M. GRENIEWSKI (Warszawa)

ALGEBRY $(m+n)$-ELEMENTOWE I ICH ZASTOSOWANIA DO UKŁADÓW PRZEKAŹNIKOWO-STYKOWYCH

W pracy(1) tej konstruuję pewne algebry skończenie-elementowe i przedstawiam zastosowanie tych algebr do sieci elektrycznych.

Nawiązuję tu do wyników P. Poreckiego, E. Posta [16], Gr. C. Moisila [11] i H. Greniewskiego [3], [4], dotyczących dwuelementowej algebry Boole'a, oraz wyników J. Łukasiewicza [9], E. Posta [16], Gr. C. Moisila [10], dotyczących trójwartościowego rachunku zdań. Tematem mojej pracy jest uogólnienie teorii funkcji uniwersalnych (patrz rozdział 1.1) dwuelementowej algebry Boole'a na skończone struktury rozdzielne.

Pojęcie funkcji uniwersalnej zostało wprowadzone do algebry Boole'a niezależnie przez Gr. C. Moisila [10], [11] i H. Greniewskiego [3]. W późniejszym okresie Gr. C. Moisil skonstruował funkcję uniwersalną dla trójwartościowego rachunku zdań J. Łukasiewicza, jednakże do tej konstrukcji użył aż czterech funkcji podstawowych (suma, iloczyn, negacja, możliwość), H. Greniewski zaś skonstruował funkcję uniwersalną dla n-wartościowego rachunku zdań (wynik niepublikowany).

Rozdziały 1.6 i 1.7 nawiązują do wyników C. Shannona [17], W. W. Szestakowa [18], M. A. Gawryłowa [2], Gr. C. Moisila [11] oraz H. Greniewskiego, K. Bochenka i R. Marczyńskiego [6], dotyczących zastosowania dwuelementowej algebry Boole'a do syntezy i analizy ideowych schematów sieci elektrycznych. Wszystkie cytowane powyżej prace dotyczą układów, których wejścia i wyjścia przyjmują dwa stany wyróżnione. W paragrafach tych przedstawiam metodę syntezy i analizy układów przekaźnikowo-stykowych, w których część wejść przyjmuje dwa stany wyróżnione, pozostałe wejścia przyjmują trzy stany wyróżnione; analogicznie część wyjść układu przyjmuje dwa stany wyróżnione, pozostałe zaś trzy stany wyróżnione. Problemat ten z punktu widzenia zastosowań (np. automatyki kolejowej) wydaje się interesujący.

---

(1) Niniejsza praca jest oparta na tekście rozprawy kandydackiej przyjętej przez Wydział Budownictwa Lądowego Politechniki Warszawskiej w dniu 15 kwietnia 1957 r.

Rozważania przeprowadzone w paragrafach 1.6 i 1.7 pozwalają na rozwiązanie układów zawierających wielokrotne sprzężenia zwrotne. Przykłady rozważam w rozdziale 2.

Poczuwam się do miłego obowiązku podziękowania prof. dr Stefanowi Straszewiczowi, prof. dr Stanisławowi Jaśkowskiemu i doc. dr Leonowi Łukaszewiczowi za ich cenne wskazówki udzielone mi w czasie pisania niniejszej pracy.

1. Algebry $(m+n)$-elementowe

1.0. Uwagi wstępne. W tym rozdziale rozpatrujemy funkcje i algebrę skończenie-elementową. Niektóre argumenty badanych funkcji przebiegają pewien skończony zbiór A, pozostałe argumenty — inny zbiór skończony B, ale wartości funkcji należą tylko do zbioru A.

Udowodnimy, że jeżeli na zbiorze A jest określona struktura rozdzielna z funkcją porównawczą i na zbiorze B jest zdefiniowana funkcja porównawcza o wartościach należących do zbioru A, to za pomocą działań struktury i funkcji porównawczych można zbudować wszystkie funkcje $k+l$ zmiennych spełniające koniunkcję trzech poniższych warunków:

1. wartości funkcji f należą zawsze do zbioru A,
2. pierwsze k zmiennych przebiega zbiór A,
3. pozostałe l zmiennych przebiega zbiór B.

Udowodnimy, że każdą funkcję określoną na rozważanej parze zbiorów można przedstawić przez funkcję uniwersalną o odpowiednio dobranych parametrach, przy czym dobór ten jest jednoznaczny.

1.1. Algebra m-elementowej struktury rozdzielnej z funkcją porównawczą. Podamy aksjomaty skończonej struktury rozdzielnej wzbogacone o dwa aksjomaty funkcji porównawczej i następnie dowiedziemy kilku podstawowych twierdzeń.

Wyrażenia pierwotne. Stałe: $a_1, a_2, \ldots, a_m$; zmienne: $x, y, z, C, \gamma, \ldots$ przebiegające zbiór $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$; funkcje: $x \cup y$ (suma), $x \cap y$ (iloczyn), $x:y$ (identyfikacja, czyli funkcja porównawcza; symbol ten czyta się „x porównane z y").

Tezy pierwotne (postulaty).

1.1.1 $\quad a_i \neq a_j$, jeżeli $i \neq j$ (dla $i, j = 1, 2, \ldots, m$),

1.1.2a $\quad x \cap a_m = x$, $\qquad$ 1.1.2b $\quad x \cup a_1 = x$,

1.1.3a $\quad x \cap a_1 = a_1$, $\qquad$ 1.1.3b $\quad x \cup a_m = a_m$,

1.1.4a	$x \frown y \quad = y \frown x,$	1.1.4b	$x \smile y \quad = y \smile x,$
1.1.5a	$x \frown (y \frown z) = (x \frown y) \frown z,$	1.1.5b	$x \smile (y \smile z) = (x \smile y) \smile z,$
1.1.6a	$x \frown (y \smile z) = (x \frown y) \smile (x \frown z),$	1.1.6b	$x \smile (y \frown z) = (x \smile y) \frown (x \smile z),$

1.1.7 jeżeli $x = y$, to $x:y = a_m$,

1.1.8 jeżeli $x \neq y$, to $x:y = a_1$.

System zaksjomatyzowany, którego podstawy sformułowaliśmy wyżej, dopuszcza wiele interpretacji. Czytelnik bez trudności znajdzie takie interpretacje tego systemu, w których wszystkie elementy struktury $a_1, \ldots, a_m$ są np. liczbami, wektorami, macierzami, zbiorami itd. (patrz [1], [8]).

Udowodnimy obecnie dwa lematy, tzw. *prawa tautologii.*

1.1.9 Lemat. $x \smile x = x$.

Dowód.

$$x \smile x = (x \frown a_m) \smile (x \frown a_m) = \quad \text{(na mocy 1.1.2a)}$$
$$= x \frown (a_m \smile a_m) = \quad \text{(na mocy 1.1.6a)}$$
$$= x \frown a_m = \quad \text{(na mocy 1.1.3b)}$$
$$= x \quad \text{(na mocy 1.1.2a), c. b. d. o.}$$

1.1.10 Lemat. $x \frown x = x$.

Dowód analogiczny do poprzedniego.

1.1.11 Lemat. $x:x = a_m$.

Dowód na mocy 1.1.7.

1.1.12 Twierdzenie. $x:y = y:x$.

Dowód opiera się na 1.1.8 i 1.1.7.

1.1.13 Twierdzenie. $x \frown (x \smile y) = x$.

Dowód.

$$x \frown (x \smile y) = (x \smile a_1) \frown (x \smile y) = \quad \text{(na mocy 1.1.2b)}$$
$$= x \smile (a_1 \frown y) = \quad \text{(na mocy 1.1.6b)}$$
$$= x \smile a_1 = \quad \text{(na mocy 1.1.3a)}$$
$$= x \quad \text{(na mocy 1.1.2b), c. b. d. o.}$$

1.1.14 Twierdzenie. $x \smile (x \frown y) = x$.

Dowód analogiczny do poprzedniego.

Przyjmujemy następujące definicje:

1.1.15a $$\bigwedge_{j=1}^{1} x_j \overset{\mathrm{df}}{=} x_1, \quad \bigwedge_{l=1}^{q} x_l \overset{\mathrm{df}}{=} \Big(\bigwedge_{j=1}^{q-1} x_j\Big) \cap x_q \quad \text{dla} \quad q = 2, 3, \ldots,$$

1.1.15b $$\bigvee_{j=1}^{1} x_j \overset{\mathrm{df}}{=} x_1, \quad \bigvee_{l=1}^{q} x_l \overset{\mathrm{df}}{=} \Big(\bigvee_{j=1}^{q-1} x_j\Big) \cup x_q \quad \text{dla} \quad q = 2, 3, \ldots,$$

1.1.16 $$A \overset{\mathrm{df}}{=} \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}.$$

DEFINICJA. Przez *funkcję uniwersalną jednej zmiennej* przebiegającą m-elementowy zbiór A, o wartościach ze zbioru A, będziemy rozumieli taką funkcję jednej zmiennej i m parametrów przebiegających zbiór A, o wartościach należących do zbioru A, że podstawiając odpowiednie wartości za parametry możemy otrzymać wszystkie przekształcenia zbioru A w jego podzbiory.

