S. DROBOT (Wrocław)

O ANALIZIE WYMIAROWEJ

I. Wstęp

Analiza wymiarowa, zwana czasem teorią podobieństwa,* jest metodą używaną w różnych zagadnieniach fizyki, techniki i przyrodoznawstwa. Metoda ta operuje *wymiarami* wielkości występujących w zagadnieniu i pozwala, nieraz zupełnie elementarnym rachunkiem, uzyskiwać nieoczekiwanie mocne wyniki. Dla ilustracji rozpatrzmy następujący przykład:

Silnik o mocy N napędza mieszarkę, której łopatki o średnicy D obracają się z prędkością kątową F w cieczy o współczynniku lepkości H. Jak zależy prędkość kątowa F od wielkości N, D i H?

Za pomocą analizy wymiarowej rozwiązujemy to zagadnienie w następujący sposób. Obieramy pewien *układ jednostek*, na przykład: centymetr, gram, sekunda, (CGS), i wypisujemy w tym układzie *wymiary* wielkości F,N,D,H:

$$[F]=[\mathrm{sek}^{-1}],\quad [N]=[\mathrm{cm}^2\mathrm{g\ sek}^{-3}],\quad [D]=[\mathrm{cm}],\quad [H]=[\mathrm{cm}^{-1}\mathrm{g\ sek}^{-1}].$$

Eliminując z tych równości wymiary [cm], [g], [sek], otrzymujemy

$$[F]=\left[\sqrt{\frac{N}{HD^3}}\right].$$

Wielkości po obu stronach tej równości mają ten sam wymiar, więc mogą różnić się tylko stałym współczynnikiem liczbowym, oznaczmy go φ. A zatem

$$F=\varphi\sqrt{\frac{N}{HD^3}}.$$

Ten bardzo prosty rachunek daje niemal gotowy wzór, ale pomija różne rozważania o przebiegu samego zjawiska i związane z tymi rozważaniami kłopoty matematyczne. Rachunek ten nasuwa jednak różne wątpliwości. Przede wszystkim można i należy zapytać, jakie jest jego uzasadnienie. W szczególności, czym są takie wielkości, jak np. 3 cm lub 2 sek lub ich wymiary, [cm], [sek]? Czy są to zwykłe liczby, rzeczywiste lub zespolone, czy nie? Jeżeli są to zwykłe liczby, to ile jest np. 3 cm+2 sek? Jeżeli nie są to zwykłe liczby, to czym są te pojęcia? Możemy dalej zapytać, co jest dla praktyki bardzo ważne, czy wyprowadzony w ten sposób wzór na prędkość kątową jest „dobry", co to znaczy, że jest „dobry", i jak wyznaczyć współczynnik liczbowy φ. Można poza tym postawić jeszcze wiele innych pytań.

Analiza wymiarowa jest bardzo rozpowszechniona, zwłaszcza wśród fizyków i techników. Jest wiele książek i prac, w których można znaleźć liczne ciekawe zastosowania tej metody do różnych konkretnych zagadnień. Niektóre z tych książek i prac cytuję w tym artykule, nie roszcząc sobie bynajmniej pretensji do kompletności. Początki analizy wymiarowej można znaleźć jeszcze u Newtona [14]. Zwróciła ona na siebie większą uwagę w drugiej połowie XIX wieku, od czasu gdy O. Reynolds [16], [17] zastosował ją z powodzeniem do różnych zagadnień hydromechaniki, wobec których inne metody matematyczne były bezsilne. Dzisiaj analiza wymiarowa ma bardzo wiele zastosowań, chociaż znane są niektóre trudności związane z tą metodą, prowadzące nieraz do paradoksów. Omówię później te trudności.

Główna przyczyna tych trudności polega, moim zdaniem, na tym, że teoria analizy wymiarowej nie jest dostatecznie jasno i prosto sformułowana. Niektórzy autorzy, np. P. Bridgman [2], H. Langhaar [13], L. Sjedow [19], uważają, że wielkości wymiarowe są zwykłymi liczbami, rzeczywistymi lub zespolonymi i faktycznie nie wprowadzają do samej teorii pojęcia wielkości wymiarowej lub jej wymiaru, chociaż o tych właśnie pojęciach wypowiadają twierdzenia. Z tego powodu trudno jest zbadać, na czym opierają się te twierdzenia, zresztą nie zawsze dość jasno sformułowane [1]). Zrozumienie podstaw analizy wymiarowej utrudnia również ta okoliczność, że przeważnie używa się w jej teorii takich środków matematycznych, jak np. równania różniczkowe, teoria grup Liego, które są obce zupełnie elementarnym rachunkom algebraicznym używanym w praktycznych zastosowaniach analizy wy-

[1]) Por. [2] i [11].

miarowej. Dowód algebraiczny zasadniczego twierdzenia analizy wymiarowej podał w 1943 r. Czebotariew [21], ale dowód ten wymaga osobnych pojęć. Wydaje mi się, że jest to jedna z przyczyn, dla których poglądy na wartość analizy wymiarowej są bardzo różnorodne, od ironicznych do entuzjastycznych.

Celem niniejszego artykułu jest przedstawić prostymi środkami algebraicznymi teorię analizy wymiarowej. Punktem wyjścia naszych rozważań jest założenie, że wielkości wymiarowe nie są zwykłymi liczbami. Inżynierowie i fizycy operują swobodnie różnymi wielkościami, które nie są zwykłymi liczbami. Na przykład takimi wielkościami są *wektory*. Wielkości, które będziemy rozpatrywać, są pod wieloma względami zupełnie podobne do wektorów. Można nawet powiedzieć, w pewnym sensie, który sprecyzujemy później, że są to wprost wektory. Na razie, dla wyjaśnienia pewnych kwestii metodologicznych zatrzymajmy się na chwilę na pojęciu wektora.

Mówi się czasem, że wektor jest taką wielkością, do której określenia potrzeba liczby i kierunku. Jest to być może poglądowa ilustracja pojęcia wektora, ale nie może być uważane za jego definicję. Możemy bowiem zapytać, co to jest „kierunek", a po uzyskaniu odpowiedzi na to stawiać dalsze pytania. W rozważaniach naszych użyjemy metody aksjomatycznej. Pojęcie wielkości wymiarowej zdefiniujemy w ten sposób, że wypiszemy aksjomaty, które ono spełnia. Aksjomaty te są pewnym wyabstrahowanym opisem tych rzeczywistych przedmiotów, które dadzą się w różnych teoriach przedstawić za pomocą wielkości wymiarowych. W definicjach i dowodach należy się powoływać tylko na te postulaty lub twierdzenia poprzednio udowodnione na podstawie postulatów.

W rozdziale II przedstawiony jest schemat algebraiczny analizy wymiarowej, w rozdziale III przykłady jej zastosowań.

II. Schemat algebraiczny analizy wymiarowej

1. *Przestrzenią wymiarową* Π nazywamy zbiór elementów $A, B, C, \ldots$, które spełniają następujące postulaty:

1° *Jest określony iloczyn* AB *elementów* A *i* B, *który jest też elementem przestrzeni wymiarowej* Π *i ma następujące własności:*

(1) $$AB = BA,$$

(2) $$(AB)C = A(BC),$$

(3) *dla każdej pary elementów A i B istnieje w przestrzeni wymiarowej taki element X, że $AX=B$.*

2^0 *Jest określone potęgowanie A^a elementu A do wykładnika rzeczywistego a. Wynik potęgowania jest też elementem przestrzeni wymiarowej Π i ma następujące własności:*

(4) $$A^{a+b}=A^aA^b,$$

(5) $$(AB)^a=A^aB^a,$$

(6) $$(A^a)^b=A^{ab},$$

(7) $$A^1=A.$$

3^0 *Liczby dodatnie $\alpha, \beta, \gamma, \ldots,$ są również elementami przestrzeni Π.*

Elementami przestrzeni Π są np. takie wielkości jak 3 cm, 2 kG, 5 sek, 12 zł, 4 sztuki itp. W mechanice, na przykład, mnoży się 2 kG przez 3 m i wynik nazywa się pracą 6 kGm. Iloczyn $3\text{ m}\cdot 2\text{ m}=6\text{ m}^2$ oznacza pole, iloczyn $12\text{ zł}\cdot(4\text{ sztuki})^{-1}$ jest ceną itp.

Ograniczamy się do liczb dodatnich $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ z tego powodu, że gdybyśmy zaliczyli do przestrzeni wymiarowej Π również liczby ujemne i zero, to wtedy nie zawsze byłoby wykonalne dzielenie i potęgowanie. Na przykład nie byłyby określone takie wyrażenia jak $(0\text{ kG})^{-2}$ lub $(-3\text{ m})^{\sqrt{2}}$. Nie wprowadzamy również dodawania elementów A, B przestrzeni wymiarowej Π. O liczbach niedodatnich i dodawaniu powiemy jeszcze w ustępie 12 niniejszego rozdziału.

2. Na podstawie powyższych postulatów można udowodnić, iż istnieje dokładnie jeden taki element I, że $AI=A$ oraz że I równa się liczbie 1. Łatwy dowód tego twierdzenia pomijamy; można go znaleźć, w nieco innej postaci, w podręcznikach algebry [2]).

Sformułujemy teraz niektóre definicje i dalsze postulaty.

Elementy $A_1, \ldots, A_m$ przestrzeni Π nazywamy wymiarowo niezależnymi, jeżeli z równości

$$A_1^{a_1}\ldots A_m^{a_m}=\alpha,$$

gdzie α jest liczbą dodatnią, $a_1, \ldots, a_m$ liczbami rzeczywistymi, wynika, że

$$a_1=\ldots=a_m=0 \quad (\text{i } \alpha=1).$$

---

[2]) Por. np. [10].

Elementy $A, B, C, \ldots$, które nie są liczbami dodatnimi, nazywamy *wielkościami wymiarowymi*. Liczby (dodatnie) $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ nazywać będziemy także *wielkościami bezwymiarowymi*.

Na przykład, wielkości 3 cm² i 2 kg są wymiarowo niezależne, ponieważ z równości

$$(3 \text{ cm}^2)^{a_1} (2 \text{ kg})^{a_2} = a$$

wynika, że $a_1 = a_2 = 0$ i $a = 1$. Przykładem wielkości wymiarowo zależnych są 5 cm i 4 cm², ponieważ z równości

$$(5 \text{ cm})^{a_1} (4 \text{ cm}^2)^{a_2} = a$$

nie wynika wcale, że musi być $a_1 = a_2 = 0$, $a = 1$, bo może być np. $a_1 = -2$, $a_2 = 1$, $a = 4/25$. Łatwo sprawdzić, że każda wielkość bezwymiarowa (liczba) jest wymiarowo zależna od każdego elementu przestrzeni Π.

Mówimy, że *przestrzeń wymiarowa Π ma n jednostek, jeżeli istnieje w niej n elementów wymiarowo niezależnych, a nie istnieje $n+1$ elementów niezależnych. Każdy układ n wielkości $X_1, \ldots, X_n$ wymiarowo niezależnych nazywamy układem jednostek.* W dalszym ciągu będziemy zajmowali się tylko takimi przestrzeniami, które mają skończoną liczbę jednostek w układzie. Liczbę jednostek w układzie będziemy zawsze oznaczali literą n.

Na przykład, w mechanice rozpatruje się „absolutny" układ trzech jednostek: cm, g, sek. Technicy używają układu kG, m, sek. W elektrotechnice używa się układów o trzech, czterech lub pięciu jednostkach.

O roli układu jednostek jeszcze pomówimy osobno. Z definicji układu jednostek wynika, że wielkość bezwymiarowa nie może być jednostką, ponieważ jest wymiarowo zależna od każdej innej wielkości.

3. Z powyższych definicji wynika, że jeżeli $X_1, \ldots, X_n$ jest układem jednostek, to każdy element A przestrzeni wymiarowej można przedstawić jednoznacznie w postaci

$$A = aX_1^{a_1} \ldots X_n^{a_n}, \tag{8}$$

gdzie a jest wielkością bezwymiarową (liczbą), $a_1, \ldots, a_n$ zaś są liczbami rzeczywistymi.

Jeżeli $A_1, \dots, A_m$ wyrażają się w układzie jednostek $X_1, \dots, X_n$ wzorami

$$(9) \qquad A_1 = \alpha_1 X_1^{a_{11}} \dots X_n^{a_{n1}}, \quad \dots, \quad A_m = \alpha_m X_1^{a_{1m}} \dots X_n^{a_{nm}} \quad (m \leqslant n),$$

to na to, by $A_1, \dots, A_m$ były wymiarowo niezależne, potrzeba i wystarcza, żeby macierz

$$(10) \qquad \begin{pmatrix} a_{11} \dots a_{1m} \\ \dots\dots \\ a_{n1} \dots a_{nm} \end{pmatrix} \qquad (m \leqslant n)$$

była rzędu m, to znaczy, żeby choć jeden minor stopnia m był różny od zera, a minory stopnia $m+1$ były $=0$.

Na przykład, wielkości N, D, H występujące w zagadnieniu omówionym we Wstępie są wymiarowo niezależne. A mianowicie, przyjmując $X_1 = \mathrm{cm}$, $X_2 = \mathrm{g}$, $X_3 = \mathrm{sek}$, obliczamy, że wyznacznik

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2$$

jest różny od zera.

Jeżeli $X_1, \dots, X_n$ oraz $Y_1, \dots, Y_n$ są dwoma układami jednostek, to każda z jednostek $X_1, \dots, X_n$ wyraża się jednoznacznie w układzie $Y_1, \dots, Y_n$ wzorami

$$(11) \qquad X_1 = \xi_1 Y_1^{t_{11}} \dots Y_n^{t_{1n}}, \quad \dots, \quad X_n = \xi_n Y_1^{t_{n1}} \dots Y_n^{t_{nn}},$$

gdzie $\xi_1, \dots, \xi_n$ są wielkościami bezwymiarowymi, a $t_{11}, \dots, t_{nn}$ są liczbami rzeczywistymi, których wyznacznik $|t_{kl}|$ $(k, l = 1, \dots, n)$ jest różny od zera.

