} \quad \text{pozostałych } k \ (k = 1, 2, \ldots).$$

Wartość gwarantowana strategii F_L wynosi

$$\vartheta(F_L) = \mathrm{E}[R(f_L, P)] \tag{51}$$

$$= \frac{1}{(\sqrt{n}+1)^2}\left[\frac{(c_{k_1}-s)^2}{4c_{k_1}} + \frac{1}{4(L-1)^2}\sum_{l=2}^{L}\left(1+\frac{s}{c_{k_1}}\right)^2 c_{k_{L+l}} + \right.$$

$$\left. +\mathrm{E}\left(sp_{k_1} + \sum_{l=2}^{L}\frac{c_{k_1}(L-2)+s}{c_{k_1}(L-1)}c_{k_{L+l}}p_{k_{L+l}}\right)\right].$$

Jak łatwo sprawdzić, przy $L\to\infty$, $\vartheta(F_L)\to\bar{\vartheta}(\bar{f})$, gdzie $\bar{\vartheta}(\bar{f})$ zdefiniowana jest wzorem (49), co dowodzi, że estymator $\bar{f}$ określony wzorem (46) jest minimaksowy.

W drugim przypadku dowód przebiega analogicznie. Za s_l $(l = 1, 2, \ldots, L)$ wystarczy podstawić tym razem liczbę $1/L-1$.

W pracy zakładaliśmy, że $c_i \geqslant 0$. Jeśli jednak np. $c_1 < 0$, to dla $p'_1 \to \pm\infty$ i pozostałych p'_i ustalonych ryzyko $R(f, P) \to -\infty$ i zagadnienie traci sens.

Prace cytowane

[1] D. Blackwell and M. A. Girshick, *Theory of games and statistical decisions*, New York 1954, str. 294.

[2] J. L. Hodges Jr. and E. L. Lehmann, *Some problems in minimax point estimation*, Annals of Math. Stat. 21 (1950), str. 182.

[3] J. von Neumann and O. Morgenstern, *Theory of games and economical behavior*, Princeton 1944.

[4] H. Steinhaus, *The problem of estimation*. Annals of Math. Stat. 28 (1957), str. 633-648.

[5] A. Wald, *Statistical decision functions*, Annals of Math. Stat. 20 (1949), str. 165.

Praca wpłynęła dnia 1. 7. 1956

С. ТРЫБУЛА (Вроцлав)

О МИНИМАКСНОЙ ОЦЕНКЕ

РЕЗЮМЕ

В статье рассмотрен вопрос одновременной оценки параметров $p_1, \ldots, p_k$ в полиномиальном распределении для функции убытка являющейся линейной комбинацией с неотрицательными коэффициентами квадратов ошибок. Получен следующий результат:

Пусть X случайная величина принимающая значения $1, 2, \ldots, k$ с вероятностями $p_1, p_2, \ldots, p_k$ и пусть $X_1, \ldots, X_n$ выборка с этого распределения. Пусть Y_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ обозначает число таких индексов j $(j = 1, 2, \ldots, n)$, для которых $X_j = i$. Пусть функция убытка

$$L(f, P) = \sum_{i=1}^{k} c_i(p_i - p_i')^2,$$

причем $c_1 \geqslant c_2 \geqslant \ldots \geqslant c_k \geqslant 0$, $c_2 \neq 0$, и $P = (p_1', \ldots, p_k')$, является оценкой. Если

$$l_0 = \max_s (c_s \neq 0), \qquad L = \max_t \left(t \leqslant l_0, \sum_{j=1}^{t} \frac{1}{c_j} > \frac{t-2}{c_t}\right),$$

тогда минимаксная оценка $\overline{P}' = (\overline{p}_1', \ldots, \overline{p}_k')$ выражается формулой

$$p_i'(X_1, \ldots, X_n) = \begin{cases} \dfrac{Y_i + \frac{1}{2}\left(1 - (L-2)/c_i \sum_{j=1}^{L} 1/c_j\right)\sqrt{n}}{n + \sqrt{n}} & \text{при} \quad i \leqslant L, \\[2ex] Y_i/(n+\sqrt{n}) & \text{при} \quad i > L. \end{cases}$$

Если все c_i равные нулю, каждая оценка будет минимаксной. Если же только $c_1 \neq 0$, тогда вопрос сводится к оцениванию параметра p в биномиальном распределении при квадратной функции убытка. Формулу для этой оценки дают Годжес и Леманн [2].

В статье рассмотрены тоже вопросы однозначности полученного минимаксного решения и обобщено исследования на случай, когда множество значений, которые может принимать случайная величина X, счётно.

Следует заметить, что полученный результат ни в чем не ограничен предположением $c_1 \geqslant c_2 \geqslant \ldots \geqslant c_k$. Оно только упрощает его формулировку.

S. TRYBUŁA (Wrocław)

ON THE MINIMAX ESTIMATE

SUMMARY

The author considers the problem of simultaneous estimation of the parameters $p_1, p_2, \ldots, p_k$ in a polynomial distribution for a loss-function which is a linear combination with non-negative coefficients of the error squares. The following result has been obtained:

Let X be a random variable assuming the values $1, 2, \ldots, k$ with the probabilities $p_1, p_2, \ldots, p_k$ and let $X_1, X_2, \ldots, X_n$ be a sample of that distribution. Let Y_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ denote the number of indices j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ for which $X_j = i$. Further let the loss $L(f, P) = \sum_{i=1}^{k} c_i(p_i - p_i')^2$, where $c_1 \geqslant c_2 \geqslant \ldots \geqslant c_k \geqslant 0$, $c_2 \neq 0$ and $P' = (p_1', p_2', \ldots, p_k')$ is the estimate. If we denote

$$l_0 = \max_s (c_s \neq 0) \quad \text{and} \quad L = \max_t \left(t \leqslant l_0, \sum_{j=1}^{t} \frac{1}{c_j} > \frac{t-2}{c_t}\right),$$

the minimax estimate $\overline{P}' = (\overline{p}_1', \overline{p}_2', \ldots, \overline{p}_k')$ is expressed by the formula

$$p_i'(X_1, \ldots, X_n) = \begin{cases} \dfrac{Y_i + \frac{1}{2}\left(1 - (L-2)/c_i \sum_{j=1}^{L} 1/c_j\right)\sqrt{n}}{n + \sqrt{n}} & \text{if} \quad i \leqslant L, \\ Y_i/(n+\sqrt{n}) & \text{if} \quad i > L. \end{cases}$$

If all c_i are equal to zero, then every estimate is minimax. If, on the other hand, only $c_1 \neq 0$, then the problem is reduced to estimating the parameter p in the binomial distribution with a square loss. The formula of that estimate is given by Hodges and Lehmann [2].

In the sequel the author considers the problems concerning the unicity of the obtained minimax solution and generalizes his considerations to the case where the number of values which can be assumed by the random variable X is denumerable.

It will be observed that the assumption $c_1 \geqslant c_2 \geqslant \ldots \geqslant c_k$ does not restrict the result in any way, but simplifies its formulation.