Wprowadźmy dla dogodności oznaczenie

1.1.17 $$(x * C_1, \ldots, C_m) \overset{\mathrm{df}}{=} \bigvee_{j=1}^{m} [C_j \cap (x : a_j)], \quad \text{gdzie } C_j \in A \text{ dla } j = 1, 2, \ldots, m.$$

1.1.18 TWIERDZENIE. *Dla każdej jednoargumentowej funkcji g (gdzie stale $x, g(x) \in A$) istnieje dokładnie jeden ciąg $C_1, \ldots, C_m \in A$ taki, że dla dowolnego $x \in A$ mamy*

$$g(x) = (x * C_1, \ldots, C_m).$$

D o w ó d przeprowadzimy w dwóch częściach. Po pierwsze wykażemy, że dla każdej jednoargumentowej funkcji g, określonej na zbiorze A, istnieje taki układ stałych $C_1, \ldots, C_m$, że

$$g(x) = (x * C_1, \ldots, C_m).$$

Niech $g(a_j) = \gamma_j$, gdzie $j = 1, \ldots, m$. Podstawmy $C_j = \gamma_j$ do wyrażenia $(x * C_1, \ldots, C_m)$. Niech $x = a_k$, gdzie $k = 1, \ldots, m$; wtedy

$$(a_k * \gamma_1, \ldots, \gamma_m) = \bigvee_{j=1}^{m} [\gamma_j \cap (a_k : a_j)] = \gamma_k \cap a_m = \gamma_k.$$

Po drugie wykażemy, że dla każdej funkcji g określonej na zbiorze A istnieje tylko jeden układ stałych $C_1, C_2, \ldots, C_m$ takich, że

$$g(x) = (x * C_1, \ldots, C_m).$$

Załóżmy, że

$$g(x) = (x * C_1, \ldots, C_m) \quad \text{oraz} \quad g(x) = (x * C_1', \ldots, C_m'),$$

przy czym istnieje co najmniej jedno takie naturalne k, $1 \leqslant k \leqslant m$, że $C_k \neq C'_k$. Podstawmy $x = a_k$; wtedy

$$(a_k * C_1, \ldots, C_m) = \bigvee_{j=1}^{m} [C_j \cap (a_k : a_j)] = C_k;$$

z drugiej strony

$$(a_k * C'_1, \ldots, C'_m) = \bigvee_{j=1}^{m} [C'_j \cap (a_k : a_j)] = C'_k,$$

skąd

$$(x * C_1, \ldots, C_m) \neq (x * C'_1, \ldots, C'_m),$$

co jest sprzeczne z założeniem, c. b. d. o.

Dla zilustrowania twierdzenia 1.1.18 zdefiniujemy dwie funkcje jednoargumentowe i podamy stałe, które należy podstawić do funkcji uniwersalnej, aby te funkcje otrzymać:

1.1.19 $$x^+ \overset{\mathrm{df}}{=} x,$$

1.1.20 $$x^- \overset{\mathrm{df}}{=} \bigvee_{i=1}^{m} [a_{m-i+1} \cap (x : a_i)].$$

Przykłady.

1.1.21 $$x^+ = (x * a_1, \ldots, a_m),$$

1.1.22 $$x^- = (x * a_m, \ldots, a_1).$$

W przykładzie 1.1.21 parametry funkcji uniwersalnej przyjmują wszystkie kolejne wartości poczynając od a_1, a kończąc na a_m, natomiast w przykładzie 1.1.22 te same wartości parametrów występują w porządku odwrotnym.

1.1.23 Lemat. *Jeżeli dla dowolnego $x \in A$*

$$g(x) = (x * C_1, \ldots, C_m),$$

to

$$g(x) : a_j = \big(x * (C_1 : a_j), \ldots, (C_m : a_j)\big).$$

Dowód wynika z definicji funkcji uniwersalnej i z twierdzenia 1.1.18.

1.1.24 Twierdzenie. *Jeżeli dla dowolnego $x \in A$*

$$g_1(x) = (x * C_1^{(1)}, \ldots, C_m^{(1)}),$$

to dla każdej funkcji g_2 zachodzi relacja

$$g_2\big(g_1(x)\big) = \big(x * g_2(C_1^{(1)}), \ldots, g_2(C_m^{(1)})\big).$$

Dowód.

$$g_2(g_1(x)) = \bigvee_{j=1}^{m} [C_j^{(2)} \cap (g_1(x) : a_j)] = \qquad \text{(na mocy 1.1.18)}$$

$$= \bigvee_{j=1}^{m} \Big\{ C_j^{(2)} \cap \Big[\bigvee_{i=1}^{m} \big((C_j^{(1)} : a_j) \cap (x : a_i) \big) \Big] \Big\} = \qquad \text{(na mocy 1.1.24)}$$

$$= \bigvee_{j=1}^{m} \bigvee_{i=1}^{m} [C_j^{(2)} \cap (C_i^{(1)} : a_j) \cap (x : a_i)] = \qquad \text{(na mocy 1.1.6a)}$$

$$= \bigvee_{i=1}^{m} \Big\{ \Big[\bigvee_{j=1}^{m} \big(C_j^{(2)} \cap (C_i : a_j) \big) \Big] \cap (x : a_i) \Big\} = \qquad \text{(na mocy 1.1.6a)}$$

$$= \bigvee_{i=1}^{m} [C_i^{(3)} \cap (x : a_i)],$$

gdzie

$$C_i^{(3)} = \bigvee_{j=1}^{m} [C_j^{(2)} \cap (C_i^{(1)} : a_j)] = (C_i^{(1)} * C_1^{(2)}, \ldots, C_m^{(2)} = g_2(C_i^{(1)}).$$

Podstawiając $g_2(C_i^{(1)})$ zamiast $C_i^{(3)}$ do poprzedniej zależności otrzymujemy

$$\bigvee_{i=1}^{m} [g_2(C_i^{(1)}) \cap (x : a_i)] = \big(x * g_2(C_1^{(1)}), \ldots, g_2(C_m^{(1)}) \big), \qquad \text{c. b. d. o.}$$

Wprowadźmy definicję:

Definicja. Przez *funkcję uniwersalną p zmiennych* przebiegających m-elementowy zbiór A, o wartościach ze zbioru A, będziemy rozumieli taką funkcję p zmiennych i m^p parametrów przebiegających zbiór A, o wartościach należących do zbioru A, że podstawiając odpowiednie wartości za parametry, możemy otrzymać wszystkie przekształcenia p-tej potęgi kartezjańskiej zbioru A w podzbiory zbioru A.

1.1.25 $$(x_1, \ldots, x_p * \|C_{j1}, \ldots, {}_{jp}\|) \overset{\text{df}}{=} \bigvee_{j1,\ldots,jp=1}^{m} \Big\{ C_{j1,\ldots,jp} \cap \Big[\bigwedge_{l=1}^{p} (x_l : a_{jl}) \Big] \Big\},$$

gdzie $C_{j_1,\ldots,j_p} \in A$ dla $i = 1, \ldots, p$; $j_i = 1, \ldots, m$, a $\|C_{j_1,\ldots,j_p}\|$ jest macierzą jednowierszową m^p-wyrazową.

1.1.26 Twierdzenie. *Dla każdej funkcji p-argumentowej g (gdzie stałe $x_1, \ldots, x_p, g(x_1, \ldots, x_p) \in A$) istnieje dokładnie jeden ciąg m^p-wyrazowy złożony z wyrazów $C_{j_1,\ldots,j_p} \in A$ dla $i = 1, \ldots, p$, $j_i = 1, \ldots, m$ taki, że dla dowolnych $x_1, \ldots, x_p \in A$* mamy

$$g(x_1, \ldots, x_p) = (x_1, \ldots, x_p * \|C_{j_1,\ldots,j_p}\|).$$

Dowód przeprowadzimy analogicznie do przypadku funkcji jednej zmiennej. Niech będzie dana p-argumentowa funkcja g określona na zbiorze A. Wykażemy, że istnieje taka macierz stałych $\|C_{j_1,\ldots,j_p}\|$, że

$$g(x_1, \ldots, x_p) = (x_1, \ldots, x_p * \|C_{j_1,\ldots,j_p}\|).$$

Niech

$$g(a_{k_1}, \ldots, a_{k_p}) = \gamma_{k_1}, \ldots, k_p \quad \text{dla} \quad i = 1, \ldots, p, \; k_i = 1, \ldots, m,$$

gdzie $\gamma_{k_1,\ldots,k_p} \in A$. Podstawmy do wyrażenia $(x_1, \ldots, x_p * \|C_{j_1,\ldots,j_p}\|)$ za parametry $C_{j_1,\ldots,j_p}$ odpowiednio wyrażenia $\gamma_{j_1,\ldots,j_p}$. Jako wynik otrzymujemy

$$(x_1, \ldots, x_p * \|\gamma_{j_1,\ldots,j_p}\|).$$

Niech $x_i = a_{k_i}$ dla $i = 1, \ldots, p$, $k_i = 1, \ldots, m$; wtedy

$$(a_{k_1}, \ldots, a_{k_p} * \|\gamma_{j_1,\ldots,j_p}\|) = \bigvee_{j_1,\ldots,j_p=1}^{n} \{\gamma_{j_1,\ldots,j_p} \cap [\bigwedge_{l=1}^{p} (a_{k_l} : a_{j_l})]\} = \gamma_{k_1,\ldots,k_p}.$$

Przypuśćmy, że

$$g(x_1, \ldots, x_p) = (x_1, \ldots, x_p * \|C_{j_1,\ldots,j_p}\|),$$

$$g(x_1, \ldots, x_p) = (x_1, \ldots, x_p * \|C'_{j_1,\ldots,j_p}\|),$$

przy czym istnieje co najmniej jeden układ liczb naturalnych k_i, $1 \leqslant k_i \leqslant m$ $(i = 1, \ldots, p)$ taki, że

$$C_{k_1,\ldots,k_p} \neq C'_{k_1,\ldots,k_p}.$$

Podstawmy $x_i = a_{k_i}$:

$$(a_{k_1}, \ldots, a_{k_p} * \|C_{j_1,\ldots,j_p}\|) = C_{k_1,\ldots,k_p}.$$

Z drugiej strony

$$(a_{k_1}, \ldots, a_{k_p} * \|C'_{j_1,\ldots,j_p}\|) = C'_{k_1,\ldots,k_p},$$

skąd

$$(x_1, \ldots, x_p * \|C_{j_1,\ldots,j_p}\|) \neq (x_1, \ldots, x_p * \|C'_{j_1,\ldots,j_p}\|),$$

co jest sprzeczne z założeniem, c. b. d. o.

1.1.27 Lemat. *Jeżeli dla wszelkich $x_1, x_2 \in A$*

$$g(x_1, x_2) = (x_1, x_2 * \|C_{kh}\|),$$

to

$$g(x_1, x_2) : a_j = (x_1, x_2 * \|(C_{kh} : a_j)\|).$$

Dowód wynika z definicji funkcji uniwersalnej i z twierdzenia 1.1.26.