Podstawiając (11) do (8), otrzymujemy

$$(12) \qquad A = \alpha \xi_1^{a_1} \dots \xi_n^{a_n} Y_1^{t_{11}a_1 + \dots + t_{n1}a_n} \dots Y_n^{t_{1n}a_1 + \dots + t_{nn}a_n}.$$

Wzór (12) pokazuje, jak zmieniają się współczynnik bezwymiarowy α oraz wykładniki $a_1, \dots, a_n$ wielkości wymiarowej A przy przejściu od jednego układu jednostek do drugiego.

Łatwe dowody tych twierdzeń pomijamy; można je znaleźć, w nieco innej postaci, w podręcznikach algebry [3]).

[3]) Por. np. [10].

Na przykład, niech układem jednostek będzie kG, m, sek, to znaczy

$$X_1 = \mathrm{kG}, \quad X_2 = \mathrm{m}, \quad X_3 = \mathrm{sek}.$$

Przechodzimy do drugiego układu, „absolutnego", w którym

$$Y_1 = \mathrm{cm}, \quad Y_2 = \mathrm{g}, \quad Y_3 = \mathrm{sek}.$$

Wtedy

$$\xi_1 = 981000, \quad \xi_2 = 100, \quad \xi_3 = 1,$$

$$|t_{kl}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

Niech $A = 10$ koni mechanicznych. W układzie jednostek kG, m, sek jest

$$A = 750 \cdot 981000^1 \cdot 100^1 \cdot 1^{-1} \,\mathrm{cm}^2\,\mathrm{g}\,\mathrm{sek}^{-3} = 73525 \cdot 10^6 \,\mathrm{erg}\,\mathrm{sek}^{-1}.$$

4. Na podstawie wzoru (12) wprowadzimy nowe pojęcie, oparte na następujących uwagach: Zamiast przedstawiać wzorem (12) ten sam element A w innym układzie jednostek ustalamy układ jednostek $X_1, \ldots, X_n$ i we wzorze (12) zamiast $Y_1, \ldots, Y_n$ piszemy, odpowiednio, $X_1, \ldots, X_n$. Wtedy z lewej strony równości (12) nie można już napisać A, ponieważ otrzymujemy inny element niż A. Oznaczamy ten inny element symbolem $\Theta_x A$. A zatem

$$\Theta_x A = a\xi_1^{a_1} \ldots \xi_n^{a_n} X_1^{t_{11}a_1 + \ldots + t_{n1}a_n} \ldots X_n^{t_{1n}a_1 + \ldots + t_{nn}a_n}. \tag{13}$$

Wzór (13) przyporządkowuje wzajemnie jednoznacznie każdemu elementowi A, który w ustalonym układzie jednostek $X_1, \ldots, X_n$ wyraża się wzorem (8), inny element $\Theta_x A$, który w tym samym układzie jednostek $X_1, \ldots, X_n$ wyraża się wzorem (13). W ten sposób określiliśmy za pomocą liczb $\xi_1, \ldots, \xi_n$ oraz liczb rzeczywistych $t_{11}, \ldots, t_{nn}$ wzajemnie jednoznaczne przekształcenie Θ_x każdego elementu przestrzeni wymiarowej Π w inny element $\Theta_x A$ tejże przestrzeni. Znaczek x przy symbolu Θ_x umieściliśmy na razie dlatego, że przekształcenie tak określone zależeć może, *a priori*, od wyboru układu jednostek. Przekształcenie określone wzorem (13) nazywamy *przekształceniem wymiarowym*.

Bezpośrednim rachunkiem łatwo jest sprawdzić, że przekształcenie wymiarowe ΘA (znaczek x opuszczamy) ma następujące własności:

1⁰ *jest wzajemnie jednoznaczne*;

2⁰ *dla wszelkich dwóch elementów A i B jest* $\Theta(AB)=(\Theta A)(\Theta B)$;

3⁰ *dla każdej liczby rzeczywistej a jest* $\Theta(A^a)=(\Theta A)^a$;

4⁰ *dla każdej wielkości bezwymiarowej a jest* $\Theta a=a$.

Można udowodnić, że warunki 1⁰-4⁰ charakteryzują w zupełności przekształcenie wymiarowe Θ_x. To znaczy, że do każdego układu jednostek $X_1,\dots,X_n$ można dobrać takie liczby dodatnie $\xi_1,\dots,\xi_n$ i taki wyznacznik $|t_{kl}|$ różny od zera $(k,l=1,2,\dots n)$, że przekształcenie, które spełnia warunki 1⁰-4⁰, musi się wyrażać wzorem (13). Przekształcenie wymiarowe, opisane tylko przez warunki 1⁰-4⁰, charakteryzuje zatem również zmianę układu jednostek. W dalszym ciągu naszych rozważań będziemy korzystali tylko z własności 1⁰-4⁰ przekształcenia wymiarowego, a nie z jego wyraźnej postaci (13) i wobec tego opuszczamy w ogóle znaczek x przy symbolu Θ.

Przy sposobności zwróćmy uwagę na to, że nie istnieje takie przekształcenie wymiarowe, uniwersalne dla całej przestrzeni Π, które by każdemu elementowi A przyporządkowało ustaloną jego wielokrotność, np. $5A$. Przeczy temu już warunek 1⁰. Z uwagi tej skorzystamy później, w ustępie 8.

5. Wprowadzimy teraz podstawowe w analizie wymiarowej pojęcie *funkcji*. W matematyce funkcją nazywa się operację, która każdemu elementowi danego zbioru przyporządkowuje dokładnie jeden element innego zbioru. Jeżeli oba te zbiory są liczbami, to funkcja nazywa się *liczbową* (lub czasem liczbo-liczbową). Funkcje, których używamy w analizie wymiarowej, nie są, na ogół, funkcjami liczbowymi. A mianowicie funkcje te przyporządkowują elementom przestrzeni wymiarowej inne elementy tej samej przestrzeni wymiarowej, które mogą być liczbami lub wielkościami wymiarowymi. Funkcję, której argumentami są wielkości $Z_1,\dots,Z_s$, oznaczać będziemy symbolem $\Phi(Z_1,\dots,Z_s)$. Na funkcje rozpatrywane w analizie wymiarowej nałożymy dwa warunki, które wyrażają pewne ogólne zasady wyabstrahowane z doświadczenia. W następnym ustępie sformułujemy na razie tylko jeden warunek i udowodnimy na jego podstawie pewne twierdzenie. W ustępie 7 nałożymy na funkcje jeszcze drugi warunek.

6. Pierwszy warunek, który nakładamy na funkcje rozpatrywane w analizie wymiarowej, nazywamy *niezmienniczością wymiarową*. Warunek ten formułujemy w następujący sposób: *Dla każdego przekształcenia wymiarowego* Θ *(zdefiniowanego przez warunki* 1^0 - 4^0*) zachodzi tożsamość*

$$\Phi(\Theta Z_1, \ldots, \Theta Z_s) = \Theta\Phi(Z_1, \ldots, Z_s). \tag{14}$$

Innymi słowy, jeżeli do każdego z argumentów $Z_1, \ldots, Z_s$ stosujemy przekształcenie wymiarowe Θ, to wartość funkcji Φ zmienia się tak samo, jak gdybyśmy zastosowali to samo przekształcenie wymiarowe Θ do samej funkcji. Jak wiemy, przekształcenie wymiarowe Θ charakteryzuje zmianę układu jednostek. Warunek (14) w tej interpretacji oznacza co następuje: Wartość funkcji Φ zależy od wielkości $Z_1, \ldots, Z_s$; wielkości te mogą być wyrażone w różnych układach jednostek, np. $X_1, \ldots, X_n$, albo $Y_1, \ldots, Y_n$; wartość funkcji Φ można wyrazić w każdym z tych układów jednostek. Otóż warunek niezmienniczości wymiarowej wymaga, żeby *wartość funkcji* Φ była zawsze *tą samą wielkością*, chociaż wyrażoną w innym układzie jednostek. Zazwyczaj warunek ten wypowiada się, jeśli się już o nim mówi, niedokładnie w następujący sposób: *Kształt funkcji nie może zależeć od wyboru układu jednostek.* Albo jeszcze inaczej: Warunek niezmienniczości wymiarowej wymaga, żeby w teorii obiektywnych zjawisk posługiwać się tylko takimi funkcjami, które nie pozwalają na uprzywilejowanie pewnego układu jednostek. A więc na przykład, fizyka ma opisywać zjawiska fizyczne jednakowo w układzie „absolutnym" (CGS), jak w „technicznym" (kG, m, sek); prawa hydromechaniki nie mogą zależeć od tego, czy ciśnienie mierzymy w atmosferach, czy też w mm Hg; prawa przyrody nie zmieniają się od tego, że prędkość elektronów mierzymy w elektronowoltach, (które są jednostkami energii), a nie w cm/sek, lub że w życiu codziennym mierzymy np. drogę w godzinach, a nie w km. Warunek niezmienniczości wymiarowej można wprowadzić również do funkcji opisujących zjawiska inne niż fizyczne, np. do niektórych zagadnień statystycznych lub ekonomicznych i uzyskać interesujące wyniki[4]).

[4]) Por. [7].

Warunek niezmienniczości wymiarowej nie ogranicza w ogóle postaci zwykłych funkcji liczbowych. Jeżeli mianowicie $Z_1,\dots,Z_s$ oraz wartości funkcji Φ są liczbami, to na mocy własności 4° przekształcenia wymiarowego Θ warunek ten jest automatycznie spełniony przez każdą funkcję liczbową. Stąd wynika, że funkcje, które rozpatrujemy w analizie wymiarowej, są *uogólnieniem zwykłych funkcji liczbowych*. Jeżeli zaś nie wszystkie argumenty funkcji są bezwymiarowe, to warunek niezmienniczości wymiarowej ogranicza postać funkcji. Udowodnimy mianowicie twierdzenie następujące:

TWIERDZENIE 1. *Jeżeli w wymiarowo niezmienniczej funkcji* $\Phi(A_1,\dots,A_m)$ *argumenty* $A_1,\dots,A_m$ *są wymiarowo niezależne, to funkcja musi być postaci*

$$\Phi(A_1,\dots,A_m)=\varphi A_1^{f_1}\dots A_m^{f_m}, \tag{15}$$

gdzie wielkość bezwymiarowa φ *i wykładniki rzeczywiste* $f_1,\dots,f_m$ *nie zależą od* $A_1,\dots,A_m$.

Odwrotnie, każda funkcja postaci (15) *jest wymiarowo niezmiennicza, to znaczy spełnia warunek* (14).

Dowód. Ponieważ nie może być więcej niż n wielkości wymiarowo niezależnych, więc $m\leqslant n$. Rozpatrzmy dwa przypadki: gdy $m=n$ i gdy $m<n$.

W przypadku pierwszym, gdy $m=n$, obierzmy $A_1,\dots,A_m$ za układ jednostek. Na mocy wzoru (8) możemy napisać

$$\Phi(A_1,\dots,A_n)=\varphi(A_1,\dots,A_n)A_1^{f_1(A_1,\dots,A_n)}\dots A_n^{f_n(A_1,\dots,A_n)}, \tag{16}$$

gdzie liczby $\varphi,f_1,\dots,f_n$ mogą, *a priori*, zależeć od $A_1,\dots,A_n$. Aby udowodnić, że liczby te nie zależą od $A_1,\dots,A_n$, skorzystajmy z niezmienniczości wymiarowej. A mianowicie na podstawie (16) jest

$$\Phi(\Theta A_1,\dots,\Theta A_n)=\varphi(\Theta A_1,\dots,\Theta A_n)\Theta A_1^{f_1(\Theta A_1,\dots,\Theta A_n)}\dots \\ \dots\Theta A_n^{f_n(\Theta A_1,\dots,\Theta A_n)}. \tag{17}$$

Teraz na podstawie wzoru (16) obliczmy $\Theta\Phi(A_1,\dots,A_n)$. Na mocy własności 1°-4° przekształcenia wymiarowego Θ otrzymujemy

$$\Theta\Phi(A_1,\dots,A_n)=\varphi(A_1,\dots,A_n)\Theta A_1^{f_1(A_1,\dots,A_n)}\dots\Theta A_n^{f_n(A_1,\dots,A_n)}. \tag{18}$$

Z warunku wymiarowej niezmienniczości funkcji Φ wynika, że lewe strony równości (18) i (17) są równe. Muszą więc być równe ich prawe strony. Wielkości $A_1,\dots,A_n$ są z założenia wymiarowo niezależne, a więc także $\Theta A_1,\dots,\Theta A_n$ są wymiarowo niezależne, bo przekształcenie Θ jest wzajemnie jednoznaczne. Wobec tego muszą dla każdego przekształcenia Θ zachodzić tożsamości

$$\varphi(A_1,\dots,A_n)=\varphi(\Theta A_1,\dots,\Theta A_n),$$
$$f_1(A_1,\dots,A_n)=f_1(\Theta A_1,\dots,\Theta A_n),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$f_n(A_1,\dots,A_n)=f_n(\Theta A_1,\dots,\Theta A_n).$$

Tożsamości te oznaczają, że liczby $\varphi,f_1,\dots,f_n$ nie zależą od $A_1,\dots,A_n$.

