J. ODERFELD (Warszawa)

# *ROZKŁAD ILOCZYNU POTĘG WYMIERNYCH ZMIENNYCH LOSOWYCH NIEZALEŻNYCH*

## 1. Wstęp

W wielu zastosowaniach statystyki matematycznej do techniki i nauk przyrodniczych mamy do czynienia z jednomianami, do których wchodzą niezależne zmienne losowe, to jest ze zmiennymi losowymi $Z$ typu

$$Z = X^{\alpha} Y^{\beta} U^{\gamma} \ldots, \tag{1}$$

gdzie $X, Y, U$ są zmiennymi losowymi o znanych rozkładach, a $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ są stałymi liczbami wymiernymi.

Zachodzi to na przykład przy obliczaniu pól i objętości, w obliczeniach wytrzymałości konstrukcji, w chemicznej analizie jakościowej, w statystycznej kontroli jakości.

Jeśli każda z liczb $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ jest równa 1 lub $-1$, to mamy do czynienia z iloczynami i ilorazami, na przykład

$$Z = \frac{XY\ldots}{UW\ldots}. \tag{2}$$

Teoretyczne metody wyznaczania rozkładu iloczynów i ilorazów są proste. Zawsze bowiem można napisać wielokrotną całkę i podać obszar całkowania. Nie jest to jednak załatwieniem sprawy z punktu widzenia praktyka, któremu jest potrzebny rozkład $Z$ w postaci analitycznej lub tablicowej. Efektywne rozwiązania analityczne są znane w niewielu tylko przypadkach, głównie ze względu na poważne trudności rachunkowe. W tej sytuacji praktyk radzi sobie półśrodkami, które czasem wystarczają, a czasem nie, o czym praktyk przeważnie nie wie. Do takich półśrodków należy na przykład znana metoda różniczki zupełnej, bardzo rozpowszechniona w technice. Jak wiadomo, stosowalność tej metody ogranicza się do wąskiego przedziału zmienności zmiennych losowych w okolicy wartości średniej. Nie trudno zresztą podać przykład, kiedy ta metoda zupełnie zawodzi. Dlatego wydało się rzeczą celową naszkicować bardzo prosty sposób numeryczny, przy którego użyciu można z dowolną dokładnością wyznaczyć rozkład $Z$ dla zupełnie dowolnych rozkładów $X, Y, \ldots$

Sposób ten opiera się na dobrze znanej, prymitywnej metodzie numerycznego całkowania. Nowość — jak się zdaje — stanowi użycie tu tak zwanych *ciągów Renarda* zaproponowanych przez K. Renarda w 1897 r. Korzyść polega na tym, że w obliczeniu powtarzają się stale te same uprzywilejowane liczby, co bardzo ułatwia rachunek.

## 2. Ciągi Renarda

Opis postępowania poprzedzimy krótkim przypomnieniem niektórych własności ciągów Renarda. Wyrazy $x_i$ ciągu Renarda mają ogólną postać

(3) $$x_i = 10^{(is+r)/n},$$

gdzie:

*wskaźnik bieżący* $i$ przebiega zbiór wszystkich liczb całkowitych $\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$;

*wykładnik*[1]) $n$ ma postać $5 \cdot 2^k$, gdzie $k$ jest liczbą naturalną lub zerem;

*skok* $s$ jest liczbą całkowitą, różną od zera;

*rząd* $r$ jest liczbą naturalną lub zerem.

W niniejszym opracowaniu będziemy używali dwóch szczególnych postaci ciągów Renarda.

Ciąg o wyrazach (3) w których $s=1$, $r=0$, a więc ciąg o wyrazach $x_i = 10^{i/n}$, nazywamy *normalnym ciągiem Renarda* i oznaczamy $\mathcal{R}n$.

Ciąg o wyrazach (3) w których $s \neq 1$, $r=0$, a więc ciąg o wyrazach $x_i = 10^{is/n}$, nazywamy *pochodnym ciągiem Renarda* i oznaczamy $\mathcal{R}n/s$.

Każdy ciąg $\mathcal{R}n/s$ jest podciągiem ciągu $\mathcal{R}n$. Oczywiście $\mathcal{R}n/1 = \mathcal{R}n$.

---

[1]) Nazwy *wykładnik, skok* i *rząd* przyjęto zgodnie z terminologią ciągów Renarda ustaloną w polskim piśmiennictwie technicznym.

Wprowadźmy funkcję $L_n(x_i)$ określoną w następujący sposób: Jeśli $x_i$ jest wyrazem pochodnego ciągu Renarda $\mathcal{R}n/s$, to

$$L_n(x_i) = is. \tag{4}$$

Dla wyrazów $x_i$ normalnego ciągu Renarda $s=1$ i mamy wtedy $L_n(x_i)=i$. Łatwo zauważyć, że

$$L_n(x_i) = n \lg_{10} x_i.$$

Elementarny rachunek wskazuje następujące własności ciągów Renarda:

Jeśli $A_1, A_2, \ldots, A_t$ są wyrazami ciągu $\mathcal{R}n$, a $p_1, p_2, \ldots, p_t$ są liczbami całkowitymi, to jednomian

$$A_1^{p_1} A_2^{p_2} \ldots A_t^{p_t} \tag{5}$$

jest wyrazem ciągu $\mathcal{R}n$. Zachodzi zależność

$$L_n(A_1^{p_1} A_2^{p_2} \ldots A_t^{p_t}) = p_1 L_n(A_1) + p_2 L_n(A_2) + \ldots + p_t L_n(A_t).$$

W szczególności odwrotności, iloczyny i ilorazy wyrazów ciągu $\mathcal{R}n$ są wyrazami ciągu $\mathcal{R}n$.