1.1.28 TWIERDZENIE. *Jeżeli dla wszelkich* $x_1, x_2 \in A$

$$g(x_1, x_2) = (x_1, x_2 * \|C_{kh}\|),$$

to dla dowolnych $x_1, x_2, x_3 \in A$

$$g\big(x_1, g(x_2, x_3)\big) = \big(x_1, x_2, x_3 * \|g(a_i, C_{kh})\|\big).$$

Dowód.

$$g\big(x_1, g(x_1, x_3)\big) = \bigvee_{k=1}^{m} \bigvee_{j=1}^{m} [C_{ij} \cap (x:a_i) \cap (g(x_2, x_3):a_j)] =$$

$$= \bigvee_{i=1}^{m} \bigvee_{j=1}^{m} \Big\{C_{ij} \cap (x_1:a_i) \cap \Big[\bigvee_{k=1}^{m} \bigvee_{h=1}^{m} \big((C_{kh}:a_j) \cap (x_2:a_k) \cap (x_3:a_h)\big)\Big]\Big\} =$$

(na mocy 1.1.27)

$$= \bigvee_{i=1}^{m} \bigvee_{k=1}^{m} \bigvee_{h=1}^{m} \Big\{\Big[\bigvee_{j=1}^{m} \big(C_{ij} \cap (C_{kh}:a_j)\big)\Big] \cap (x_1:a_i) \cap (x_2:a_k) \cap (x_3:a_h)\Big\} =$$

(na mocy 1.1.6a)

$$= \bigvee_{i=1}^{m} \bigvee_{k=1}^{m} \bigvee_{h=1}^{m} [g(a_i, C_{kh}) \cap (x_1:a_i) \cap (x_2:a_k) \cap (x_3:a_h)] =$$

(z założenia)

$$= \big(x_1, x_2, x_3 * \|g(a_i, C_{kh})\|\big),$$ c. b. d. o.

1.2. Algebra m**-elementowej struktury rozdzielnej i** n**-elementowego zbioru abstrakcyjnego.** Do aksjomatyki przyjętej w paragrafie 1.1 dołączmy następujące:

Wyrażenia pierwotne. Stałe $\beta_1, \ldots, \beta_n$; zmienne $a, b, c, \ldots$ przebiegające zbiór $\{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$; funkcja $a:b$ (funkcja porównawcza).

Tezy pierwotne (postulaty):

1.2.1 $$\beta_i \neq \beta_j, \text{ jeżeli } i \neq j \text{ dla } i, j = 1, \ldots, n;$$

1.2.2 $$\text{jeżeli } a = b, \text{ to } a:b = a_m;$$

1.2.3 $$\text{jeżeli } a \neq b, \text{ to } a:b = a_1$$ [2].

Wprowadźmy definicję

1.2.4 $$B \overset{\mathrm{df}}{=} \{\beta_1, \ldots, \beta_n\}.$$

---

[2] Przyjęte aksjomaty dla funkcji porównawczej (1.2.2 i 1.2.3) rozszerzają zbiór argumentów tej funkcji o zbiór $\{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$, jednakże aksjomaty 1.1.8, 1.2.2 i 1.2.3 określają tę funkcję tylko dla takich par, których oba składniki równocześnie należą do tego samego zbioru.

Definicja. Przez *funkcję uniwersalną $p+q$ zmiennych*, z których p przebiega zbiór m-elementowy A, q zaś przebiega zbiór n-elementowy B, o wartościach ze zbioru A, będziemy rozumieli taką funkcję $p+q$ zmiennych i $m^p \cdot n^q$ parametrów (parametry przebiegają zbiór A), że podstawiając odpowiednie wartości za parametry, możemy otrzymać wszystkie przekształcenia $(p+q)$-krotnego iloczynu kartezjańskiego zbiorów A i B (p-krotnego zbioru A i q-krotnego zbioru B) w podzbiory zbioru A.

1.2.5 $$(x_1, \ldots, x_p; a_1, \ldots, a_q * \|C^{i_1,\ldots,i_q}_{j_1,\ldots,j_p}\|) \overset{\mathrm{df}}{=}$$
$$\overset{\mathrm{df}}{=} \bigvee_{j_1,\ldots,j_p=1}^{m} \bigvee_{i_1,\ldots,i_q=1}^{n} \{C^{i_1,\ldots,i_q}_{j_1,\ldots,j_p} \cap [\bigwedge_{l=1}^{p} (x_l : a_{j_l})] \cap [\bigwedge_{k=1}^{q} (a_k : \beta_{i_k})]\},$$

gdzie $C^{i_1,\ldots,i_q}_{j_1,\ldots,j_p} \in A$, a $\|C^{i_1,\ldots,i_q}_{j_1,\ldots,j_p}\|$ oznacza macierz prostokątną o m^p wierszach i n^q kolumnach.

1.2.6 Twierdzenie. *Dla każdej funkcji $(p+q)$-argumentowej (gdzie stałe $x_1, \ldots, x_p \in A$, $a_1, \ldots, a_q \in B$, $g(x_1, \ldots, x_p, a_1, \ldots, a_q) \in A$) istnieje dokładnie jedna macierz*

$$\|C^{i_1,\ldots,i_q}_{j_1,\ldots,j_p}\|,$$

o m^p wierszach, n^q kolumnach i o wszystkich wyrazach należących do zbioru A, taka, że

$$g(x_1, \ldots, x_p; a_1, \ldots, a_q) = (x_1, \ldots, x_p; a_1, \ldots, a_q * \|C^{i_1,\ldots,i_q}_{j_1,\ldots,j_p}\|).$$

Dowód przebiega podobnie jak dla twierdzenia 1.1.26.

1.3. Własności sumy i iloczynu funkcji uniwersalnych. Zajmiemy się obecnie kilkoma własnościami funkcji uniwersalnych wprowadzonych w paragrafie 1.2.

1.3.1 Twierdzenie.

$$(x_1, \ldots, x_p; a_1, \ldots, a_q * \|C'^{i_1,\ldots,i_q}_{j_1,\ldots,j_p}\|) \cap (x_1, \ldots, x_p; a_1, \ldots, a_q * \|C''^{i_1,\ldots,i_q}_{j_1,\ldots,j_p}\|) =$$
$$= (x_1, \ldots, x_p; a_1, \ldots, a_q * \|C^{i_1,\ldots,i_q}_{j_1,\ldots,j_p}\|),$$

gdzie

$$C^{i_1,\ldots,i_q}_{j_1,\ldots,j_p} = C'^{i_1,\ldots,i_q}_{j_1,\ldots,j_p} \cap C''^{i_1,\ldots,i_q}_{j_1,\ldots,j_p}.$$

Znaczy to, *że iloczyn dwóch funkcji uniwersalnych $p+q$ zmiennych jest funkcją uniwersalną $p+q$ zmiennych.*

Dowód.

$$(x_1, \ldots, x_p; a_1, \ldots, a_q * \|C'^{i_1,\ldots,i_q}_{j_1,\ldots,j_p}\|) \frown (x_1, \ldots, x_p; a_1, \ldots, a_q * \|C''^{i_1,\ldots,i_q}_{j_1,\ldots,j_p}\|) =$$

$$= \Big\{ \bigvee_{j_1,\ldots,j_p=1}^{m} \bigvee_{i_1,\ldots,i_q=1}^{n} \Big[C'^{i_1,\ldots,i_q}_{j_1,\ldots,j_p} \frown \Big(\bigwedge_{l=1}^{p} (x_l : a_{j_l})\Big) \frown \Big(\bigwedge_{k=1}^{q} (a_k : \beta_{i_k})\Big)\Big]\Big\} \frown$$

$$\frown \Big\{ \bigvee_{j_1,\ldots,j_p=1}^{m} \bigvee_{i_1,\ldots,i_q=1}^{n} \Big[C''^{i_1,\ldots,i_q}_{j_1,\ldots,j_p} \frown \Big(\bigwedge_{l=1}^{p} (x_l : a_{j_l})\Big) \frown \Big(\bigwedge_{k=1}^{q} (a_k : \beta_{i_k})\Big)\Big]\Big\} =$$

$$= \bigvee_{j_1,\ldots,j_p=1}^{m} \bigvee_{i_1,\ldots,i_q=1}^{n} \Big[C'^{i_1,\ldots,i_q}_{j_1,\ldots,j_p} \frown C''^{i_1,\ldots,i_q}_{j_1,\ldots,j_p} \frown \Big(\bigwedge_{l=1}^{p} (x_l : a_{j_l})\Big) \frown \Big(\bigwedge_{k=1}^{q} (a_k : \beta_{i_k})\Big)\Big] =$$

$$= x_1, \ldots, x_p; a_1, \ldots, a_q * \|C^{i_1,\ldots,i_q}_{j_1,\ldots,j_p}\|), \quad \text{c. b. d. o.}$$

1.3.2 TWIERDZENIE.

$$(x_1, \ldots, x_p; a_1, \ldots, a_q * \|C'^{i_1,\ldots,i_q}_{j_1,\ldots,j_p}\|) \smile (x_1, \ldots, x_p; a_1, \ldots, a_q * \|C''^{i_1,\ldots,i_q}_{j_1,\ldots,j_p}\|) =$$

$$= (x_1, \ldots, x_p; a_1, \ldots, a_q * \|C^{i_1,\ldots,i_q}_{j_1,\ldots,j_p}\|),$$

gdzie

$$C^{i_1,\ldots,i_q}_{j_1,\ldots,j_p} = C'^{i_1,\ldots,i_q}_{j_1,\ldots,j_p} \smile C''^{i_1,\ldots,i_q}_{j_1,\ldots,j_p}.$$

Znaczy to, że *suma dwóch funkcji uniwersalnych $p+q$ zmiennych jest funkcją uniwersalną $p+q$ zmiennych.*

Dowód przebiega podobnie jak dla twierdzenia 1.3.1.

W dalszym ciągu będą przydatne poniższe oznaczenia:

1.3.3
$$\bigwedge_{\substack{j=1\\ x_j \neq x_i}}^{k} x_j \overset{\mathrm{df}}{=} \bigwedge_{j=1}^{k} \{x_j \smile [(x_j : x_i) : a_m]\},$$

1.3.4
$$\bigvee_{\substack{j=1\\ x_j \neq x_i}}^{k} x_j \overset{\mathrm{df}}{=} \bigvee_{j=1}^{k} \{x_j \frown [(x_j : x_i) : a_1]\}.$$

1.4. Algebra m-elementowej struktury rozdzielnej i n-elementowego zbioru abstrakcyjnego a dwuelementowa algebra Boole'a. Wprowadźmy oznaczenie

1.4.1
$$\bar{x} \overset{\mathrm{df}}{=} x : a_1.$$

Otrzymujemy od razu poniższe lematy:

1.4.2 $\bar{a}_1 = a_m$; 1.4.3 $\bar{a}_m = a_1$.