Rozpatrzmy teraz drugi przypadek, gdy $m<n$. Uzupełnijmy niezależne wielkości $A_1,\dots,A_m$ do układu jednostek, dobierając pozostałych $n-m$ wielkości wymiarowych $X_{m+1},\dots,X_n$ dowolnie, byleby tworzyły wraz z $A_1,\dots,A_m$ układ jednostek. Na mocy udowodnionego przypadku pierwszego jest

$$\Phi(A_1,\dots,A_m)=\varphi A_1^{f_1}\dots A_m^{f_m}X_{m+1}^{f_{m+1}}\dots X_n^{f_n}, \tag{19}$$

gdzie liczby $\varphi,f_1,\dots,f_m,f_{m+1},\dots,f_n$ nie zależą od $A_1,\dots,A_m$. Aby udowodnić, że $f_{m+1}=\dots=f_n=0$, skorzystajmy znowu z warunku niezmienniczości wymiarowej. Dobierzmy mianowicie takie przekształcenie wymiarowe Θ, żeby

$$\Theta A_1=A_1,\quad\dots,\quad \Theta A_m=A_m;\qquad \Theta X_{m+1}=X_{m+1}^2,\quad\dots,\quad \Theta X_n=X_n^2.$$

Wtedy z (19) otrzymamy

$$\Phi(\Theta A_1,\dots,\Theta A_m)=\varphi A_1^{f_1}\dots A_m^{f_m}X_{m+1}^{f_{m+1}}\dots X_n^{f_n},$$
$$\Theta\Phi(A_1,\dots,A_m)=\varphi A_1^{f_1}\dots A_{1m}^{f_m}X_{m+1}^{2f_{m+1}}\dots X_n^{2f_n}.$$

Porównując, na mocy wymiarowej niezmienniczości, obie strony tych tożsamości, otrzymujemy

$$2f_{m+1}=f_{m+1},\qquad\dots,\qquad 2f_n=f_n,$$

skąd wynika, że $f_{m+1}=\dots=f_n=0$.

W ten sposób udowodniliśmy pierwszą część twierdzenia, że funkcja Φ musi być postaci (15). Drugą część twierdzenia, że każda funkcja postaci (15) jest wymiarowo niezmiennicza, sprawdzamy łatwo bezpośrednim rachunkiem, który tu dla krótkości pomijamy.

Twierdzenie 1 wyjaśnia, dlaczego funkcja, której argumentami są wymiarowo niezależne wielkości, musi być jednomianem (15). Twierdzenie to ma wiele zastosowań praktycznych. W przykładzie omówionym we Wstępie korzystaliśmy właśnie z twierdzenia 1.

7. Aby uogólnić twierdzenie 1 na przypadek, gdy nie wszystkie argumenty $Z_1,\dots,Z_s$ funkcji $\Phi(Z_1,\dots,Z_s)$ są wymiarowo niezależne, nałożymy na funkcje rozpatrywane w analizie wymiarowej drugi warunek, który nazywamy *jednorodnością wymiarową*. Warunek ten formułujemy w następujący sposób: *Dla wszelkich bezwymiarowych wielkości $\zeta_1,\dots,\zeta_s$ istnieje taka wielkość bezwymiarowa ζ, że zachodzi tożsamość*

$$\Phi(\zeta_1 Z_1, \dots, \zeta_s Z_s) = \zeta\Phi(Z_1, \dots, Z_s). \tag{20}$$

Innymi słowy, jeżeli każdy z argumentów $Z_1,\dots,Z_s$ pomnożymy przez dowolne liczby dodatnie, odpowiednio $\zeta_1,\dots,\zeta_s$, to wartość funkcji ma być także pomnożona przez jakąś liczbę ζ. Na przykład, niech argumentami funkcji Φ będą: Z_1=średnica kuli, Z_2=prędkość tej kuli, Z_3=lepkość cieczy, a wartością funkcji $\Phi(Z_1,Z_2,Z_3)$ niech będzie siła oporu, który ciecz stawia poruszającej się w niej kuli; warunek jednorodności wymiarowej oznacza, że jeżeli w opisywanym zjawisku średnica kuli zwiększy się np. 5 razy, prędkość kuli zwiększy się np. 3 razy, a lepkość cieczy zwiększy się np. 2 razy, to wartością funkcji $\Phi(5Z_1,3Z_2,2Z_3)$ ma być nadal siła, choć zmieniona co do wielkości, ale nie wielkość innego rodzaju, jak np. energia, czas, gęstość lub jeszcze inna.

Jednorodność wymiarowa jest podstawą *teorii modelowania* zjawisk. Inną interpretację warunku jednorodności wymiarowej podamy później, w ust. 11 niniejszego rozdziału, po wprowadzeniu pojęcia wymiaru. Na razie porównamy warunek niezmienniczości z warunkiem jednorodności.

8. Zauważmy, po pierwsze, że *jeżeli wielkości $A_1,\dots,A_m$ są wymiarowo niezależne, to każda funkcja $\Phi(A_1,\dots,A_m)$ wymiarowo niezmiennicza, musi być także wymiarowo jednorodna.* Wynika to z twierdzenia 1. A mianowicie, funkcja taka musi być postaci (15). Jeżeli więc $\zeta_1,\dots,\zeta_m$ są liczbami, to

$$\Phi(\zeta_1 A_1, \dots, \zeta_m A_m) = \zeta_1^{f_1}\dots\zeta_m^{f_m}\varphi A_1^{f_1}\dots A_m^{f_m},$$

a więc, oznaczając liczbę $\zeta_1^{f_1}\ldots\zeta_m^{f_m}$ literą ζ, widzimy, że warunek jednorodności jest spełniony.

Po drugie, jeżeli Φ jest zwykłą funkcją liczbową, to warunek jednorodności jest automatycznie spełniony. A więc warunek ten nie ogranicza funkcji liczbowych.

Po trzecie, jeżeli nie wszystkie argumenty funkcji $\Phi(Z_1,\ldots,Z_s)$ są wymiarowo niezależne, to nie każda taka funkcja jest wymiarowo jednorodna, chociażby była nawet wymiarowo niezmienniczą. Na przykład, niech $Z_1=\lambda$ cm (λ — liczba), $Z_2=$kąt (mierzony w „radianach" czyli po prostu liczba a). Funkcja, której argumentami są Z_1 i Z_2, niech będzie następująca:

$$\Phi(Z_1,Z_2)=\Phi(\lambda\,\mathrm{cm},a)=\mathrm{cm}^a.$$

Funkcja ta nie jest wymiarowo jednorodna, bo, na przykład, dla $\zeta_1=1$, $\zeta_2=2$ przyjmuje wartość

$$\Phi(\zeta_1Z_1,\zeta_2Z_2)=\Phi(\lambda\,\mathrm{cm},2a)=\mathrm{cm}^{2a}$$

i nie istnieje taka liczba ζ, żeby $\mathrm{cm}^{2a}=\zeta\,\mathrm{cm}^a$. Funkcja ta jest jednak wymiarowo niezmiennicza, ponieważ dla każdego przekształcenia Θ zachodzi tożsamość $\Theta(\mathrm{cm}^a)=(\Theta\,\mathrm{cm})^a$, wynikająca z własności 2° przekształcenia wymiarowego Θ.

Po czwarte, w końcu wykażemy, że *jeżeli funkcja jest wymiarowo jednorodna, to nie musi być wymiarowo niezmiennicza.* Dowodzi tego następujący przykład. Ustalmy układ jednostek $X_1=\mathrm{cm}$, $X_2=\mathrm{g}$, $X_3=\mathrm{sek}$. Rozpatrzmy funkcję tylko jednej zmiennej Z. Zmienna ta niech oznacza energię jakiegoś ciała. W układzie jednostek cm, g, sek, jest

$$Z=a\,\mathrm{cm}^2\,\mathrm{g}\,\mathrm{sek}^{-2}\qquad (a \text{ — liczba}).$$

Funkcję $\Phi(Z)$ określamy w ten sposób, że każdej energii Z przyporządkowujemy liczbę 2, która jest wykładnikiem przy cm wielkości Z wyrażonej w *ustalonym* układzie jednostek cm, g, sek, to znaczy $\Phi(Z)=2$. Tak określona funkcja nie jest wymiarowo niezmiennicza. Weźmy bowiem, na przykład, takie przekształcenie Θ, żeby było $\Theta\,\mathrm{cm}=\mathrm{cm}^3$. Wtedy $\Theta\Phi(Z)=\Theta 2=2$, ale $\Phi(\Theta Z)=3\cdot 2\neq 2$. Funkcja ta jest jednak wymiarowo jednorodna, ponieważ dla każdej liczby ζ jest spełniona tożsamość $\Phi(\zeta Z)=2$.

Uwagi poprzednie wyjaśniają, że warunki wymiarowej niezmienniczości i jednorodności są *logicznie niezależne.* Przyczyna tego tkwi w tym, o czym była mowa na końcu ustępu 4 niniejszego rozdziału.

9. Teraz uogólnimy twierdzenie 1. Uogólnienie to jest zasadniczym twierdzeniem analizy wymiarowej, sformułowanym przez E. Buckinghama, [3]; znane jest ono pod dziwną nazwą:

TWIERDZENIE π. *Jeżeli w wymiarowo niezmienniczej i jednorodnej funkcji $\Phi(A_1,\dots,A_m;P_1,\dots,P_q)$ argumenty $A_1,\dots,A_m$ są wymiarowo niezależne, a argumenty $P_1,\dots,P_q$ są od $A_1,\dots,A_m$ wymiarowo zależne, to znaczy wyrażają się w następujący sposób*:

$$(21)\qquad P_1=\pi_1 A_1^{r_{11}}\dots A_m^{r_{m1}},\quad \dots,\quad P_q=\pi_q A_1^{r_{q1}}\dots A_m^{r_{mq}},$$

gdzie $\pi_1,\dots,\pi_q$ są wielkościami bezwymiarowymi (liczbami), a wykładniki $r_{11},\dots,r_{mq}$ są liczbami rzeczywistymi, to funkcja Φ musi być postaci

$$(22)\qquad \Phi(A_1,\dots,A_m;P_1,\dots,P_q)=\varphi(\pi_1,\dots,\pi_q)A_1^{f_1}\dots A_m^{f_m},$$

gdzie $\varphi(\pi_1,\dots,\pi_q)$ jest zwykłą funkcją liczbową argumentów bezwymiarowych (liczbowych) $\pi_1,\dots,\pi_q$ i nie zależy od $A_1,\dots,A_m$, a wykładniki $f_1,\dots,f_m$ (rzeczywiste) nie zależą ani od $\pi_1,\dots,\pi_q$, ani od $A_1,\dots,A_m$.

Odwrotnie, każda funkcja Φ postaci (22) *jest wymiarowo niezmiennicza i wymiarowo jednorodna.*

Dowód. Aby wykazać, że $\varphi,f_1,\dots,f_m$ nie zależą od $A_1,\dots,A_m$, wystarczy zastosować takie samo rozumowanie, jakie przeprowadziliśmy w dowodzie twierdzenia 1. Przypominamy, że w dowodzie tym korzystaliśmy z niezmienniczości wymiarowej funkcji Φ. Dla krótkości, nie powtarzamy tu tej części dowodu. Możemy więc napisać

$$\Phi(A_1,\dots,A_m;P_1,\dots,P_q)=\varphi(\pi_1,\dots,\pi_q)A_1^{f_1(\pi_1,\dots,\pi_q)}\dots A_m^{f_m(\pi_1,\dots,\pi_q)},$$

gdzie wykładniki $f_1,\dots,f_m$ mogą, *a priori*, zależeć od $\pi_1,\dots,\pi_q$. Aby udowodnić, że wykładniki $f_1,\dots,f_m$ nie zależą od $\pi_1,\dots,\pi_q$, skorzystajmy z warunku jednorodności wymiarowej funkcji Φ. Na mocy tego warunku, dla wszelkich wielkości bezwymiarowych (liczb) $\zeta_1,\dots,\zeta_q$ musi istnieć taka wielkość bezwymiarowa ζ, żeby zachodziła tożsamość

$$\varphi(\zeta_1\pi_1,\dots,\zeta_q\pi_q)A_1^{f_1(\zeta_1\pi_1,\dots,\zeta_q\pi_q)}\dots A_m^{f_m(\zeta_1\pi_1,\dots,\zeta_q\pi_q)}=$$
$$=\zeta\varphi(\pi_1,\dots,\pi_q)A_1^{f_1(\pi_1,\dots,\pi_q)}\dots A_m^{f_m(\pi_1,\dots,\pi_q)}.$$

Ponieważ wielkości $A_1, \ldots, A_m$ są wymiarowo niezależne, więc stąd wynikają tożsamości

$$f_1(\zeta_1\pi_1, \ldots, \zeta_q\pi_q) = f_1(\pi_1, \ldots, \pi_q),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f_m(\zeta_1\pi_1, \ldots, \zeta_q\pi_q) = f_m(\pi_1, \ldots, \pi_q).$$

Tożsamości te oznaczają, że $f_1, \ldots, f_m$ nie zależą od $\pi_1, \ldots, \pi_q$.

W ten sposób udowodniliśmy pierwszą część twierdzenia, że funkcja Φ musi być postaci (22). Drugą część twierdzenia, że każda funkcja postaci (22) jest wymiarowo niezmiennicza i jednorodna, sprawdzamy łatwo bezpośrednim rachunkiem, który tu dla krótkości pomijamy.

10. Przykłady na zastosowanie twierdzenia π i w ogóle analizy wymiarowej poprzedzimy niektórymi uwagami o twierdzeniu π.

Po pierwsze, zarówno ze sformułowania jak i z dowodu twierdzenia π wynika, że wielkości bezwymiarowe $\pi_1, \ldots, \pi_q$ oraz wykładniki rzeczywiste $f_1, \ldots, f_m$ zależą od wykładników $r_{11}, \ldots, r_{mq}$ figurujących w założeniu (21). Faktu tego nie podkreślaliśmy w sformułowaniu twierdzenia π z tego powodu, że w praktycznych zagadnieniach wykładniki $r_{11}, \ldots, r_{mq}$ są ustalone.