1.4.4 TWIERDZENIE. $\overline{x : a_i} = \bigvee_{\substack{j=1\\ j \neq i}}^{m} (x : a_j).$

Dowód.

$$\overline{x:a_i} = (x:a_i):a_1 = \qquad \text{(na mocy 1.4.1)}$$

$$= \bigvee_{j=1}^{m} [(a_j:a_i):a_1] \frown (x:a_j) = \qquad \text{(na mocy 1.1.18 i 1.1.23)}$$

$$= \Big[\bigvee_{\substack{j=1\\ a_j \neq a_i}}^{m} \big(a_m \frown (x:a_j)\big)\Big] \smile [a_1 \frown (x:a_i)] = \qquad \text{(na mocy 1.1.7, 1.1.8 i 1.3.4)}$$

$$= \Big[\bigvee_{\substack{j=1\\ a_j \neq a_i}}^{m} (x:a_j)\Big] \smile a_1 = \qquad \text{(na mocy 1.1.8a 1.1.3a)}$$

$$= \bigvee_{\substack{j=1\\ a_j \neq a_i}}^{m} (x:a_j) \qquad \text{(na mocy 1.1.2b),}$$

co było do okazania.

1.4.5a LEMAT. $\overline{a_i:a_j} = a_k:a_k$ *dla* $i \neq j$.

1.4.5b LEMAT. $\overline{a_k:a_k} = a_i:a_j$ *dla* $i \neq j$.

1.4.6a LEMAT. $(a_i:a_j) \smile (x_1:x_2) = x_1:x_2$ *dla* $i \neq j$.

1.4.6b LEMAT. $(a_k:a_k) \frown (x_1:x_2) = x_1:x_2$.

1.4.7a LEMAT. $(a_k:a_k) \smile (x_1:x_2) = a_k:a_k$.

1.4.7b LEMAT. $(a_i:a_j) \frown (x_1:x_2) = a_i:a_j$ *dla* $i \neq j$.

Dowody powyższych lematów wynikają z przyjętej aksjomatyki i lematów 1.4.2 i 1.4.3.

Z lematów powyższych wynika następujące

1.4.8 METATWIERDZENIE. *Niech będzie dwuelementowa algebra Boole'a*

$$\langle \{0,1\}, {}^{-}, +, \cdot \rangle.$$

Podstawiając do dowolnej tezy tej algebry za zmienne, stałe i funkcje wyrażenia wyznaczone przez poniższą tabliczkę, otrzymujemy zawsze tezy algebry m-elementowej struktury rozdzielnej i n-elementowego zbioru dowolnego.

	Algebra dwuelementowa Boole'a	Algebra $(m+n)$-elementowa
Zmienne	x, y	$x_1:x_2,\ y_1:y_2,\ \ldots$
Stałe	$0, 1$	$a_i:a_j,\ a_k:a_k,$ gdzie $i \neq j$
Funkcje	$\bar{x},\ x+y,\ x \cdot y$	$\overline{x_1:x_2},\ (x_1:x_2) \smile (y_1:y_2),$ $(x_1:x_2) \frown (y_1:y_2)$

1.5. Ciągi przeliczalne algebry $(m+n)$-elementowej. Dotychczas zajmowaliśmy się funkcjami o wartościach należących do zbioru A i o argumentach, które przebiegały zbiór A lub zbiór B. (Zmienne $g, g_1, g_2, \ldots$ przebiegają zbiór tych funkcji).

Obecnie zajmiemy się ciągami złożonymi z elementów zbioru A lub ciągami złożonymi z elementów zbioru B. Zamiast mówić o ciągach wygodniej będzie mówić o funkcjach argumentu naturalnego o wartościach ze zbioru A lub o funkcjach argumentu naturalnego o wartościach ze zbioru B.

W dalszym ciągu będziemy zakładali, że zmienne $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \xi, \xi_1, \xi_2, \ldots$ przebiegają zbiór funkcji argumentu naturalnego o wartościach należących do zbioru A, zmienne $\psi, \psi_1, \psi_2, \ldots$ zaś przebiegają zbiór funkcji argumentu naturalnego o wartościach należących do zbioru B.

1.5.1 DEFINICJA. Mówimy, że układ funkcji

$$\langle \varphi_1, \ldots, \varphi_p, \psi_1, \ldots, \psi_q, \xi, g \rangle$$

zawiera *opóźnienie dokładnie o k jednostek* ($k \geqslant 0$), zamiast mówić, że stale mamy

$$\xi(t+k) = g\big(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_p(t); \psi_1(t), \ldots, \psi_p(t)\big), \qquad t = 1, 2, \ldots$$

1.5.2 DEFINICJA. Mówimy, że układ funkcji

$$\langle \varphi_1, \ldots, \varphi_p, \psi_1, \ldots, \psi_q, \xi, g \rangle$$

zawiera *opóźnienie najwyżej o k jednostek* ($k \geqslant 0$), zamiast mówić, że stale mamy

$$\xi(t+k) = g\left(\left\|\begin{matrix} \varphi_1(t) & \ldots\ \varphi_p(t) & \psi_1(t) & \psi_q(t) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_1(t+k) & \ldots\ \varphi_p(t+k) & \psi_1(t+k) & \ldots\ \psi_q(t+k) \end{matrix}\right\|\right), t = 1, 2, \ldots$$

1.5.3 DEFINICJA. Mówimy, że układ funkcji

$$\langle \varphi_1, \ldots, \varphi_p, \psi_1, \ldots, \psi_q, \xi_1, \xi, g \rangle$$

zawiera *sprzężenie zwrotne opóźniające o dokładnie k jednostek* ($k > 0$), zamiast mówić, że stale mamy

$$\xi(\tau) = g\big(\varphi_1(\tau), \ldots, \varphi_p(\tau); \psi_1(\tau), \ldots, \psi_q(\tau), \xi_1(\tau)\big) \quad \text{dla} \quad \tau = 1, 2, \ldots, k$$

oraz

$$\xi(t+k) = g\big(\varphi_1(t+k), \ldots, \varphi_p(t+k); \psi_1(t+k), \ldots, \psi_q(t+k), \xi(t)\big)$$
$$\text{dla} \quad t = 1, 2, \ldots$$ [3].

---

[3] Funkcje $\xi_1(\tau)$ będziemy nazywali *warunkami początkowymi* dla sprzężenia zwrotnego opóźniającego o dokładnie k jednostek.

1.5.4 DEFINICJA. Mówimy, że układ funkcji

$$\langle \varphi_1, \ldots, \varphi_p, \psi_1, \ldots, \psi_q, \xi_1, \ldots, \xi_k, \xi, g\rangle$$

zawiera *sprzężenie zwrotne opóźniające najwyżej o k jednostek* ($k > 0$), zamiast mówić, że stale mamy

$$\xi(1) = g\big(\varphi_1(1), \ldots, \varphi_p(1); \psi_1(1), \ldots, \psi_q(1); \xi_1(1), \ldots, \xi_k(1)\big),$$

$$\xi(2) = g\big(\varphi_1(2), \ldots, \varphi_p(2); \psi_1(2), \ldots, \psi_q(2); \xi_1(2), \ldots, \xi_{k-1}(2), \xi(1)\big),$$

. . . .

$$\xi(k) = g\big(\varphi_1(k), \ldots, \varphi_p(k); \psi_1(k), \ldots, \psi_q(k); \xi_1(k), \xi(1), \ldots, \xi(k-1)\big)$$

oraz

$$\xi(t+k) = g\big(\varphi_1(t+k), \ldots, \varphi_p(t+k), \psi_1(t+k), \ldots, \psi_q(t+k), \xi(t), \ldots, \xi(t+k)\big)$$

dla $t = 1, 2, \ldots$ [4].

1.5.5 TWIERDZENIE. *Jeżeli* 1° *układ* $\langle \varphi, \xi_1, g_1\rangle$ *zawiera opóznienie dokładnie o* k_1 *jednostek i* 2° *układ* $\langle \xi_1, \xi, g_2\rangle$ *zawiera opóźnienie o dokładnie* k_2 *jednostek, to układ*

$$\langle \varphi, \xi, g_2 \cdot g_1\rangle$$

zawiera opóźnienie o dokładnie $k_1 + k_2$ *jednostek.*

Dowód.

$$\xi_1(t+k_1) = g_1\big(\varphi(t)\big), \quad \xi(t+k_2) = g_2\big(\xi_1(t)\big) \quad \text{(z założenia)},$$

$$\xi(t+k_1+k_2) = g_2\big(\xi_1(t+k_1)\big) = g_2\Big(g_1\big(\varphi(t)\big)\Big) = g_2 \cdot g_1\big(\varphi(t)\big),$$

co było do okazania.

1.5.6 TWIERDZENIE. *Jeżeli* 1° *układ* $\langle \varphi_1, \varphi, \xi, g_1\rangle$ *zawiera opóźnienie o zero jednostek,* 2° *układ* $\langle \xi, \varphi, g_2\rangle$ *zawiera opóźnienie o k jednostek oraz* 3° *funkcje g i* ξ_1 *spełniają związki*

$$g(x, y) = g_1\big(x, g_2(y)\big), \quad \xi(\tau) = g\big(\varphi_1(\tau), \xi_1(\tau)\big), \quad \tau = 1, \ldots, k,$$

to układ $\langle \varphi_1, \xi_1, \xi, g\rangle$ *zawiera sprzężenie zwrotne opóźnione o k jednostek.*

Dowód.

$$\varphi(t+k) = g_2\big(\xi(t)\big), \quad \xi(t) = g_1\big(\varphi_1(t), \varphi(t)\big),$$

$$\xi(t+k) = g_1\big(\varphi_1(t+k), \varphi(t+k)\big) = g_1\Big(\varphi_1(t+k), g_2\big(\xi(t)\big)\Big) = g\big(\varphi_1(t+k), \xi(t)\big).$$

Wynik powyższy i definicja 1.5.3 dają natychmiast tezę.