Po drugie, jak wynika z uwag w ustępie 8, twierdzenie π nie jest prawdziwe, jeżeli opuścimy warunek niezmienniczości wymiarowej Φ. Niektórzy autorzy[5]), podają wprawdzie dowód tylko na podstawie warunku jednorodności (bez niezmienniczości). W istocie rzeczy dowodzą oni jednak innego twierdzenia, a mianowicie twierdzenia orzekającego o kształcie pewnej funkcji liczbowej, o której czynią nadto jeszcze inne założenia. Pomijając szczegół, że dowód tego innego twierdzenia jest zawilszy niż przytoczony tutaj dowód twierdzenia π, zwróćmy uwagę na to, że twierdzenia o funkcjach liczbowych są, w naszym ujęciu, dla analizy wymiarowej bezużyteczne. Nie wiadomo bowiem, jak stosować twierdzenia o funkcjach liczbowych do funkcji o argumentach i wartościach nieliczbowych. Trzeba by, logicznie rzecz biorąc, przy każdym takim stosowaniu dawać interpretację wymiarową tego twierdzenia. W naszym ujęciu interpretacja ta zawarta jest w samej teorii.

---

[5]) Por. [13].

Po trzecie, łatwo spostrzec, że twierdzenie 1 jest szczególnym przypadkiem twierdzenia π. A mianowicie wystarczy przyjąć w twierdzeniu π za q zero, aby otrzymać twierdzenie 1. Sformułowaliśmy i udowodniliśmy jednak twierdzenie 1 osobno, nie tylko ze względów dydaktycznych, ale dlatego, że ma ono duże znaczenie dla zastosowań, mianowicie w tych przypadkach, gdy wszystkie argumenty funkcji Φ są wymiarowo niezależne.

Po czwarte, w końcu zaznaczymy, że niektórzy autorzy[6]), piszą we wzorze (22) zamiast symbolu $\varphi(\pi_1,\dots,\pi_q)$ symbol $\Phi(1,\dots,1;\pi_1,\dots,\pi_q)$. Jest to sugestywna pisownia i można ją stosować bez obawy o nieporozumienie.

11. Wprowadzimy teraz pojęcie *wymiaru*. Pojęcie to jest bardzo wygodne w analizie wymiarowej, chociaż, jak widać z dotychczasowych rozważań, niekonieczne do sformułowania i udowodnienia twierdzeń.

Mówimy, że *dwie wielkości A i B mają ten sam wymiar, jeżeli AB^{-1} jest wielkością bezwymiarową (liczbą).* Piszemy to, używając symboliki wprowadzonej przez Maxwella, w następujący sposób:

$$[A]=[B].$$

Łatwo sprawdzić, że $[A]=[A]$, następnie, że jeżeli $[A]=[B]$, to $[B]=[A]$, i wreszcie, że jeżeli $[A]=[B]$ i $[B]=[C]$, to $[A]=[C]$. Całą przestrzeń wymiarową Π możemy zatem podzielić na klasy rozłączne w ten sposób, że do tej samej klasy należą tylko te elementy, które mają ten sam wymiar. Jest rzeczą naturalną, jak się to zwykle w matematyce robi, nazwać *klasę elementów mających ten sam wymiar* po prostu *wymiarem elementów* tej klasy. A więc np. wymiarem wielkości 5 m, 3 km, 12 sążni jest *długość*. Zapisujemy to symbolicznie

$$[5\text{ m}]=[3\text{ km}]=[12\text{ sążni}]=\textit{długość}.$$

Zamiast wyrazu *długość* można użyć litery, np. L, lub lepiej symbolu $[L]$. Można też pisać [cm] lub [m]. Niektórzy piszą nawet wprost cm, co wprawdzie nie jest ścisłe, ale krótsze.

Warto zwrócić uwagę, że dzięki powyższej definicji wymiaru odróżniamy takie pojęcia jak np. długość *czegoś* od długości „w ogóle". Długość pręta, długość drogi, długość drutu itp. są

[6]) Por. [19].

elementami przestrzeni wymiarowej Π. Ich wspólnym wymiarem jest długość (bez podawania czego).

Jeżeli w układzie jednostek $X_1,\ldots,X_n$ wielkość A wyraża się wzorem

$$A = aX_1^{a_1}\ldots X_n^{a_n} \qquad (a \text{ — liczba}),$$

to z definicji wymiaru wynika, że

$$[A] = [X_1^{a_1}\ldots X_n^{a_n}].$$

Takich symboli użyliśmy w przykładzie omówionym we Wstępie.

Dla wygody wysłowienia wprowadzamy mnożenie i potęgowanie wymiarów. Czynimy to za pomocą następujących równości, które należy uważać za definicje:

$$[A][B] = [AB], \qquad [A]^a = [A^a].$$

Z pierwszej z tych równości wynika, że wszystkie wielkości bezwymiarowe (liczby) mają ten sam wymiar równy wymiarowi liczby 1. Jeżeli mianowicie za A podstawimy wielkość bezwymiarową a, to dla każdego B jest

$$[a][B] = [aB] = [B],$$

skąd wynika, że $[a]=[1]$. Bez obawy o nieporozumienie będziemy zamiast [1] pisali 1.

Łatwo sprawdzić, że wymiary spełniają wszystkie postulaty przestrzeni Π, a więc same tworzą pewną przestrzeń typu Π.

Za pomocą pojęcia wymiaru można by (przy pewnych omówieniach) napisać warunek jednorodności wymiarowi w następujący sposób:

$$[\Phi([Z_1],\ldots,[Z_s])] = [\Phi(Z_1,\ldots,Z_s)].$$

Warunek jednorodności wymiarowej oznacza więc, że *jeżeli argumenty funkcji nie zmieniają swych wymiarów, to wartość funkcji też nie zmienia swojego wymiaru.*

Posługując się pojęciem wymiaru, udowodnimy następujące twierdzenie mające znaczenie w praktycznych zastosowaniach analizy wymiarowej.

Niech w *układzie jednostek* $X_1,\ldots,X_n$ wymiarowo niezależne wielkości $A_1,\ldots,A_m$ mają wymiary

$$[A_1] = [X_1^{a_{11}}\ldots X_n^{a_{n1}}], \qquad \ldots, \qquad [A_m] = [X_1^{a_{1m}}\ldots X_n^{a_{nm}}],$$

a wielkość F ma wymiar

$$[F] = [X_1^{a_1} \dots X_n^{a_n}].$$

Pytamy, czy *istnieje taka funkcja* Φ, *żeby dla wartości (swoich argumentów)* $A_1, \dots, A_m$ *przyjmowała wartość* F, to znaczy żeby

$$\Phi(A_1, \dots, A_m; P_1, \dots, P_q) = F,$$

gdzie $P_1, \dots, P_q$ są wielkościami wymiarowo zależnymi od $A_1, \dots, A_m$. Łatwo wykazać, że *na to potrzeba i wystarcza, żeby układ* n *równań liniowych o* m *niewiadomych* $f_1, \dots, f_m$

$$\begin{aligned} a_{11}f_1 + \dots + a_{1m}f_m &= a_1, \\ \dots\dots\dots&\dots\dots \\ a_{n1}f_1 + \dots + a_{nm}f_m &= a_n \end{aligned} \qquad (m \leqslant n), \tag{22'}$$

miał dokładnie jedno rozwiązanie.

Dla dowodu wystarczy zauważyć, iż z twierdzenia π wynika, że musi być

$$[F] = [A_1^{f_1} \dots A_m^{f_m}].$$

Podstawiając tu wymiary $[F]$ oraz $[A_1], \dots, [A_m]$, otrzymamy właśnie układ równań (22). Odwrotnie, jeżeli układ równań (22) ma dokładnie jedno rozwiązanie, to można obliczyć wykładniki $f_1, \dots, f_m$ występujące w twierdzeniu π.

12. Sformułowane w tym rozdziale aksjomaty, definicje i twierdzenia wyczerpują w zasadzie cały schemat algebraiczny analizy wymiarowej. Aby jednak rachunki na wielkościach wymiarowych nie różniły się formalnie od rachunków na zwykłych liczbach, przyjmujemy pewne umowy, które załatwiają poruszoną na początku niniejszego rozdziału kwestię dodawania i liczb niedodatnich. Wprowadzamy przede wszystkim *dodawanie i odejmowanie wielkości mających ten sam wymiar.* A mianowicie równości

$$\alpha A + \beta A = (\alpha + \beta)A, \qquad \alpha A - \beta A = (\alpha - \beta)A,$$

gdzie α i β są liczbami, należy uważać za *definicje.* Ponadto, aby odejmowanie wielkości o tym samym wymiarze było zawsze wykonalne, wprowadzamy również iloczyn αA dla współczynników α niedodatnich. Podkreślamy jednak, że *wielkość* αA *dla* $\alpha \leqslant 0$ *nie należy do przestrzeni wymiarowej* Π, i wobec tego nie można na takich wielkościach wykonywać wszystkich działań, które są określone w tej przestrzeni. Nie mają więc sensu np. wyrażenia $(-2\text{ cm})^{1/2}$ lub $(0\text{ sek})^{-1}$. Mają zaś sens takie wyrażenia, jak np. $(-2\text{ cm})^4$ lub $(0\text{ sek})^2$. Podobnie w arytmetyce zwykłych liczb wprowadza się dla wygody wysłowienia niektóre „liczby” jak np. $+\infty$ lub $-\infty$, na których nie można wykonywać wszystkich działań. Nie mają np. w arytmetyce sensu wyrażenia $\infty-\infty$ lub ∞/∞, ale mają sens takie wyrażenia jak np. $\infty+\infty$ lub 5∞ lub $\infty\cdot\infty$.

W zupełnie podobny sposób wprowadzamy w obrębie wielkości tego samego wymiaru pojęcie granicy. Mianowicie granicę ciągu $\{a_nA\}$, gdzie $\{a_n\}$ jest ciągiem liczbowym, definiujemy za pomocą równości

$$\lim_{n\to\infty}(a_nA) = (\lim_{n\to\infty} a_n)A.$$

Dzięki temu możemy wprowadzić pojęcie pochodnej, całki, szeregu nieskończonego i w ogóle możemy rachować formalnie, w obrębie jednego wymiaru, tak samo jak na zwykłych liczbach rzeczywistych. Z definicji powyższej wynika np., że pochodna d^2Y/dX^2 ma wymiar $[YX^{-2}]$ a całka $\int YdX$ ma wymiar $[YX]$.

13. Na zakończenie tego rozdziału poruszymy jeszcze kwestię, jaki jest związek analizy wymiarowej z teorią wektorów.

Przestrzeń wymiarową Π określiliśmy za pomocą aksjomatów sformułowanych na początku niniejszego rozdziału, w ustępie 1. W aksjomatach tych wprowadzone były dwa działania: mnożenie AB i potęgowanie A^a wielkości wymiarowych. Działania te mają spełniać postulaty (1)-(7). Rozpatrzmy teraz zamiast przestrzeni Π inną przestrzeń Σ. Elementy tej przestrzeni Σ oznaczać będziemy symbolami $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \ldots$ Przestrzeń Σ ma spełniać postulaty analogiczne do postulatów przestrzeni Π z tą tylko różnicą, że zamiast mnożenia wprowadzamy dodawanie, a zamiast potęgowania — mnożenie przez liczbę. Dokładniej mówiąc, postulaty przestrzeni Σ są następujące:

1° *Jest określona suma $\bar{A}+\bar{B}$ elementów $\bar{A}$ i $\bar{B}$, która jest też elementem przestrzeni Σ i ma następujące własności:*

$$(\bar{1}) \qquad \bar{A}+\bar{B} = \bar{B}+\bar{A},$$

$$(\bar{2}) \qquad (\bar{A}+\bar{B})+\bar{C} = \bar{A}+(\bar{B}+\bar{C}),$$

($\bar{3}$) *dla każdej pary elementów $\bar{A}$ i $\bar{B}$ istnieje w przestrzeni Σ taki element $\bar{X}$, że $\bar{A}+\bar{X}=\bar{B}$.*

2^0 *Jest określone mnożenie $a\bar{A}$ elementu $\bar{A}$ przez liczbę rzeczywistą a. Wynik tego mnożenia jest też elementem przestrzeni Σ i ma następujące własności:*

($\bar{4}$) $$(a+b)\bar{A}=a\bar{A}+b\bar{A},$$

($\bar{5}$) $$a(\bar{A}+\bar{B})=a\bar{A}+a\bar{B},$$

($\bar{6}$) $$b(a\bar{A})=(ab)\bar{A},$$

($\bar{7}$) $$1\bar{A}=\bar{A}.$$

Elementy $\bar{A},\bar{B},\bar{C},\ldots$, które czynią zadość powyższym postulatom, znane są w matematyce pod nazwą *wektorów*, a przestrzeń Σ nazywa się *przestrzenią wektorów* lub *przestrzenią liniową* [7]). A więc każdej wielkości wymiarowej A można przyporządkować wzajemnie jednoznacznie wektor $\bar{A}$ w ten sposób, że iloczynowi AB wielkości wymiarowych odpowiada suma $\bar{A}+\bar{B}$ wektorów, a potędze A^a odpowiada wektor $a\bar{A}$. W matematyce mówi się, że *przestrzeń wymiarowa Π jest izomorficzna z przestrzenią liniową Σ.* Wszystkie twierdzenia, które udowodniliśmy o przestrzeni wymiarowej Π, są w odpowiedniej transkrypcji ważne dla przestrzeni wektorów Σ. Na przykład układowi jednostek odpowiada układ współrzędnych w przestrzeni wektorów, a wzorom (11) i (12) odpowiadają znane z geometrii wzory na zmianę układu współrzędnych ukośnokątnych. Można dać szczegółową interpretację geometryczną innych pojęć i twierdzeń analizy wymiarowej. Nie będziemy się tu nad tym zatrzymywali [8]), zaznaczymy tylko, że w matematyce uważa się przestrzenie izomorficzne za różne realizacje tego samego tworu. W tym sensie możemy powiedzieć, że wielkości wymiarowe są wektorami, jak o tym wspomnieliśmy we Wstępie.