---

[4] Funkcje $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k$ będziemy nazywali *warunkami początkowymi* dla sprzężenia zwrotnego opóźniającego o dokładnie k jednostek.

1.6. Algebra $(2+3)$-elementowa. Niech $m = 2$ i $n = 3$; wówczas aksjomaty 1.1.1-1.1.8 wyznaczają dwuelementową algebrę Boole'a([5]) (patrz paragraf 1.4). Aksjomaty 1.2.1-1.2.3 dołączone do tej algebry dają nową algebrę, którą krótko będziemy nazywali *algebrą* $(2+3)$-*elementową*.

W obrębie algebry $(2+3)$-elementowej przyjmiemy następujące oznaczenia:

1.6.1 $$0 \overset{\mathrm{df}}{=} \alpha_1, \quad 1 \overset{\mathrm{df}}{=} \alpha_2;$$

1.6.2 $$i \overset{\mathrm{df}}{=} \beta_1, \quad j \overset{\mathrm{df}}{=} \beta_2, \quad k \overset{\mathrm{df}}{=} \beta_3;$$

1.6.3 $$\bar{x} \overset{\mathrm{df}}{=} x:\alpha_1, \quad x+y \overset{\mathrm{df}}{=} x\cup y, \quad x\cdot y \overset{\mathrm{df}}{=} x\cap y;$$

1.6.4 $$a|b \overset{\mathrm{df}}{=} a:b.$$

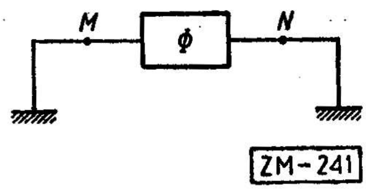
Zajmiemy się obecnie sieciami elektrycznymi — odpowiednikami funkcji naszej algebry.

Oznaczmy przez φ stan obwodu $M\Phi N$ (rys. 1):

a) jeżeli między punktami M i N prąd nie przepływa, to $\varphi = 0$;

b) jeżeli między punktami M i N prąd przepływa, to $\varphi = 1$.

Wejścia do naszego obwodu będą dwóch rodzajów, mianowicie: dwustanowe i trójstanowe. Algebraicznym odpowiednikiem wejść będą zmienne: wejść dwustanowych — zmienne dwuwartościowe, wejść trójstanowych — zmienne trójwartościowe. Wejścia do naszego układu będą stykami sterowanymi przez przekaźnik lub w jakikolwiek inny sposób; przez *wejście* będziemy rozumieli wszystkie kontakty sterowane przez jeden przekaźnik (wejścia dwustanowe będą sterowane przez przekaźnik dwupołożeniowy, wejścia trójstanowe przez przekaźnik trójpołożeniowy):



Rys. 1

1. Jeżeli przez uzwojenie przekaźnika dwupołożeniowego X nie przepływa prąd, to styk $x = 0$ oraz $\bar{x} = 1$.

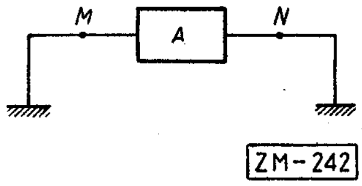
2. Jeżeli przez uzwojenie przekaźnika dwupołożeniowego X płynie prąd, to styk $x = 1$ oraz $\bar{x} = 0$.

3. Jeżeli przez uzwojenie przekaźnika trójpołożeniowego A nie przepływa prąd, to styk $a|i = 1$, $a|j = 0$ oraz $a|k = 0$.

([5]) Funkcja nazwana przez nas *funkcją porównawczą* w przypadku algebry Boole'a bywa zwykle nazywana *ilorazem symetrycznym*.

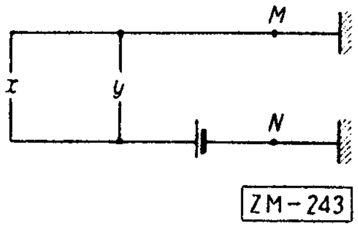
4. Jeżeli przez uzwojenie przekaźnika trójpołożeniowego A płynie prąd od punktu M do punktu N (rys. 2), to styk $a|i = 0$, $a|j = 1$ oraz $a|k = 0$.

5. Jeżeli przez uzwojenie przekaźnika trójpołożeniowego A płynie prąd od punktu N do M (rys. 2), to styk $a|i = 0$, $a|j = 0$ oraz $a|k = 1$.

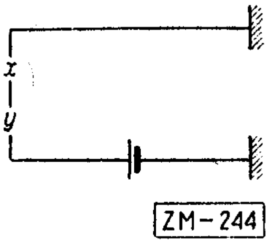


Rys. 2

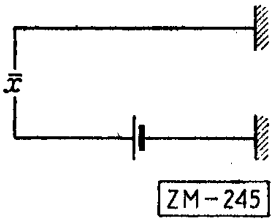
Realizacje podstawowych funkcji dwuelementowej algebry Boole'a przyjmiemy za Shannonem [17], Gawryłowem [2] i Moisilem [11], [12].



Rys. 3



Rys. 4



Rys. 5

Suma $x+y$ (rys. 3), iloczyn $x \cdot y$ (rys. 4), dopełnienie $\bar{x}$ (rys. 5).

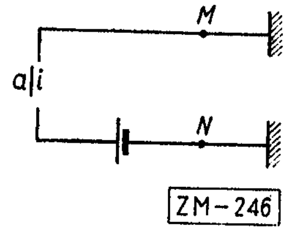
$+$	0	1
0	0	1
1	1	1

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

x	$\bar{x}$
0	1
1	0

Analogicznie do dopełnienia przyjmujemy realizacje dla trzech funkcji jednego argumentu trójwartościowego (rys. 6), na przykład

a	$a\|i$
i	1
j	0
k	0



Rys. 6

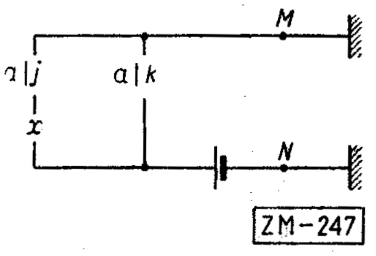
Rozpatrzmy teraz prosty przykład algebraicznego projektowania sieci. Przypuśćmy, że do pewnych celów potrzebna jest sieć o jednym wejściu dwustanowym i jednym wejściu trójstanowym oraz jednym wyjściu dwustanowym, spełniającym poniższą tabelkę zależności od stanów wejść.

a	x	f	a	x	f	a	x	f
i	0	0	j	0	0	k	0	1
i	1	0	j	1	1	k	1	1

Z tabelki tej otrzymujemy wartość stałych funkcji uniwersalnej 1.2.5:

1.6.5 $f = (a|j)x+(a|k)\bar{x}+(a|k)x =$

$= (a|j)x+(a|k)(\bar{x}+x) = (a|j)x+a|k.$



Rys. 7

Na mocy przyjętej realizacji możemy narysować schemat sieci poszukiwanej (rys. 7).

Przykłady zastosowania algebry $(2+3)$-elementowej rozpatrzymy w rozdziale 2.

1.7. Algebra (3+2)-elementowa. Jeśli $m = 3$ i $n = 2$, wówczas układ aksjomatów 1.1.1-1.1.8 oraz 1.2.1-1.2.3 określa algebrę, którą krótko będziemy nazywali *algebrą* $(3+2)$-*elementową*.

W algebrze $(3+2)$-elementowej przyjmiemy następujące oznaczenia:

1.7.1 $$i \overset{\mathrm{df}}{=} a_1, \quad j \overset{\mathrm{df}}{=} a_2, \quad k \overset{\mathrm{df}}{=} a_3;$$

1.7.2 $$0 \overset{\mathrm{df}}{=} \beta_1, \quad 1 \overset{\mathrm{df}}{=} \beta_2;$$

1.7.3 $$a+b \overset{\mathrm{df}}{=} a\cup b, \quad a\cdot b \overset{\mathrm{df}}{=} a\cap b.$$

Obecnie przyporządkujemy stanom obwodu elektrycznego elementy zbioru $\{i, j, k\}$, a następnie znajdziemy układy stykowe realizujące pewne podstawowe funkcje naszej algebry.

W automatyce kolejowej znajduje duże zastosowanie przekaźnik trójpołożeniowy (w przypadku prądu stałego zwany *przekaźnikiem polaryzowanym*, a w przypadku zmiennego zwany *przekaźnikiem indukcyjnym*). Przekaźnik polaryzowany ma trzy wyróżnione stany, mianowicie:

1. brak przepływu prądu,
2. przepływ prądu przez uzwojenie w jednym kierunku,
3. przepływ prądu przez uzwojenie w przeciwnym kierunku do stanu 2.

Analogiczne trzy stany ma przekaźnik indukcyjny prądu zmiennego:

1′. brak przepływu prądu,

2′. przepływ prądu zmiennego przez uzwojenie przekaźnika,

3′. przepływ prądu zmiennego przez uzwojenie przekaźnika przesunięty w fazie w stosunku do stanu 2′.

W naszych rozważaniach ograniczymy się do trójpołożeniowych przekaźników polaryzowanych (rys. 2); w przypadku przekaźników indukcyjnych wystarczy zmienić w schematach przez nas otrzymanych źródło prądu stałego na źródło prądu zmiennego.

Oznaczmy stany obwodu przekaźnika A przedstawionego na rysunku 2 przez φ.

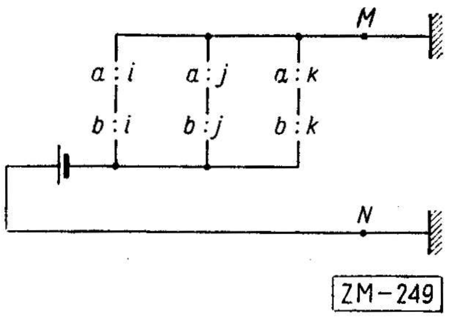
a) Jeżeli nie ma przepływu prądu między punktami M i N, to $\varphi = i$.
b) Jeżeli prąd przepływa od punktu M do punktu N, to $\varphi = j$.
c) Jeżeli prąd przepływa od punktu N do punktu M, to $\varphi = k$.

Przekaźnik A ma styki trzech rodzajów:

a) Styki zamknięte, gdy $\varphi = i$; oznaczymy je przez $a{:}i$.
b) Styki zamknięte, gdy $\varphi = j$; oznaczymy je przez $a{:}j$.
c) Styki zamknięte, gdy $\varphi = k$; oznaczymy je przez $a{:}k$.

Wartości funkcji porównawczej $a{:}b$ dla styków przekaźnika trójpołożeniowego są podane w poniższej tabliczce, a jej realizację przedstawia rysunek 8.

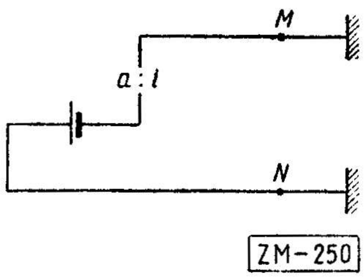
$b \backslash a$	i	j	k
i	k	i	i
j	i	k	i
k	i	i	k



Rys. 8

W szczególności realizację funkcji $a{:}i$ przedstawia rysunek 9, a tabliczka przyjmuje postać

a	i	j	k
$a{:}i$	k	i	i



Rys. 9

Analogicznie możemy zrealizować funkcję $a{:}j$ oraz $a{:}k$.

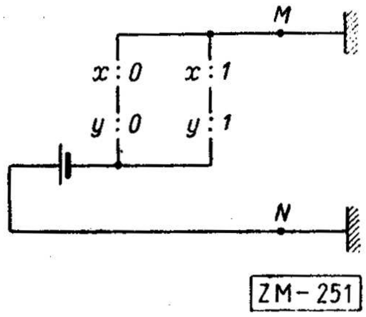
Przekaźnik dwupołożeniowy X ma dwa rodzaje styków:

1. Jeżeli przez uzwojenie przekaźnika X nie płynie prąd, to styk $x{:}0 = k$ oraz $x{:}1 = i$.

2. Jeżeli przez uzwojenie przekaźnika X płynie prąd, to styk $x{:}0 = i$ oraz $x{:}1 = k$.

Realizację funkcji porównawczej $x{:}y$ przedstawia rysunek 10, a jej wartości są podane w tabliczce obok tego rysunku.

x / y	0	1
0	k	i
1	i	k



Rys. 10

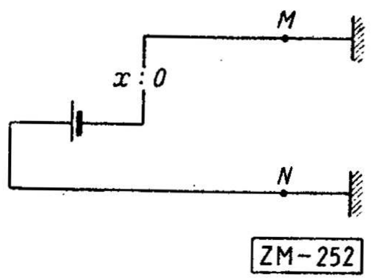
W szczególności dla funkcji $x:0$ oraz $x:1$ tabliczka przyjmuje odpowiednio postaci

x	$x:0$
0	k
1	i

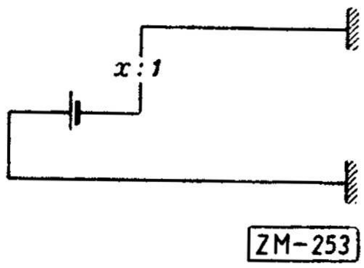
oraz

x	$x:1$
0	i
1	k

Realizacje tych funkcji przedstawiają rysunki 11 i 12.



Rys. 11



Rys. 12

1.7.4 TWIERDZENIE O ROZKŁADZIE FUNKCJI. *Dowolną funkcję f o wartościach ze zbioru $\{i, j, k\}$ możemy przedstawić w postaci*

1.7.5
$$f = R(f)+jJ(f),$$

gdzie

$$R(f) = \begin{cases} f, & \text{gdy } f \text{ przyjmuje wartość } i \text{ lub } k, \\ i, & \text{gdy } f \text{ przyjmuje wartość } j, \end{cases}$$

$$J(f) = \begin{cases} k, & \text{gdy } f \text{ przyjmuje wartość } j, \\ i, & \text{gdy } f \text{ przyjmuje wartość } k \text{ lub } i, \end{cases}$$

przy czym $R(f)\cdot J(f) = i$.

Dowód. Najprostszym sposobem takiego rozkładu jest przedstawienie

1.7.6 $$R(f) = f:k$$

oraz

1.7.7 $$J(f) = f:j,$$

przy czym spełniony jest warunek

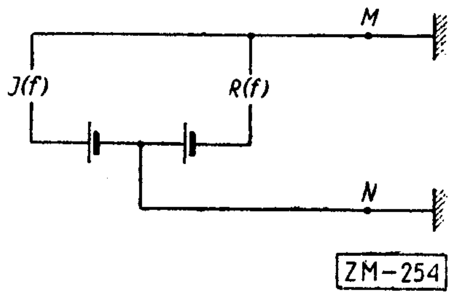
$$R(f)\cdot J(f) = (f:k)\cdot(f:j) = i, \quad \text{c. b. d. o.}$$

Wyrażenia 1.7.6 i 1.7.7 możemy, korzystając z dowiedzionych twierdzeń, rozłożyć na sumy i iloczyny identyfikacji między zmiennymi a elementami odpowiednich zbiorów, te zaś możemy realizować za pomocą połączeń równoległych i szeregowych.

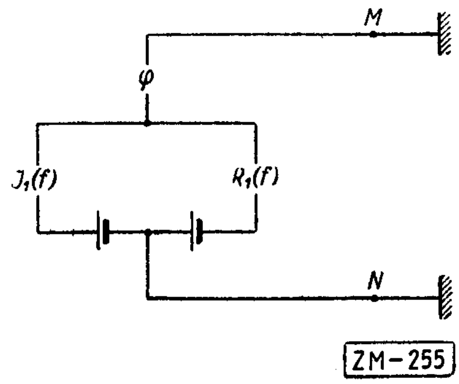
Ogólnie, funkcje postaci 1.7.5 można realizować przez schemat jak na rysunku 13.

W przypadku gdy

1.7.8 $R(f) = \varphi\cdot R_1(f)$, 1.7.9 $J(f) = \varphi\cdot J_1(f)$,



Rys. 13



Rys. 14

przy czym

$$R_1(f),\ J_1(f),\ \varphi\in\{i, k\},$$

wówczas funkcję f możemy przedstawić w postaci

1.7.10 $$f = \varphi(R_1(f)+jJ_1(f))$$

oraz zrealizować schematem jak na rysunku 14.

Rozpatrzmy teraz prosty przykład algebraicznego projektowania sieci. Przypuśćmy, że do pewnych celów potrzebna jest sieć o jednym wejściu dwustanowym, jednym wejściu trójstanowym i jednym wyjściu trójstanowym, spełniającym poniższą zależność od stanów wejść:

a	x	f	a	x	f	a	x	f
i	0	j	j	0	i	k	0	k
i	1	i	j	1	j	k	1	k

Z tabelki tej otrzymujemy wartości stałych funkcji uniwersalnej 1.2.5:

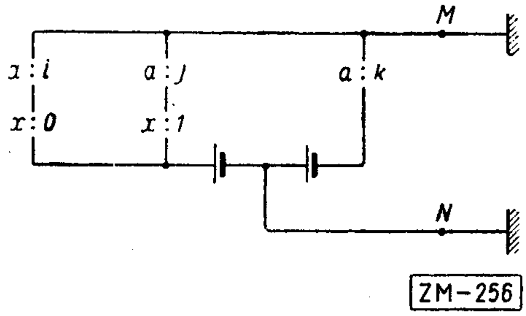
1.7.11 $$f = j(a{:}i)(x{:}0)+j(a{:}j)(x{:}1)+(a{:}k)(x{:}0)+(a{:}k)(x{:}1) =$$
$$= (a{:}k)(x{:}0+x{:}1)+j[(a{:}i)(x{:}0)+(a{:}j)(x{:}1)] =$$
$$= a{:}k+j[(a{:}i)(x{:}0)+(a{:}j)(x{:}1)],$$

1.7.12 $$R(f) = a{:}k,$$

1.7.13 $$J(f) = (a{:}i)(x{:}0)+ +(a{:}j)(x{:}1).$$

Na mocy przyjętej realizacji możemy narysować schemat poszukiwanej sieci (rys. 15).

Przykłady zastosowań algebry $(3+2)$-elementowej rozpatrzymy w rozdziale 2.



Rys. 15

2. Zastosowania

2.0. Uwagi wstępne. Rozważania przeprowadzone w rozdziale 1 (paragrafy 1.6 i 1.7) pozwalają na projektowanie układów, które mają jednocześnie dwa rodzaje wejść (dwustanowe i trójstanowe) oraz jedno wyjście, które może być albo dwustanowe, albo trójstanowe. Przykłady takich układów rozpatrywano w rozdziale 1.

W praktyce interesują nas przeważnie układy typu 1.5.3 i 1.5.4 zawierające sprzężenia zwrotne. Do tego, żeby móc zaprojektować takie układy należy:

a) zaprojektować układy nie zawierające opóźnień (patrz 1.6 i 1.7),

b) wypisać związki typu 1.5.3 i 1.5.4.

Postępujemy w następujący sposób:

1° Zastanawiamy się nad tym, jakie warunki ma spełniać nasz układ, inaczej mówiąc, czego żądamy od naszego układu.

2° Zastanawiamy się nad tym, jakie sprzężenia zwrotne są konieczne w naszym układzie ze względu na żądania 1°[6].

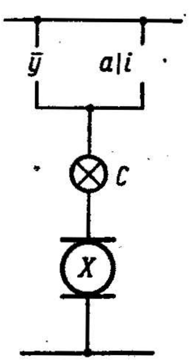
([6]) Gr. C. Moisil [12] podał metodę optymizacji ilości elementów pośrednich wygodną w praktyce; wynik ten był również publikowany w Zastosowaniach Matematyki IV. 1.

3° Wypisujemy związki rekursywne opisujące sprzężenia zwrotne występujące w 2°.