Na tym kończymy teorię analizy wymiarowej. W następnym rozdziale są omówione sposoby jej stosowania.

III. O zastosowaniach analizy wymiarowej

1. Zastosowania analizy wymiarowej do konkretnych zagadnień polegają na tym, że przyjmujemy pewną interpretację aksjo-

[7]) Por. [10].
[8]) Por. [5].

matów analizy wymiarowej. Do interpretacji tej należy ustalenie, co w danym zagadnieniu uważamy za wielkości wymiarowe i czy są spełnione postulaty przestrzeni wymiarowej. Każda taka interpretacja powinna być w zasadzie możliwa i jednoznaczna, chociaż nie zawsze formułuje się ją wyraźnie. W większości przypadków otrzymuje się w ten sposób wyniki poprawne, ale znane są też paradoksy, których przyczyną jest właśnie to, że taka interpretacja nie jest wyraźnie sformułowana. Uwagi te zilustrujemy przykładem, cytowanym zwykle jako paradoksalny[9]). Na przykładzie tym wyjaśnimy również, jak stosuje się twierdzenia analizy wymiarowej.

Przykład 1. Kula o średnicy D i cieple właściwym C porusza się z prędkością V w cieczy o przewodnictwie cieplnym H. Temperatura w środku kuli różni się od temperatury cieczy (daleko od kuli) o T. Jak zależy szybkość U wymiany ciepła kuli z otoczeniem od wielkości D, C, V, H, T?

Mamy zatem wyznaczyć kształt funkcji

$$U = \Phi(D, H, T, C, V).$$

Aby rozwiązać powyższe zagadnienie za pomocą analizy wymiarowej, omówimy niektóre szczegóły interpretacji.

Przede wszystkim uważamy, że wielkości D, C, V, H, T, U są wielkościami wymiarowymi, tzn. elementami pewnej przestrzeni Π. Wszystkich elementów tej przestrzeni nie będziemy wymieniali, byłoby to bowiem nie tylko kłopotliwe, ale również niepotrzebne dla naszego zagadnienia. Wymienimy później, w miarę potrzeby, jeszcze inne elementy tej przestrzeni. Zakładamy następnie, że funkcja Φ jest wymiarowo niezmiennicza i jednorodna, żeby można było stosować twierdzenie π. Dalej zakładamy, że U zależy tylko od wymienionych wielkości D, C, V, H, T, a nie od innych jeszcze, np. od gęstości cieczy, masy kuli itp.; byłoby to bowiem inne zagadnienie. Wszystkie te założenia nie należą do samej analizy wymiarowej, lecz do teorii tego zjawiska, które opisujemy.

Przyjmujemy następnie pewien układ jednostek. Musimy ustalić, ile i jakie wielkości uważamy za układ jednostek. Przyjmijmy, na razie, trzy jednostki, a mianowicie: cm, g, sek. Założenie o tym, że rozpatrywane zjawisko da się opisać w tym układzie jednostek, jest założeniem fizyki, a nie analizy wymiarowej. Założenie to,

---

[9]) Por. [2], [15], [18] i [19].

jak zobaczymy, nie jest wcale banalne i ma poważne podstawy. Musimy mianowicie wiedzieć, jak wyrażają się wymiary wielkości D, C, V, H, T, U za pomocą wymiarów [cm], [g], [sek]. Tych informacji dostarcza nam fizyka, a nie analiza wymiarowa. Mianowicie na podstawie geometrii, która jest włączona do fizyki, średnica kuli ma wymiar

$$[D] = [\mathrm{cm}].$$

Wymiar prędkości V wynika z kinematyki i jest mianowicie

$$[V] = [\mathrm{cm\ sek}^{-1}].$$

Nawiasem mówiąc, kwestia dlaczego w układzie cm, g, sek nie definiuje się prędkości jako drogi przebytej w ustalonym czasie, a więc dlaczego wymiar prędkości jest [cm sek^{-1}], a nie np. [cm], należy do kinematyki, a nie do analizy wymiarowej.

Przechodzimy obecnie do wymiaru temperatury. Fizyka, a nie analiza wymiarowa, daje nam odpowiedź na pytanie, jaki jest w układzie cm, g, sek, wymiar temperatury. Fizyk robi to w następujący sposób: Ponieważ, powiada on, z kinetycznej teorii materii wynika, że temperatura ciała jest proporcjonalna do średniej energii kinetycznej cząsteczek, więc wymiar temperatury jest taki sam, jak wymiar energii. Pomijając sprawę, że znowu wprowadzamy do przestrzeni wymiarowej Π nową wielkość, mianowicie energię, musimy ustalić jaki jest jej wymiar. Do tego potrzeba powołać się znowu na inne twierdzenie fizyki o energii kinetycznej i w ten sposób przyjmując te wszystkie wiadomości z fizyki i nazywając jednostkę temperatury stopniem otrzymujemy

$$[\mathrm{stop}] = [\mathrm{cm}^2\ \mathrm{g\ sek}^{-2}].$$

Już z tych uwag widać, w jak istotny sposób korzystamy przy stosowaniu analizy wymiarowej do fizyki z samej fizyki. A niektórym wydaje się, że analiza wymiarowa... właściwie nie korzysta z niczego. Zatrzymajmy się jeszcze na ustalonym wymiarze temperatury, aby zrobić pewną uwagę, która jest ważna dla dalszego ciągu. Można by mianowicie zapytać, co byśmy otrzymali, gdybyśmy nie skorzystali z fizyki statystycznej i założyli, że wymiar temperatury nie wyraża się za pomocą wymiarów [cm], [g], [sek], lecz przyjęli, na przykład, że układ jednostek ma cztery wielkości: cm, g, sek, stopień, tak jak to czyniono przed odkryciem, iż temperatura jest energią kinetyczną. Kwestię tę omówimy później. Na razie, przyjmijmy poprzednio sformułowane założenie, że w układzie mamy tylko trzy jednostki: cm, g, sek.

Do ustalenia wymiarów pozostałych wielkości C, H, U trzeba także powołać się na fizykę. Wprowadzamy wielkość wymiarową zwaną ilością ciepła i jej jednostkę, kalorię. Powołujemy się na pierwszą zasadę termodynamiki, że kaloria jest wielkością tego samego wymiaru co energia, a zatem

$$[\mathrm{kal}] = [\mathrm{cm}^2\,\mathrm{g}\,\mathrm{sek}^{-2}].$$

Nie będziemy się zatrzymywali nad innymi kwestiami. Ostatecznie stwierdzamy na podstawie fizyki, że

$$\begin{aligned} &[D]=[\mathrm{cm}], \quad [C]=[\mathrm{cm}^{-3}\,\mathrm{kal}\,\mathrm{stop}^{-1}]=[\mathrm{cm}^{-3}], \\ (23)\quad &[V]=[\mathrm{cm}\,\mathrm{sek}^{-1}], \quad [H]=[\mathrm{cm}^{-1}\,\mathrm{sek}^{-1}\,\mathrm{kal}\,\mathrm{stop}^{-1}]=[\mathrm{cm}^{-1}\,\mathrm{sek}^{-1}], \\ &[T]=[\mathrm{stop}]=[\mathrm{cm}^2\,\mathrm{g}\,\mathrm{sek}^{-2}], \quad [U]=[\mathrm{kal}\,\mathrm{sek}^{-1}]=[\mathrm{cm}^2\,\mathrm{g}\,\mathrm{sek}^{-3}]. \end{aligned}$$

Po tych wszystkich założeniach, które, podkreślamy, *nie należą do analizy wymiarowej lecz do fizyki*, przystępujemy do stosowania analizy wymiarowej.

Spośród pięciu argumentów D, H, T, C, V funkcji $U=\Phi(D, H, T, C, V)$ mogą być najwyżej trzy wymiarowo niezależne, bo założyliśmy, że układ ma trzy jednostki. Sprawdzamy, że np. D, H, T są wymiarowo niezależne, ponieważ wyznacznik utworzony z wykładników przy wymiarach tych wielkości w układzie cm, g, sek, jest różny od zera. A mianowicie

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Wyrażamy wymiary pozostałych dwóch wielkości V, C za pomocą wymiarów $[D]$, $[H]$, $[T]$ na podstawie wzoru (8)

$$[V] = [D^d H^h T^t],$$

gdzie wykładniki d, h, t wyznaczymy w ten sposób, że podstawimy za $[D]$, $[H]$, $[T]$ ich wymiary (23) w układzie cm, g, sek. Otrzymamy

$$[\mathrm{cm}\,\mathrm{sek}^{-1}] = [\mathrm{cm}^d\,\mathrm{cm}^{-h}\,\mathrm{sek}^{-h}\,\mathrm{cm}^{2t}\,\mathrm{g}^t\,\mathrm{sek}^{-2t}].$$

Porównując wykładniki przy cm, g, sek, otrzymujemy układ równań

$$d-h+2t=1, \qquad t=0, \qquad -h-2t=-1,$$

którego rozwiązaniem jest $d=2$, $h=1$, $t=0$. A więc

$$[V]=[D^2H].$$

Z definicji wymiaru wynika, że

$$\frac{V}{D^2H}=\pi_1,$$

gdzie π_1 jest wielkością bezwymiarową (liczbą).

Za pomocą analogicznego rachunku otrzymujemy, że $CD^3=\pi_2$, gdzie π_2 jest wielkością bezwymiarową (liczbą).

Na podstawie twierdzenia π możemy więc napisać, że

$$U=\varphi(\pi_1,\pi_2)D^{d_1}H^{h_1}T^{t_1},$$

gdzie $\varphi(\pi_1,\pi_2)$ jest zwykłą funkcją liczbową argumentów bezwymiarowych π_1,π_2, a wykładniki rzeczywiste d_1,h_1,t_1 nie zależą od D, H, T. Wykładniki te wyznaczymy z warunku

$$[U]=[D^{d_1}H^{h_1}T^{t_1}],$$

w ten sposób, że podstawimy za wymiary $[D]$, $[H]$, $[T]$, $[U]$ ich wyrażenia w układzie jednostek cm, g, sek na podstawie (23). Otrzymamy

$$[\mathrm{cm}^2\,\mathrm{g}\,\mathrm{sek}^{-3}]=[\mathrm{cm}^{d_1}\,\mathrm{cm}^{-h_1}\,\mathrm{sek}^{-h_1}\,\mathrm{cm}^{2t_1}\,\mathrm{g}^{t_1}\,\mathrm{sek}^{-2t_1}].$$

Porównujemy wykładniki przy cm, g, sek, i rozwiązując otrzymany układ równań, otrzymujemy $d_1=h_1=t_1=1$. A zatem rozwiązaniem jest

$$U=\varphi\left(\frac{V}{D^2H}, CD^3\right)DHT,$$

gdzie φ jest funkcją liczbową dwóch argumentów liczbowych V/D^2H i CD^3.

Dla celów, które wkrótce wyjaśnimy, wprowadźmy zamiast bezwymiarowych argumentów $\pi_1=V/D^2H$ i $\pi_2=CD^3$ inne argumenty bezwymiarowe

$$\pi_1'=\pi_1\pi_2=\frac{VCD}{H}, \qquad \pi_2=CD^3.$$

W takim razie otrzymamy

$$U = \psi_2(VCD/H, CD^3)DHT, \tag{24}$$

gdzie $\psi_2(\pi_1', \pi_2)$ jest funkcją liczbową dwóch argumentów liczbowych π_1', π_2. Wzór (24) wyprowadził Rayleigh [15].

Rozwiążemy teraz to samo zagadnienie, ale przy zmienionych założeniach fizycznych. Poprzednio, na podstawie fizyki statystycznej, przyjęliśmy, że wymiar temperatury wyraża się w układzie cm, g, sek. Teraz odrzucamy to założenie i zamiast niego przyjmujemy inne, a mianowicie że temperatura jest wielkością wymiarowo niezależną od cm, g, sek. Zakładamy zatem, że układ ma nie trzy lecz cztery jednostki: cm, g, sek, stopień. Wszystkie pozostałe założenia zachowujemy. Wtedy zamiast wzorów (23) otrzymujemy

$$\begin{gathered}[D]=[\text{cm}], \quad [C]=[\text{cm}^{-1}\,\text{g}\,\text{sek}^{-2}\,\text{stop}^{-1}], \quad [V]=[\text{cm}\,\text{sek}^{-1}], \\ [H]=[\text{cm}\,\text{g}\,\text{sek}^{-3}\,\text{stop}^{-1}], \quad [T]=[\text{stop}], \quad [U]=[\text{cm}^{-2}\,\text{g}\,\text{sek}^{-3}].\end{gathered} \tag{25}$$

Teraz spośród pięciu argumentów D, H, T, C, V funkcji $U = \Phi(D, H, T, C, V)$ mogą być najwyżej cztery wymiarowo niezależne. W sposób analogiczny jak poprzednio sprawdzamy, że na przykład D, H, T, C są wymiarowo niezależne. Wobec tego wymiar $[V]$ wyraża się za pomocą wymiarów wielkości D, H, T, C i otrzymujemy, że

$$DVC/H = \pi_1',$$

gdzie π_1' jest wielkością bezwymiarową. Na podstawie twierdzenia π możemy więc napisać, że

$$U = \psi_1(\pi_1')D^{d_2}H^{h_2}T^{t_2}C^{c_2},$$

gdzie wykładniki rzeczywiste d_2, h_2, t_2, c_2 wyznaczamy tak samo jak poprzednio. Otrzymujemy ostatecznie

$$U = \psi_1(DVC/H)DHT, \tag{26}$$

gdzie ψ_1 jest funkcją liczbową jednego argumentu liczbowego DVC/H.