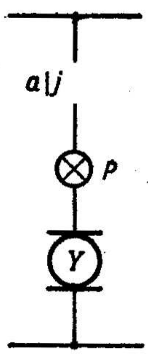
4° Projektujemy układ sztucznie rozcięty o ustalonej w 1° ilości wejść plus ilość sprzężeń zwrotnych ustalonych w 2°. Następnie rozważamy wszystkie możliwe kombinacje stanów wejść i odpowiadające im stany wyjść (najwygodniej w tym celu ułożyć tabelki zależności).

TABLICA 2.1.1

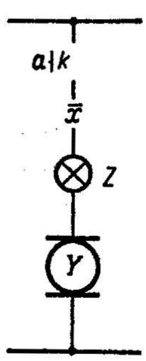
Obwód światła czerwonego	Obwód światła pomarańczowego	Obwód światła zielonego	Obwód rozkazowy
a y | c i 0 | 1 i 1 | 1 j 0 | 1 j 1 | 0 k 0 | 1 k 1 | 0	a x | p i 0 | 0 i 1 | 0 j 0 | 1 j 1 | 1 k 0 | 0 k 1 | 0	a x | z i 0 | 0 i 1 | 0 j 0 | 0 j 1 | 0 k 0 | 1 k 1 | 0	a x y | r i 0 0 | i i 0 1 | i i 1 0 | j i 1 1 | j j 0 0 | i j 0 1 | k j 1 0 | j j 1 1 | j k 0 0 | i k 0 1 | k k 1 0 | j k 1 1 | j
$c = (a\|i)\bar{y}+(a\|i)y+ +(a\|j)\bar{y}+ +(a\|k)\bar{y} = = a\|i+\bar{y}$	$p = (a\|j)\bar{x}+(a\|j)x = a\|j$	$z = (a\|k)\bar{x}$	$r = j(a:i)(x:1)+ +(a:j)(x:0)(y:1)+ +j(a:j)(x:1)+ +(a:k)(x:0)(y:1)+ +j(a:k)(x:1) = = j(x:1)+(a:i)'(y:1)(x:0)$



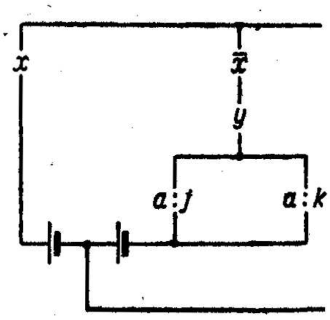
ZM-258



ZM-259



ZM-260



ZM-261

5° Korzystając ze związków otrzymanych według 3° i 4° otrzymujemy schemat ideowy interesującego nas urządzenia.

W rozdziale 2.1, na przykładzie zaczerpniętym z automatyki kolejowej ([7]), pokażemy, jak się stosuje w praktyce teorię poprzednio wyłożoną. Przykład ten różni się od stosowanych na kolejach urządzeń tym, że odcinek torowy nie jest podzielony na dwa odcinki izolowane, i tym samym układ ten zawiera o jeden przekaźnik mniej niż w rzeczywistości. W istniejących urządzeniach kolejowych stosuje się dwa odcinki izolowane dla większego bezpieczeństwa ruchu.

Przykład rozpatrywany w rozdziale 2.2 pokazuje, jak łatwo można wykonywać działania arytmetyczne na liczbach rozwiniętych przy podstawie -2, korzystając z działań algebr $(2+3)$-elementowych i $(3+2)$-elementowych.

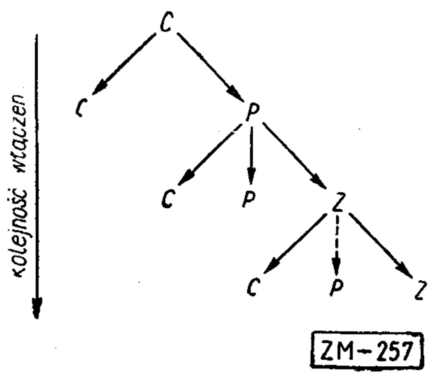
2.1. Trójstawna kolejowa blokada samoczynna. Przystępując do syntezy układu blokady trójstawnej przyjmiemy następujące założenia:

1) Szyny są podzielone na odcinki izolowane o długości kilkuset metrów.

2) Na początku każdego odcinka znajduje się semafor, który przyporządkowujemy temu odcinkowi.

3) Semafor daje sygnały: a) sygnał „światło czerwone" — przyporządkowany odcinek zajęty; b) sygnał „światło pomarańczowe" — przyporządkowany odcinek wolny, a następny odcinek zajęty; c) sygnał „światło zielone" — co najmniej dwa kolejne odcinki wolne.

4) Sterowanie sygnałami następuje samoczynnie pod wpływem ruchu pociągów (przyjmujemy tu, że konstrukcja układu powinna zapewniać możliwie duże bezpieczeństwo w przypadku uszkodzenia).



Rys. 16. C — światło czerwone; P — światło pomarańczowe; Z — światło zielone; — kolejność włączenia przy prawidłowym działaniu układu i w razie uszkodzenia; ... kolejność włączenia zachodząca tylko w razie uszkodzenia

Urządzenie sterujące semaforem na odcinku n otrzymuje następujące rozkazy z urządzenia sterującego semaforem na odcinku $n+1$:

i — zapalić światło czerwone,

j — zapalić światło pomarańczowe,

k — zapalić światło zielone.

Możliwość kolejnych włączeń najlepiej charakteryzuje drzewko na rysunku 16.

([7]) W oryginale pracy jest jeszcze jeden przykład z automatyki kolejowej. Za zgodą Autora pomijamy go ze względu na brak miejsca (*Redakcja*).

Urządzenie sterujące semaforem n-tego odcinka ma następujące wejścia:

$a(t)$ — styki przekaźnika obwodu torowego n-tego odcinka, sygnalizujące w chwili t stany tego odcinka w chwili $t-1$,

$x(t)$ — styki przekaźnika kontrolnego obwodu światła czerwonego, sygnalizującego w chwili t stan obwodu w chwili $t-1$,

$y(t)$ — styki przekaźnika kontrolnego obwodu światła pomarańczowego i światła zielonego, sygnalizującego w chwili t stany obwodów w chwili $t-1$.

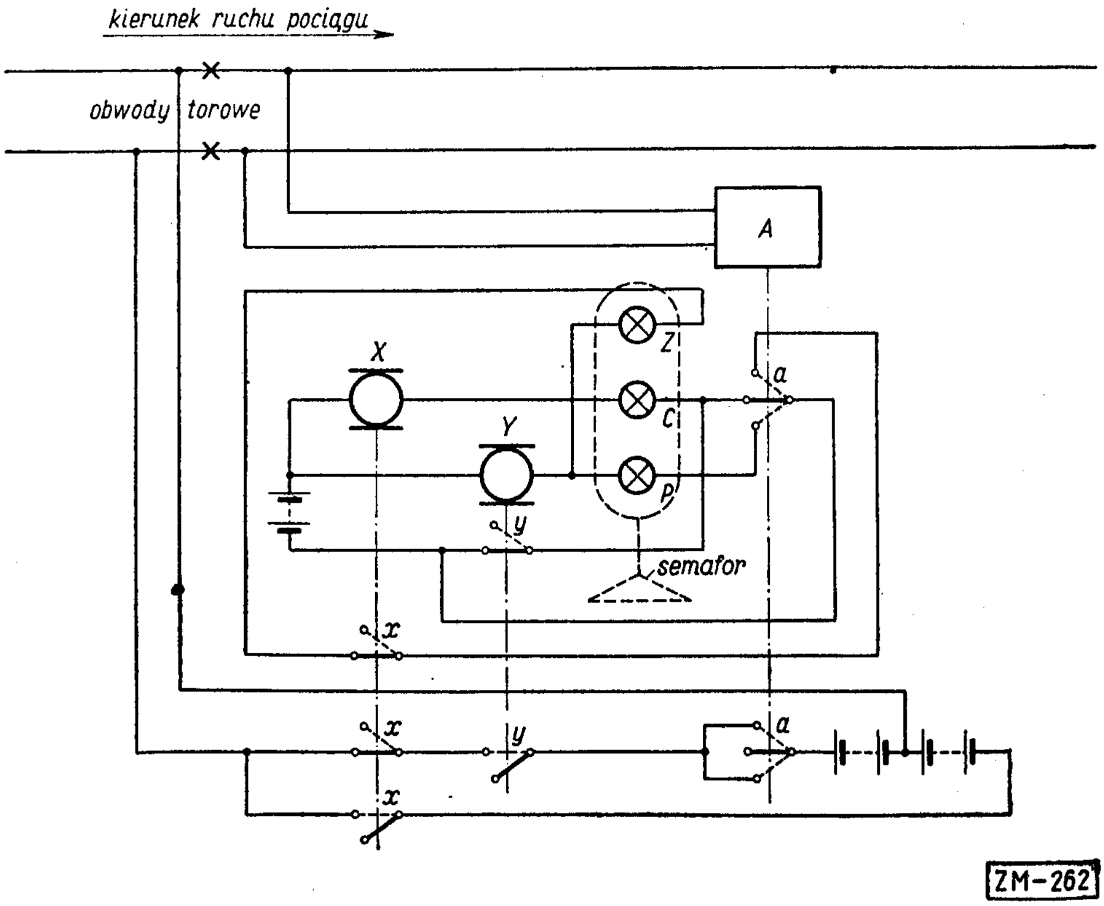
Urządzenie sterujące semaforem n-tego odcinka ma następujące wyjścia:

$c(t)$ — żarówka sygnału „światło czerwone”,

$p(t)$ — żarówka sygnału „światło pomarańczowe”,

$z(t)$ — żarówka sygnału „światło zielone”,

$r(t)$ — wyjście rozkazowe urządzenia sterującego semaforem n-tego



Rys. 17. A — przekaźnik torowy trójpołożeniowy; X — przekaźnik kontrolny obwodu światła zielonego i pomarańczowego; Y — przekaźnik kontrolny obwodu światła czerwonego

odcinka, dające rozkazy względne dla przekaźnika torowego odcinka $n-1$.

Od razu widać związki zachodzące między wyjściami a wejściami:

$$x(t) = c(t-1), \qquad y(t) = p(t-1)+z(t-1).$$

Korzystając z tych związków i z rysunku 16 układamy tabliczki zależności wyjść od wejść; następnie na podstawie tabliczek wstawiamy parametry do funkcji uniwersalnej odpowiedniej ilości zmiennych i upraszczamy wzory; wreszcie rysujemy schemat, który tę funkcję realizuje. Całość tych operacji ujmujemy w tablicę 2.1.1. Schemat urządzenia podajemy na rysunku 17.

2.2. Szeregowy arytmometr negatywno-binarny maszyny automatycznie liczącej. Z. Pawlak i A. Wakulicz podali nową koncepcję arytmometru szeregowego maszyny automatycznie liczącej. Koncepcję swoją oparli oni na możliwości rozwinięcia liczb wymiernych przy podstawie ujemnej, w szczególności przy podstawie -2. Zasadniczą korzyścią płynącą z takich rozwinięć jest wspólne traktowanie liczb dodatnich i ujemnych, przy czym operacje sumy i różnicy zostają zastąpione przez operację sumy.

Liczby rozwinięte przy podstawie -2 napiszemy w postaci macierzy o jednej kolumnie i odpowiedniej ilości wierszy, tak że cyfra będąca współczynnikiem najmniejszej potęgi -2 będzie napisana w pierwszym wierszu, a cyfry odpowiadające wyższym potęgom -2 będą ustawione w następnych wierszach. Weźmy obecnie dwie takie macierze zero-jedynkowe i poszukajmy, na podstawie teorii algebr $2+3$ i $3+2$, algorytmu jednego z działań, np. dodawania liczb s-cyfrowych przy podstawie -2.

Niech

$$R_1 = \begin{bmatrix} x_1^1 \\ x_1^2 \\ \vdots \\ x_1^s \end{bmatrix}, \quad R_2 = \begin{bmatrix} x_2^1 \\ x_2^2 \\ \vdots \\ x_2^s \end{bmatrix}, \quad x_q^p \in \{0, 1\}, \quad p = 1, 2, \ldots, s, \quad q = 1, 2,$$

będą dwiema liczbami wymiernymi s-cyfrowymi rozwiniętymi przy podstawie -2. Będziemy szukali liczby R, która jest sumą liczb R_1+R_2.

Wprowadźmy oznaczenia

y^l jest l-tą cyfrą wyniku $(y^l \in \{0, 1\})$,

$$l = 1, 2, \ldots, s,$$

z^l jest l-tą cyfrą przeniesienia $(z^l \in \{i, j, k\})$, przy czym

przeniesieniu 0 przyporządkujemy i,
przeniesieniu -1 przyporządkujemy j,
przeniesieniu $+1$ przyporządkujemy k.

Układamy tabelkę

z^{l-1}	x_1^l	x_2^l	y^l	z^l	z^{l-1}	x_1^l	x_2^l	y^l	z^l	z^{l-1}	x_1^l	x_2^l	y^l	z^l
i	0	0	0	i	j	0	0	1	k	k	0	0	1	i
i	0	1	1	i	j	0	1	0	i	k	0	1	0	j
i	1	0	1	i	j	1	0	0	i	k	1	0	0	j
i	1	1	0	j	j	1	1	1	i	k	1	1	1	j

Wstawiamy parametry do funkcji uniwersalnych

$$y^l = (z^{l-1}|i)(x_1^l \dot{-} x_2^l)+(z^{l-1}|j)(x_1^l \div x_2^l)+(z^{l-1}|k)(x_1^l \div x_2^l) =$$
$$= (z^{l-1}|i)(x_1^l \dot{-} x_2^l)+(z^{l-1}|i)(x_1^l \dot{-} x_2^l) = (z^{l-1}|i) \div (x_1^l \dot{-} x_2^l),$$

gdzie

$$x_1 \dot{-} x_{2df}\; x_1 \cdot \bar{x}_2 + \bar{x}_1 \cdot x_2,$$
$$x_1 \div x_{2df}\; \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 + x_1 \cdot x_2,$$

$$z^l = j[(z^{l-1}:i)(x_1^l:1)(x_2^l:0)+(z^{l-1}:k)(x_1^l:1+x_2^l:1)]+(z^{l-1}:j)(x_1^l:0)(x_2^l:0).$$

Po uproszczeniu znajdujemy ostatecznie

$$y^l = (z^{l-1}|i) \div (x_1^l \dot{-} x_2^l),$$

oraz

$$z^l = (z^{l-1}:j)(x_1^l|0)(x_2^l|0)+j[(z^{l-1}:i)(x_1^l:0)(x_2^l:1)+(z^{l-1}:k)(x_1^l:1+x_2^l:1)].$$

Wyrażenia y^l są kolejnymi cyframi wyniku dodawania i arytmometr powinien realizować działania przez nie wskazane.

Prace cytowane

[1] G. Birkhoff, *Lattice Theory*, New York 1948.

[2] А. М. Гаврилов, *Теория релейно-контактных схем*, Москва-Ленинград 1950.

[3] H. Greniewski, *Functors of the Propositional Calculus*, VI Zjazd Matematyków Polskich — Warszawa 20-23. IX. 1948, str. 78-86.

[4] — *Arithmetics of natural numbers as part of bi-valued propositional calculus*, Colloquium Mathematicum (1951), str. 291-297.

[5] H. Greniewski *Elementy logiki formalnej*, Warszawa 1955.

[6] H. Greniewski, K. Bochenek, R. Marczyński, *Application of bi-element Boolean algebra to electronic circuits*, Studia Logica 2 (1955), str. 7-75.

[7] M. Greniewski, *Intrebuintaera logiceler trivalente in teoria mecanismelor automate*, cz. I, Comunicarile Academiei R. P. R. 4 (1956), str. 225-229.

[8] K. Kuratowski i A. Mostowski, *Teoria mnogości*, Warszawa-Wrocław 1952.

[9] J. Łukasiewicz, *Uwagi filozoficzne o wielowartościowych systemach rachunków zdań*, Sprawozdania z posiedzeń Towarzystwa Naukowego Warszawskiego, Wydział III, t. 23 (1930), str. 51-77.

[10] Gr. C. Moisil, *Notes sur les Logiques non-Chryzippiennes*, Annales Scientifiques de l'Université de Jassy, Prémière section (1941), str. 85-98.

[11] — *Teoria algebraica a functionarii schemelor cu contactede relle in mai multi tipi*, Studii si cercetari matematice 4, nr 1-2 (1955), str. 7-53.

[12] — *Contributii la teoria algebrica a mecanismelor automate*, Academia R. P. R. Buletin Stiintific, t. VII, nr 2 (1955), str. 183-230.

[13] A. Mostowski, *Logika matematyczna*, Warszawa-Wrocław 1948.

[14] E. Page, *Digital computer switching circuits*, Electronics 7 (1948), str. 110-118.

[15] Z. Pawlak i A. Wakulicz, *Use of expansions with a negative basis in the arithmometer of a digital computer*, Bull. Ac. Pol. Sc. III, vol. V, No 3, 1957.

[16] E. Post, *Introduction to a general theory of elementary propositions*, American Journal of Mathematic 43 (1921), str. 163-185.

[17] C. Shannon, *A symbolic analysis of relay and switching circuits*, Trans. of the American Institute of Electr. Engineers (1938), str. 713-722.

[18] В.В. Шестаков, *Алгебра релейных схем* (wynik nie publikowany, rozprawa kandydacka).

[19] — *Алгебра двухполюстных схет, построенных исключительно из двухполюстников (Алгебра A-схем)*, Автоматика и механика nr. 2 (1941), str. 15-24.

[20] J. Siwiński, *Synteza i analiza schematów przekaźnikowo-stykowych w zastosowaniu do automatyzacji niektórych urządzeń górniczych* (praca kandydacka, Politechnika Śląska 1954).

[21] R. E. Staehler, *An application of boolean algebra to switching circuit design*, The Bell System Technical Journal, Vol. 31, nr 2 (1952), str. 280-295.

Praca wpłynęła 10. 5. 57

М. ГРЕНЕВСКИЙ (Варшава)

$(m+n)$-ЕЛЕМЕНТНЫЕ АЛГЕБРЫ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ К РЕЛЕЙНО-КОНТАКТНЫМ СИСТЕМАМ

РЕЗЮМЕ

В главе 1 излагает автор теорию универсальных функций осуществляющих отображения на множество состоящее из m элементов картезианского произведения p-ой картезианской степени множества A на q-ую картезианскую степень множества B (множество B содержит n элементов).

Подставляя соответствующие значения на параметры универсальных функций, получаем каждое отображение. Далее автор исследует свойства универсальных функций и вводит алгебраические эквиваленты запаздываний и возвратных сопряжений.

В параграфах 1.6 и 1.7 автор занимается частными случаями рассмотренной в главе 1 алгебры, а именно исследует алгебру, для которой $m=2$ и $n=3$, и алгебру, дла которой $m=3$ и $n=2$. Кроме того автор обсуждает приложения к релейно-контактным системам.

В главе 2 автор обсуждает два примера приложений алгебр, рассматриваемых в главе 1. Один из примеров взят из железнодорожной автоматики, второй из теории арифмометра счетной машины, считающей автоматически на числах в двойной системе.

M. GRENIEWSKI (Warszawa)

$(m+n)$-*ELEMENT ALGEBRAS AND THEIR APPLICATIONS TO RELAY-CONTACT SYSTEMS*

SUMMARY

In Chapter 1 the author develops a theory of universal functions realizing the mappings upon an m-element set A of the Cartesian product of the p-th Cartesian power of a set A and the q-th Cartesian power of a set B (the set B contains n elements). Substituting suitable values for the parameters of the universal functions we obtain each of the mappings. The author then investigates the properties of universal functions and introduces the algebraic equivalents of delay and feed-back.

In sections 1.6 and 1.7 the author deals with the particular cases of the algebra discussed in Chapter 1, namely he investigates the algebra in which $m = 2$ and $n = 3$ and the algebra in which $m = 3$ and $n = 2$. Moreover, he discusses the applications of those algebras to relay-contact systems.

In Chapter 2 the author discusses two examples of the application of the algebras dealt with in Chapter 1: one of those examples is taken from railway automatics and the other from the theory of the arithmometer of a digital computor based on expansions of numbers with the base -2.