Porównajmy dwa otrzymane rozwiązania (24) i (26). Różnią się one tym, że we wzorze (24) funkcja liczbowa ψ_2 zależy od dwóch argumentów liczbowych VDC/H i CD^3, a we wzorze (26) funkcja liczbowa ψ_1 zależy tylko od jednego argumentu liczbowego VCD/H. Żadnej z tych funkcji liczbowych metodą analizy wymiarowej nie można wyznaczyć. Funkcja ψ_2 zależna od dwóch argumentów liczbowych jest jednak mniej określona niż funkcja liczbowa ψ_1 zależna tylko od jednego argumentu π_1'. Tymczasem do wyprowadzenia wzoru (24) użyliśmy dokładniejszych wiadomości z fizyki niż do wyprowadzenia wzoru (26), a otrzymaliśmy wzór mniej określony. Mianowicie przy wyprowadzeniu wzoru (24) powołaliśmy się na fizykę molekularną, a przy wyprowadzeniu wzoru (26) nie korzystaliśmy z fizyki molekularnej.

Ten fakt, na który zwrócił uwagę D. Riabouchinsky [18], uważany jest za paradoksalny i stanowił przedmiot dyskusji różnych autorów. Na przykład, Rayleigh pisze, że „byłoby rzeczywiście nonsensem, gdyby dokładniejsza znajomość natury ciepła, uzyskana po wprowadzeniu teorii molekularnej, stawiała nas w gorsze położenie przy rozwiązywaniu konkretnego zagadnienia, niż przedtem". Na to inny autor, P. Bridgman [2], oświadcza, że „ta odpowiedź nie grzeje i nie ziębi", ale sam nie daje wyjaśnienia. L. Sjedow [19] porusza kwestię, jakie wielkości są dla tego zagadnienia fizycznie istotne.

Sprawa zasługuje więc na wyjaśnienie. Metodą analizy wymiarowej opisaliśmy to samo zjawisko za pomocą dwóch różnych teorii fizycznych. Pierwsza teoria fizyczna, z której wynika wzór (24), jest teorią molekularną i zakłada, że temperatura ma wymiar energii, a druga teoria fizyczna, z której wynika wzór (26), zakłada, że temperatura jest wielkością wymiarowo niezależną od cm, g, sek. Nie ma się więc czemu dziwić: dwie różne teorie fizyczne dają różne wzory. Pozostaje jeszcze wyjaśnić, dlaczego dokładniejsza teoria fizyczna daje wzór mniej określony.

Zastanówmy się przede wszystkim nad tym, co oznacza tu wyraz „dokładniejsza teoria". Teoria molekularna, „dokładniejsza", która prowadzi do wzoru (24) mniej określonego, zakłada, że stopień jest wymiarowo zależny od wymiarowo niezależnych wielkości cm, g, sek, a mianowicie zakłada, że

$$[\text{stopień}] = [\text{cm}^2\ \text{g}\ \text{sek}^{-2}].$$

A więc pierwsza teoria, molekularna, zakłada, że z równości

$$(0) \qquad [\text{cm}^{a_1}\ \text{g}^{a_2}\ \text{sek}^{a_3}\ \text{stopień}^{a_4}] = 1$$

wynika

$$(\mathrm{I}) \qquad a_1 + 2a_4 = a_2 + a_4 = a_3 - 2a_4 = 0.$$

Druga teoria, niemolekularna, która prowadzi do wzoru (26) bardziej określonego, zakłada, że stopień, cm, g, sek są wymiarowo niezależne, to znaczy, iż z równości (0) wynika

$$\text{(II)} \qquad a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0.$$

Widać stąd, że jeśli jest spełniony warunek (II) drugiej teorii, to jest także spełniony warunek (I) pierwszej teorii, ale nie na odwrót. A więc założenie (II) drugiej teorii jest logicznie mocniejsze niż założenie (I) pierwszej teorii, którą uważamy za dokładniejszą.

Teoria molekularna obejmuje zatem szerszy zakres zjawisk niż teoria, w której temperatura jest wymiarowo niezależna od cm, g, sek. W teorii molekularnej można opisać takie zjawiska, których nie można opisać w teorii o czterech jednostkach, na przykład można zapytać, jak zależy temperatura ciała od średniej energii kinetycznej jego cząstek, a takie pytanie w teorii o czterech jednostkach nie ma sensu. A zatem założenie, że temperatura ma ten sam wymiar, co energia kinetyczna, rozszerza zakres zjawisk, do którego należy zjawisko rozpatrywane przez nas w przykładzie 1. Innymi słowy, teoria molekularna jest dokładniejsza w tym znaczeniu, że umieszcza badane zjawisko w szerszej klasie, ale nie w tym znaczeniu, że o tym oddzielnym zjawisku daje dokładniejsze informacje. Dlatego we wzorze (24) funkcja ψ_2 zależy od dwóch zmiennych liczbowych, a nie od jednej, ponieważ klasa funkcji dwóch zmiennych jest szersza niż klasa funkcji jednej zmiennej.

O tym, która z tych dwóch teorii opisuje lepiej rzeczywistość, nie może rozstrzygnąć formalizm algebraiczny analizy wymiarowej, lecz doświadczenie. Jeżeli porównamy oba wzory (24) i (26) z wynikami doświadczenia, to możemy stwierdzić, który z nich lepiej odpowiada rzeczywistości. Warto jednak zauważyć, że wzór (24) zawierający funkcję dwóch zmiennych, a więc mniej określony niż wzór (26), okaże się lepszym. Jeżeli mianowicie wzór (26) zawierający funkcję tylko jednej zmiennej $\psi_1(\pi_1')$ zostanie potwierdzony przez doświadczenie, to to samo doświadczenie potwierdzi również wzór (24) zawierający funkcję $\psi_2(\pi_1', \pi_2)$ dwóch zmiennych, ponieważ doświadczenie to wykaże, że w funkcji $\psi_2(\pi_1', \pi_2)$ drugi argument π_2 jest stały. Jeżeli zaś wzór (26) zawierający funkcję jednej zmiennej nie zostanie potwierdzony przez doświadczenie, to wzór (24) właśnie dzięki temu, że zawiera ogólniejszą funkcję dwóch zmiennych, może jeszcze zostać potwierdzony przez doświadczenie.

Widać więc, że wzór mniej określony (24) można lepiej dopasować do rzeczywistości niż wzór (26), który jest wprawdzie bardziej określony, ale „sztywniejszy".

Przykład powyższy pokazuje również, jaka jest rola doświadczenia w zastosowaniach analizy wymiarowej. Wartości funkcji liczbowej φ występującej w twierdzeniu π można i należy wyznaczyć z doświadczenia. Na przykład, współczynnik liczbowy φ we wzorze, który wyprowadziliśmy w zagadnieniu rozwiązanym we Wstępie, można i należy wyznaczyć za pomocą doświadczenia, jeżeli, *nota-bene*, wzór ten zostanie potwierdzony przez to doświadczenie. Jeżeli zaś wzór ten nie będzie zgodny z wynikami doświadczenia, to wyniknie stąd, że schemat zjawiska został niewłaściwie przyjęty. Analiza wymiarowa jest więc racjonalną podstawą eksperymentu.

2. Z uwag zawartych w poprzednim ustępie widać, że założenie o tym, ile i jakie są jednostki w układzie, nie należy do analizy wymiarowej, ale do teorii tego zjawiska, które opisujemy za pomocą analizy wymiarowej. Założenie to, na pierwszy rzut oka mało istotne, jest w gruncie rzeczy zupełnie zasadnicze, ponieważ wyznacza zakres zjawisk, które przyjęta teoria obejmuje. Im więcej jest jednostek w układzie, a zatem im więcej wielkości uważamy za wymiarowo niezależne, tym węższą klasę zjawisk obejmuje teoria. Przeciwnie, im mniej jest jednostek w układzie, tym teoria jest rozleglejsza. Analiza wymiarowa stosowana do węższej teorii daje wyniki bardziej określone, niż stosowana do szerszej teorii.

Gdybyśmy zamiast układu zawierającego trzy jednostki użyli układu mającego tylko jedną jednostkę, wówczas klasa zjawisk objęta taką teorią byłaby szersza niż teoria oparta na trzech jednostkach. Tak jest na przykład w teorii względności, rozpatrującej też takie zjawiska, jak np. zależność masy od prędkości, których nie uwzględnia się w fizyce klasycznej. Analiza wymiarowa stosowana do teorii względności dałaby chyba tylko same trywialne tożsamości.

Nie wszyscy[10]) zdają sobie sprawę z tego, że analiza wymiarowa nie może rozstrzygnąć, ile jest „naprawdę" jednostek w przyjętej teorii fizycznej. Należy to do tej teorii. Zmiana ilości jednostek jest zawsze zmianą teorii badanych zjawisk.

Wymienione okoliczności warto wziąć pod uwagę w licznych i ciągle aktualnych dyskusjach o właściwym układzie jednostek

---

[10]) Por. [9].

w elektrotechnice. Jedni twierdzą, że należy przyjąć trzy jednostki, drudzy — że cztery, a inni — że pięć. W polemikach na ten temat wysuwa się często argumenty mało istotne np. kwestię wygody rachunków lub pisowni wzorów, a mniej mówi się o tym, jaki zakres zjawisk ma objąć elektrotechnika[11]). Po ustaleniu tego zakresu można jednoznacznie określić, ile ma być jednostek w układzie. Jeżeli przyjąć za fakt doświadczalny, że zwolennicy układu o czterech lub pięciu jednostkach w elektrotechnice są przeciwni układowi o trzech jednostkach jedynie dlatego, że rachunki są niewygodne przy trzech jednostkach, to z tego wynika, że wszyscy elektrotechnicy zamierzają rozpatrywać w swojej teorii ten sam zakres zjawisk. A w takim razie, z punktu widzenia analizy wymiarowej, najkorzystniej jest użyć układu o możliwie największej liczbie jednostek, a więc np. pięciu, bo wtedy można za pomocą analizy wymiarowej uzyskać bardziej określone wzory niż w układach o mniejszej liczbie jednostek.

Analizę wymiarową możemy stosować nie tylko do zagadnień fizycznych, lecz również innych. Należy ustalić zakres teorii tych zjawisk, wprowadzić odpowiednie jednostki, ustalić interpretację przestrzeni wymiarowej na podstawie założeń teorii tych zjawisk. Wtedy analiza wymiarowa pozwala za pomocą łatwego rachunku uzyskiwać wiele wyników. W ten sposób można zastosować analizę wymiarową do takich dziedzin, do których dotąd jej nie stosowano, na przykład do teorii wyrywkowego badania towarów. Sprawa ta będzie przedmiotem osobnej pracy[12]).

3. Dla ilustracji analizy wymiarowej rozpatrzymy jeszcze inne przykłady jej zastosowań[13]).

Przykład 2. Belka o długości L, przekroju poprzecznym S i module sprężystości E, jest obciążona w środku siłą P. Jak zależy stosunek F/P strzałki ugięcia F belki od wielkości L, S, E?

Mamy wyznaczyć kształt funkcji $F/P = \Phi(L, E, S)$.

Obierzmy pewien układ jednostek, na przykład „techniczny": kG, m, sek. Z definicji wielkości F, L, S, E, P, na podstawie wytrzymałości materiałów, obliczamy wymiary:

$$[F/P] = [\mathrm{m\,kG^{-1}}], \quad [L] = [\mathrm{m}], \quad [S] = [\mathrm{m^2}], \quad [E] = [\mathrm{kG\,m^{-2}}].$$

[11]) Por. [4].
[12]) Por. [7].
[13]) Por. [6].

Łatwo sprawdzić, że tylko dwie wielkości spośród L, S, E są wymiarowo niezależne. Wybierzmy z nich na przykład L i E. Wtedy wymiary pozostałych wielkości wyrażają się za pomocą wymiarów L i E w następujący sposób:

$$[S]=[L^2], \quad [F/P]=[E^{-1}L^{-1}].$$

Wprowadzamy wielkość bezwymiarową

$$\pi_1 = S/L^2$$

i stosując twierdzenie π otrzymujemy

$$F=\varphi(S/L^2)L^{-1}E^{-1},$$

gdzie φ jest funkcją liczbową argumentu bezwymiarowego S/L^2.

Tyle daje nam analiza wymiarowa. Teraz możemy przyjąć niektóre założenia dalsze, oparte na doświadczeniu lub na ogólnej znajomości innej teorii rozpatrywanego zjawiska. Na przykład, załóżmy, że funkcja liczbowa $\varphi(\pi_1)$ daje się rozwinąć w szereg potęg ujemnych i dodatnich argumentu $\pi_1=S/L^2$:

$$\left(\varphi\frac{S}{L^2}\right)=\ldots+a_{-2}\frac{S^2}{L}+a_{-1}\frac{S}{L^2}+a_0+a_1\frac{L^2}{S}+a_2\frac{L^4}{S^2}+\ldots,$$

gdzie $\ldots a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, \ldots$ są liczbami. Załóżmy następnie, co jest intuicyjnie zrozumiałe, że dla $L=0$ jest $F=0$. Wtedy muszą być wszystkie współczynniki $\ldots a_{-2}, a_{-1}, a_0$ przy niedodatnich potęgach zmiennej S/L^2 równe zeru. Ograniczmy się do pierwszych dwóch wyrazów pozostałego szeregu. Otrzymamy, oznaczając przez α, β stałe liczbowe,

$$F=\frac{PL^3}{\alpha ES^2}\left(1+\beta\frac{S}{L^2}\right).$$

Wzór powyższy znany jest w nauce o wytrzymałości materiałów, w której wyprowadza się go za pomocą równań różniczkowych. Dla różnych kształtów przekroju poprzecznego belki oblicza się w wytrzymałości materiałów stałe liczbowe α, β. Metoda, którą wyprowadziliśmy tutaj wzór powyższy, różni się jednak od metody, którą stosuje się w wytrzymałości materiałów, jeszcze pod innymi względami.

W wytrzymałości materiałów przyjmuje się niektóre dość uproszczone hipotezy o samym zjawisku. Na przykład, przyjmuje się tzw. hipotezę Bernoulliego, zakładającą, że przy zginaniu belki jej przekroje płaskie pozostają płaskimi. Hipoteza ta nie jest zgodna ani z rzeczywistością ani nawet z teorią sprężystości. Z hipotezy Bernoulliego wynika, że naprężeń ścinających w belce nie ma. Stąd otrzymuje się w wytrzymałości materiałów wniosek, że $\beta=0$. W dokładniejszych obliczeniach jednak rozpatruje się w wytrzymałości materiałów w pierwszym przybliżeniu wpływ naprężeń ścinających i wtedy, drogą osobnych rozumowań i dodatkowych założeń, uzyskuje się wyraz, który jest właśnie postaci $\beta S/L^2$. Te dodatkowe założenia polegają w zasadzie na tym, że przyjmuje się pewien, bardzo uproszczony, rozkład naprężeń w przekroju zginanej belki i dzięki temu można obliczyć wartość liczbową współczynnika β. Na współczynniki a i β wpływają w teorii wytrzymałości materiałów w istotny sposób założenia o tym, jaki jest schemat podpór, na których belka spoczywa. Założenia te są najczęściej niesprawdzalne. Z tego powodu wartości współczynników liczbowych, które są podane w wytrzymałości materiałów, zaleca się w tejże samej nauce korygować na podstawie pomiarów. Wydaje się co najmniej tak samo praktyczne wyznaczyć te współczynniki od razu na podstawie doświadczenia.

Z tego przykładu widać jeszcze raz, jak wzory otrzymane za pomocą analizy wymiarowej można i powinno się uzupełniać bezpośrednim doświadczeniem. Po tym uzupełnieniu wzory te będą „najlepsze" w tym sensie, że będą najlepiej odpowiadały rzeczywistości.

4. Rozpatrzmy teraz przykład, w którym warunek (22) gra istotną rolę.

Przykład 3. Jak zależy okres T wahań wahadła od długości L i masy M wahadła?

Aby wyznaczyć kształt funkcji

$$T=\Phi(L,M),$$

przyjmijmy układ jednostek cm, g, sek. Z definicyj fizycznych mamy wymiary

$$[T]=[\mathrm{cm}^0\,\mathrm{g}^0\,\mathrm{sek}^1],\quad [L]=[\mathrm{cm}^1\,\mathrm{g}^0\,\mathrm{sek}^0],\quad [M]=[\mathrm{cm}^0\,\mathrm{g}^1\,\mathrm{sek}^0].$$

Wielkości L, M są wymiarowo niezależne, więc na podstawie twierdzenia π ma być

$$T=\varphi L^{f_1}M^{f_2},$$

gdzie φ jest liczbą, a wykładniki rzeczywiste f_1,f_2 mamy wyznaczyć z warunku

$$[T]=[L^{f_1}M^{f_2}].$$

Podstawiając wymiary wielkości T,L,M w układzie cm, g, sek otrzymujemy

$$[\mathrm{cm}^0\,\mathrm{g}^0\,\mathrm{sek}^1]=[\mathrm{cm}^{1\cdot f_1}\,\mathrm{g}^{0\cdot f_1}\,\mathrm{sek}^{0\cdot f_1}\,\mathrm{cm}^{0\cdot f_2}\,\mathrm{g}^{1\cdot f_2}\,\mathrm{sek}^{0\cdot f_2}].$$

Porównujemy wykładniki przy wymiarach cm, g, sek i otrzymujemy układ równań, który jest szczególnym przypadkiem układu (22):

$$1\cdot f_2+0\cdot f_2=0, \qquad 0\cdot f_1+1\cdot f_2=0, \qquad 0\cdot f_1+0\cdot f_2=1.$$

Układ ten nie ma w ogóle rozwiązań f_1,f_2. Z twierdzenia sformułowanego w ust. 11 rozdziału II, wynika, że T nie może być wartością funkcji $\Phi(L,M)$.

Z podanego przykładu widać, jak sama analiza wymiarowa może czasem podpowiedzieć, że schemat fizyczny zjawiska został niewłaściwie przyjęty. Aby T mogło być wartością funkcji o argumentach L,M, należy przyjąć jeszcze inne argumenty tej funkcji. Można, na przykład na podstawie obserwacji dokonywanych w różnych miejscach kuli ziemskiej, przyjąć, że okres T zależy jeszcze od przyśpieszenia ziemskiego G. Wtedy warunek (22) jest już spełniony. Prosty rachunek daje

$$T=\varphi\sqrt{\frac{L}{G}},$$

gdzie φ jest liczbą; liczby tej za pomocą analizy wymiarowej nie można wyznaczyć. Możemy przyjąć inne założenia fizyczne o tym samym zjawisku i, rzecz jasna, otrzymamy inne wzory. Weryfikacja tych wzorów, a tym samym założeń fizycznych, nie należy do analizy wymiarowej, lecz do doświadczenia.

5. Analiza wymiarowa pozwala nie tylko uzyskiwać prosto i ogólnie rozwiązania zagadnień z takich dziedzin, dla których istnieje kompletna teoria matematyczna, lecz również daje istotne wyniki w opisie zjawisk, dla których nie ma jeszcze dostatecznie rozwiniętej teorii. Tak jest na przykład w zagadnieniach dotyczących ruchów turbulencyjnych cieczy. Teoria tych zjawisk nie pozwala na razie sformułować, a tym bardziej rozwiązać, wielu zagadnień o ruchu turbulencyjnym. Za pomocą analizy wymiarowej można jednak uzyskać przez prosty rachunek ważne wyniki. Dla ilustracji rozpatrzmy następujący przykład:

Przykład 4. Niech ΔV oznacza zmianę prędkości cieczy na małym odcinku ΔL. Gęstość cieczy niech wynosi D, szybkość dyssypacji energii na jednostkę objętości (wskutek lepkości cieczy) niech wynosi E. Jak zależy ΔV od $\Delta L, D, E$?

Aby wyznaczyć kształt funkcji $\Delta V = \Phi(\Delta L, D, E)$, obieramy układ jednostek cm, g, sek. Z definicji fizycznej wielkości ΔV, $\Delta L, D, E$ wynikają ich wymiary:

$$[\Delta V]=[\mathrm{cm\,sek}^{-1}],\quad [\Delta L]=[\mathrm{cm}],\quad [D]=[\mathrm{cm}^{-3}\mathrm{g}],\quad [E]=[\mathrm{cm}^{-1}\mathrm{g\,sek}^{-3}].$$

Łatwo sprawdzić, że $\Delta L, D, E$ są wymiarowo niezależne. Stosując, jak poprzednio, twierdzenie π otrzymujemy

$$\Delta V = \varphi\left(\frac{E\Delta L}{D}\right)^{1/3},$$

gdzie φ jest stałym współczynnikiem liczbowym.

Wzór powyższy uzyskali A. Kołmogorow i A. Obuchow [12] posługując się analizą wymiarową.

6. Analizą wymiarową można również posługiwać się przy rozwiązywaniu niektórych równań różniczkowych. Dla przykładu rozpatrzmy równanie różniczkowe nieliniowe o pochodnych cząstkowych.

Przykład 5. Niech będzie dane równanie różniczkowe

$$FX^2\frac{\partial^2 F}{\partial X\partial Y} = K\left\{\left(X\frac{\partial F}{\partial X}\right)^2 - \left(Y\frac{\partial F}{\partial Y}\right)^2\right\}; \tag{27}$$

F jest funkcją niewiadomą, X, Y są zmiennymi, a K jest parametrem. Wyznaczymy rozwiązania szczególne równania (27).

Uważajmy zmienne F, X, Y, K za wielkości wymiarowe. Za układ jednostek obieramy, na przykład, X, Y. Wobec tego K wyraża się za pomocą X, Y. Z równania (27) wynika, że

$$\xi = KY/X$$

jest wielkością bezwymiarową (liczbą). Na podstawie twierdzenia π możemy napisać

$$F(X, Y, K) = \varphi(\xi) X^a Y^b;$$

a, b są liczbami rzeczywistymi, a funkcja liczbowa $\varphi(\xi)$ spełnia równanie różniczkowe, które otrzymamy po podstawieniu wyrażenia na F do równania (27):

$$\xi^2 \frac{d^2\varphi}{d\xi^2} - \{2(a+b)\xi^2 + (a-b-1)\xi\} \frac{d\varphi}{d\xi} + \{(a^2-b^2)\xi - ab\}\varphi = 0.$$

Jest to równanie różniczkowe zwyczajne, drugiego rzędu, liniowe. Jego całka ogólna zależy od czterech parametrów: a, b i dwóch stałych całkowania. Równanie to można rozwiązywać znanymi sposobami. Otrzymamy wtedy rozwiązania szczególne równania (27). Przyjmijmy, na przykład, $a = b = 0$, wtedy otrzymamy po scałkowaniu

$$F = \alpha \int_{\xi_0}^{KY/X} e^{-\xi^2/2} d\xi,$$

gdzie α i ξ_0 są dowolnymi stałymi całkowania. Przykłady stosowania wymienionej metody do równań hydromechaniki podaje L. Sjedow w swej książce [19].

Podany przykład wskazuje, że analiza wymiarowa nie potrzebuje do swojego uzasadnienia równań różniczkowych, lecz, przeciwnie, można ją z powodzeniem stosować do rozwiązywania niektórych równań różniczkowych.

7. Na zakończenie wspomnimy jeszcze o związku analizy wymiarowej z *teorią modelowania.*

W interpretacji fizycznej analizy wymiarowej opisujemy badane zjawisko za pomocą pewnej funkcji $F = \Phi(A_1, \ldots, A_m; P_1, \ldots, P_q)$, gdzie $A_1, \ldots, A_m$ są wielkościami wymiarowo niezależnymi, a $P_1, \ldots, P_q$ wyrażają się przez $A_1, \ldots, A_m$ wzorami

$$(21) \qquad P_1 = \pi_1 A_1^{r_{11}} \ldots A_m^{r_{m1}}, \qquad \ldots, \qquad P_q = \pi_q A_1^{r_{1q}} \ldots A_m^{r_{mq}}.$$

Modelowanie zjawiska opisanego za pomocą funkcji Φ polega ogólnie mówiąc na tym, że wartości $A_1, \ldots, A_m, P_1, \ldots, P_q$ mnożymy odpowiednio przez pewne liczby $\lambda_1, \ldots, \lambda_m, \mu_1, \ldots, \mu_q$, to znaczy podstawiamy

$$A_1 = \lambda_1 A'_1, \quad \ldots, \quad A_m = \lambda_m A'_m, \tag{28}$$
$$P_1 = \mu_1 P'_1, \quad \ldots, \quad P_q = \mu_q P'_q.$$

Liczby $\lambda_1, \ldots, \lambda_m, \mu_1, \ldots, \mu_q$ nazywamy *skalami* modelu. Oznaczmy

$$F' = \Phi(A'_1, \ldots, A'_m;\ P'_1, \ldots, P'_q).$$

Pytamy, jaka jest skala F/F'.

Warunek jednorodności wymiarowej gwarantuje nam, że *skala F/F' jest liczbą*. Twierdzenie π nakłada na tę skalę pewne warunki. Jest mianowicie na podstawie twierdzenia π

$$F = \varphi(\pi_1, \ldots, \pi_q) A_1^{f_1} \ldots A_m^{f_m}, \qquad F' = \varphi(\pi'_1, \ldots, \pi'_q) A_1'^{f_1} \ldots A_m'^{f_m}, \tag{22}$$

gdzie

$$\pi'_1 = \mu_1^{-1} \lambda_1^{r_{11}} \ldots \lambda_m^{r_{m1}}, \quad \ldots, \quad \pi'_q = \mu_q^{-1} \lambda_1^{r_{1q}} \ldots \lambda_m^{r_{mq}}.$$

Wobec tego

$$\frac{F}{F'} = \frac{\varphi(\pi_1, \ldots, \pi_q)}{\varphi(\pi'_1, \ldots, \pi'_q)} \lambda_1^{f_1} \ldots \lambda_m^{f_m}.$$

Tak postawione i rozwiązane zagadnienie modelowania jest jednak dla praktyki zbyt ogólne i mało przydatne. Aby bowiem z niego skorzystać, musimy znać wartości funkcji liczbowej $\varphi(\pi_1, \ldots, \pi_q)$, której za pomocą analizy wymiarowej właśnie nie możemy wyznaczyć. Z tego powodu nakładamy na skale $\lambda_1, \ldots, \lambda_m, \mu_1, \ldots, \mu_q$ dodatkowe warunki, a mianowicie żądamy, żeby

$$\pi_1 = \pi'_1, \quad \ldots, \quad \pi_q = \pi'_q. \tag{29}$$

Wtedy na $m+q$ skal $\lambda_1, \ldots, \lambda_m, \mu_1, \ldots, \mu_q$ nakładamy q warunków, a zatem możemy dowolnie wybrać tylko m skal, to znaczy tyle, ile jest wielkości $A_1, \ldots, A_m$ wymiarowo niezależnych. Przy tych założeniach otrzymujemy

$$\frac{F}{F'} = \lambda_1^{f_1} \ldots \lambda_m^{f_m}. \tag{30}$$

Wielkości bezwymiarowe $\pi_1, \ldots, \pi_q$ nazywają się zwykle *niezmiennikami podobieństwa*. Dwa zjawiska opisane za pomocą tej samej funkcji Φ nazywamy podobnymi, jeżeli ich niezmienniki podobieństwa są równe. Warunki (29) nazywają się *kryteriami podobieństwa*.

Przykład 6. Zakładamy, że moc N silnika zależy od długości $L_1, L_2, \ldots$, od mas $M_1, M_2, \ldots$ wszystkich jego części, od sił $R_1, R_2 \ldots$ działających na jego części, od prędkości $C_1, C_2, \ldots$ jego części i od ciśnień $P_1, P_2, \ldots$ w jego cylindrach. Napiszemy to symbolicznie

$$N = \Phi(L, M, R, C, P).$$

Niech skale wszystkich długości będą λ, skale wszystkich mas μ i skale wszystkich sił ϱ. Pytamy, jaka jest skala ν mocy N silników podobnych.

Obieramy układ jednostek cm, g, sek. Z definicji fizycznych mamy wymiary

$$[N] = [\mathrm{cm}^2\,\mathrm{g}\,\mathrm{sek}^{-3}], \quad [L] = [\mathrm{cm}], \quad [M] = [\mathrm{g}], \quad [R] = [\mathrm{cm}\,\mathrm{g}\,\mathrm{sek}^{-2}],$$

$$[C] = [\mathrm{cm}\,\mathrm{sek}^{-1}], \quad [P] = [\mathrm{cm}^{-1}\,\mathrm{g}\,\mathrm{sek}^{-2}].$$

Sprawdzamy, że wielkości L, M, R są wymiarowo niezależne. Obliczamy niezmienniki podobieństwa:

$$\pi_1 = PL^2/R, \qquad \pi_2 = CM^{1/2}/(LR)^{1/2}.$$

Na podstawie twierdzenia π otrzymujemy, po wykonaniu odpowiednich obliczeń,

$$N = \varphi(\pi_1, \pi_2) L^{1/2} M^{-1/2} R^{3/2}.$$

Z wzoru (30) otrzymujemy zatem

$$\nu = \lambda^{1/2} \mu^{-1/2} \varrho^{3/2}.$$

Skale λ, μ, ϱ są w zasadzie zupełnie dowolne. Możemy więc dobierać nie tylko wymiary liniowe modelu, lecz również materiał, z którego ma być model sporządzony (dobierając mianowicie skalę μ), a także obciążenie modelu (dobierając skalę ϱ). Jeżeli żądamy dodatkowo, żeby materiał modelu i oryginału były jednakowe, to zakładamy tym samym, że masy zmieniamy w tej samej skali co objętości, a więc

$$\mu = \lambda^3.$$

Jeżeli żądamy jeszcze, żeby obciążenia modelu zmieniły się w tej samej skali co objętości, to

$$\varrho = \lambda^3.$$

Wtedy

$$\nu=\lambda^{7/2}.$$

Warto zauważyć, że wtedy na podstawie kryteriów podobieństwa (29) musi być skala π ciśnień równa λ; nakłada to pewne ograniczenia na procesy termiczne w modelu. Skala γ prędkości musi być wtedy równa $\lambda^{1/2}$.

Na przykład, model silnika 4 razy mniejszego, $\lambda=1/4$, od oryginału ma moc 128 razy mniejszą od mocy oryginału, jeżeli, *notabene*, wszystkie przyjęte założenia są spełnione. Ciśnienie w cylindrach modelu musi być 4 razy mniejsze od ciśnień w oryginale, ale prędkości w modelu mają być tylko 2 razy mniejsze od odpowiednich prędkości w oryginale.

Jak widać z powyższego przykładu, kryteria podobieństwa nakładają na modele pewne ograniczenia. Może się zdarzyć, że nie dadzą się zrealizować wszystkie kryteria podobieństwa. Wtedy modelowanie jest niemożliwe. Niekiedy w praktyce rezygnuje się świadomie z niektórych kryteriów podobieństwa i otrzymuje się, rzecz jasna, wyniki, które są ważne z odpowiednimi zastrzeżeniami. Kwestia, które z kryteriów podobieństwa można odrzucić, zależy od klasy zjawisk i od sposobu ich opisania. Kwestii tej nie będę tutaj omawiał, powinna ona stanowić przedmiot osobnej pracy.

Prace cytowane

[1] Garret. Birkhoff, *Hydrodynamics*, New-York 1950.

[2] P. W. Bridgman, *Dimensional Analysis*, New-York 1931.

[3] E. Buckingham, *On Physically Similar Systems*, Physical Reviews IV, (1914), 4, p. 345.

[4] H. B. Dorgello and J. A. Schouten, *On Unities and Dimensions*, I, II, and III, Proceedings of Koninklijke Nederlandsche Akademie van Wetenschappen XLIX (1946), 4 p. 1-32.

[5] S. Drobot, *On the foundations of Dimensional Analysis*, Studia Mathematica 14 (1953) p. 84 - 99.

[6] — *O obliczeniach w technice*, Matematyka 5 (22) 1952, str. 18 - 25.

[7] S. Drobot i M. Warmus, *Dimensional Analysis im sampling inspection of merchandise*, Rozprawy Matematyczne 5 (1954).

[8] T. Ehrenfest-Afanassjewa, *Der Dimensionsbegriff und der analytische Bau physikalischer Gleichungen*, Mathematische Annalen 77 (1916), Heft 2, S. 259 - 276.

[9] E. Fues, *Über die Grenzleistung von Dimensionsbetrachtungen*, Zeitschrift für Physik 107 (1937), S. 662 - 668.

[10] И. М. Гельфанд, *Лекции по линейной алгебре,* Москва-Ленинград 1951.

[11] М. В. Кирпичев и П. К. Конаков, *Математические основы теории подобия,* Москва-Ленинград 1949.

[12] Л. Ландау и Г. Лифшиц, *Механика сплошных сред,* Москва-Ленинград 1944, стр. 111 - 112.

[13] H. L. Langhaar, *Dimensional Analysis and Theory of Models,* New-York 1951.

[14] I. Newton, *Principia,* 1686, Lib. II, VII propos. 32, 33.

[15] Lord Rayleigh, *The Principle of Similitude,* Nature 95 (1915), p. 66 i 644.

[16] O. Reynolds, *An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous, and of the law of resistance in parallel channels,* Philosophical Transactions of Royal Society, A, 174 (1883), p. 935.

[17] — *On the dynamical theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criterion,* Philosophical Transactions of Royal Society, A, 186 (1894), p. 123.

[18] D. Riabouchinsky, *Letters to the Editor,* Nature 95 (1915), p. 591.

[19] Л. Н. Седов, *Методы подобия и размерности в механике* Москва-Ленинград 1951.

[20] J. Wallot, *Dimensionen, Einheiten, Massysteme,* Handbuch der Physik, Bd II, Berlin 1926, S. 1 - 39.

[21] Н. Г. Чеботарев, *Доказательство π-теоремы,* Собрание сочинений, Т. II, Москва-Ленинград 1951, стр. 216.

Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk

(Praca wpłynęła dnia 17. 3. 1953 r.)

С. ДРОБОТ (Вроцлав)

ОБ АНАЛИЗЕ РАЗМЕРНОСТИ

РЕЗЮМЕ

В физике, технике и естествознании употребляется часто анализ размерности, называемый также методом подобия. Несмотря на его многочисленные приложения, анализ размерности не имеет достаточно надежного и простого математического обоснования. В настоящей работе представлена математическая теория анализа размерности и общие принципы его применения.

Размерные величины $A, B, C, \dots$ считаются элементами некоторого линейного пространства Π. Аксиомы этого пространства, данные формулами (1)-(7), отличаются от обычных тем, что вместо суммы выступает в них произведение AB величин A и B а вместо умножения на число — степень A^a с действительным показателем a. Положительные числа $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ (без-

размерные величины) являются также элементами пространства Π. Величины $A_1,\dots,A_m$ называются размерно независимыми, если из равенства

$$A_1^{a_1}\dots A_m^{a_m}=a$$

следует $a_1=\dots=a_m=0$ (и $a=1$). Считается, что существует n размерно независимых величин, а не существует $n+1$. Обычным образом вводится база — система единиц. Определяется затем взаимно-однозначное преобразование Θ величин из Π удовлетворяющие условиям:

$$\Theta(AB)=\Theta A\cdot\Theta B,\qquad \Theta A^a=(\Theta A)^a,\qquad \Theta a=a.$$

Рассматриваются функции $\Phi(Z_1,\dots,Z_m)$, определенные для величин $Z_1,\dots,Z_m$ из Π и принимающие значения в Π. Функция Φ называется размерно-инвариантной, если для любого Θ справедливо тождество (14). Функция Φ называется размерно-однородной, если для любых безразмерных $\zeta_1,\dots,\zeta_s$ существует такое безразмерное ζ, что удовлетворяет тождеству (20). Доказывается основная π-теорема анализа размерности: Если в (22) $A_1,\dots,A_m$ размерно независимы, а $P_1,\dots,P_q$ выражаются формулами (21), то всякая размерно-инвариантная и однородная функция Φ имеет вид (22), где $\varphi(\pi_1,\dots,\pi_q)$ безразмерная функция безразмерных переменных $\pi_1,\dots,\pi_q$, а действительные показатели степени $f_1,\dots,f_m$ не зависят ни от $A_1,\dots,A_m$ ни от $\pi_1,\dots,\pi_q$. Условия размерной инвариантности и однородности существенны и без какого либо из них — теорема неверна. Определяется размерность $[A]$ величины A и вводятся для величин одной размерности все известные для действительных чисел действия.

Общие принципы применения анализа размерности иллюстрируются разными примерами. Детально изучен известный как парадоксальный пример теплоотдачи тела в потоке жидкости и разъяснены недоразумения, связанные с этим вопросом. Выяснены: роль физических гипотез, роль эксперимента и вопрос о числе единиц в системе. Рассмотрены примеры из сопротивления материалов, турбулентного движения, механики. В следующей работе будет показано новое применение анализа размерности в теории выборочного испытания. Показаны, тоже на примере, недостаточно еще изученные возможности применения анализа размерности к нелинейным дифференциальным уравнениям с частными производными. В конце формулируется точно общий принцип подобия, основа опытов на моделях.

S. DROBOT (Wrocław)

ON DIMENSIONAL ANALYSIS

SUMMARY

Dimensional Analysis, called also the Principle of Similitude, is a computing method used in practical problems of physics, technics and natural sciences. In spite of its numerous applications, Dimensional Analysis lacks a simple and complete mathematical foundation. Our paper gives the mathe-

matical theory and general principles of the applications of Dimensional Analysis.

Dimensional quantities $A, B, C, \dots$ are considered as elements of a linear space Π. The axioms of this space are expressed by formulas (1) - (7), different from the usual ones in the following respects: instead of the sum, the product AB of quantities, and instead of the multiplication, the power A^a, with real exponent a, are introduced. Positive numbers $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ (dimensionless quantities) also belong to the space Π. The quantities $A_1, \dots, A_m$ will be called dimensionally independent when the equality

$$A_1^{a_1} \dots A_m^{a_m} = \alpha$$

implies $a_1 = \dots = a_m = 0$ (and $\alpha = 1$). We assume the existence in Π of n quantities dimensionally independent, but not of $n+1$ such quantities. Then, as usual, a basis, called a system of units, is defined. A one-to-one transformation Θ of quantities will be called a dimensional transformation when

$$\Theta(AB) = (\Theta A)(\Theta B), \qquad \Theta(A^a) = (\Theta A)^a, \qquad \Theta\alpha = \alpha.$$

Further we consider functions $\Phi(Z_1, \dots, Z_s)$ with $Z_1, \dots, Z_s$ and the value of Φ belonging to Π. Such a function will be called dimensionally invariant if the identity (14) holds for any Θ. It will be called dimensionally homogeneous if, given any system $\zeta_1, \dots, \zeta_s$ of dimensionless quantities, there exists a dimensionless ζ such that the identity (20) holds.

The following basic π-Theorem of Dimensional Analysis is established:

If in (22) the quantities $A_1, \dots, A_m$ are dimensionally independent and the quantities $P_1, \dots, P_q$ are expressed by formulas (21), then any dimensionally invariant and homogeneous function Φ takes the form (22), where $\varphi(\pi_1, \dots, \pi_q)$ is a dimensionless function of dimensionless variables $\pi_1, \dots, \pi_q$ and the real exponents $f_1, \dots, f_m$ depend neither on $A_1, \dots, A_m$ nor on $\pi_1, \dots, \pi_q$.

The π-Theorem fails when any of the two assumptions on Φ, either its dimensional invariance or its homogenity, is omitted.

Further, the notion of the dimension $[A]$ of the quantity A is introduced. It is possible to define, so to say, inside the same dimension all operations known for real numbers.

General principles of the application of Dimensional Analysis are illustrated by some examples. The example, known as paradoxical, of the exchange of heat in a liquid is considered in detail and the ambiguities removed. The respective parts played by physical hypotheses and by experience are explained and the question of the number of units is examined. Some applications of Dimensional Analysis to problems of strength of materials, of turbulence, and of general mechanics are explained. Applications to problems of sampling inspection of merchandise will be given in a separate paper. Differential equations also present an interesting, but not yet completely explored, field of applications of Dimensional Analysis: an example of an application to a non-linear partial equation is included in our paper. Finally, the general Principle of Similitude as a foundation of the model testing is formulated.