Jeśli $A$ jest wyrazem ciągu $\mathcal{R}n/s$, a $p$ jest liczbą całkowitą, to $A^{p/s}$ jest wyrazem ciągu $\mathcal{R}n/p$, a więc również wyrazem ciągu $\mathcal{R}n$. Zachodzi zależność

$$L_n(A^{p/s}) = \frac{p}{s} L_n(A).$$

Jeśli $A_1$ jest wyrazem ciągu $\mathcal{R}n/s_1$, zaś $A_2$ wyrazem ciągu $\mathcal{R}n/s_2, \ldots, A_t$ wyrazem ciągu $\mathcal{R}n/s_t$, a $p_1, p_2, \ldots, p_t$ są liczbami całkowitymi, to jednomian

$$A_1^{p_1/s_1} A_2^{p_2/s_2} \ldots A_t^{p_t/s_t} \tag{6}$$

jest wyrazem ciągu $\mathcal{R}n/d$, gdzie $d$ jest największym wspólnym dzielnikiem $p_1, p_2, \ldots, p_t$, a więc jednomian (6) jest wyrazem ciągu $\mathcal{R}n$. Zachodzi zależność

$$L_n(A_1^{p_1/s_1} A_2^{p_2/s_2} \ldots A_t^{p_t/s_t}) = \frac{p_1}{s_1} L_n(A_1) + \frac{p_2}{s_2} L_n(A_2) + \ldots + \frac{p_t}{s_t} L_n(A_t).$$

Uzyskane wiadomości o ciągach Renarda zastosujemy do badania rozkładów jednomianowych funkcji zmiennych losowych o znanych rozkładach.

Jeśli zmienne losowe $X, Y, Z, \ldots$ przyjmują *dowolne* wartości z ciągu $\mathcal{R}n$, a $\alpha$, $\beta$, $\gamma, \ldots$ są liczbami całkowitymi, to zmienna losowa (1) przyjmuje wartości z ciągu $\mathcal{R}n$.

Tablica 1

| $x$ | $L(x)$ | $x$ | $L(x)$ | $x$ | $L(x)$ | $x$ | $L(x)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1,0000 | 0 | 1,9953 | 24 | 3,9811 | 48 | 6,3096 | 64 |
| 1,0292 | 1 | 2,0535 | 25 | 4,0973 | 49 | 6,4938 | 65 |
| 1,0592 | 2 | 2,1135 | 26 | 4,2170 | 50 | 6,6834 | 66 |
| 1,0902 | 3 | 2,1752 | 27 | 4,3401 | 51 | 6,8786 | 67 |
| 1,1220 | 4 | 2,2387 | 28 | 4,4668 | 52 | 7,0795 | 68 |
| 1,1548 | 5 | 2,3041 | 29 | 4,5973 | 53 | 7,2862 | 69 |
| 1,1885 | 6 | 2,3714 | 30 | 4,7316 | 54 | 7,4990 | 70 |
| 1,2232 | 7 | 2,4406 | 31 | 4,8697 | 55 | 7,7180 | 71 |
| 1,2589 | 8 | 2,5119 | 32 | 5,0119 | 56 | 7,9433 | 72 |
| 1,2957 | 9 | 2,5852 | 33 | 5,1582 | 57 | 8,1752 | 73 |
| 1,1335 | 10 | 2,6608 | 34 | 5,3089 | 58 | 8,4140 | 74 |
| 1,3725 | 11 | 2,7384 | 35 | 5,4639 | 59 | 8,6596 | 75 |
| 1,4125 | 12 | 2,8182 | 36 | 5,6234 | 60 | 8,9125 | 76 |
| 1,4538 | 13 | 2,9007 | 37 | 5,7876 | 61 | 9,1728 | 77 |
| 1,4962 | 14 | 2,9854 | 38 | 5,9566 | 62 | 9,4406 | 78 |
| 1.5389 | 15 | 3,0726 | 39 | 6,1306 | 63 | 9,7163 | 79 |
| 1,5849 | 16 | 3,1623 | 40 | | | | |
| 1,6312 | 17 | 3,2546 | 41 | | | | |
| 1,6788 | 18 | 3,3497 | 42 | | | | |
| 1,7278 | 19 | 3,4475 | 43 | | | | |
| 1,7783 | 20 | 3,5481 | 44 | | | | |
| 1,8302 | 21 | 3,6518 | 45 | | | | |
| 1,8837 | 22 | 3,7584 | 46 | | | | |
| 1,9387 | 23 | 3,8681 | 47 | | | | |

| $x$ | $L(x)$ |
|---|---|
| ........ | ........ |
| od 0,01 do 0,1 | od −160 do −80 |
| od 0,1 do 1 | od −80 do 0 |
| od 1 do 10 | od 0 do 80 |
| od 10 do 100 | od 80 do 160 |
| od 100 do 1000 | od 160 do 240 |
| ........ | ........ |

Jeśli zmienne losowe $X, Y, Z, \ldots$ przyjmują *stosownie wybrane* wartości z ciągu $\mathcal{R}n$, a $\alpha$, $\beta$, $\gamma, \ldots$ są liczbami wymiernymi, to zmienna losowa (1) przyjmuje wartości z ciągu $\mathcal{R}n$.

W zastosowaniach technicznych zwykle przyjmuje się $n = 5, 10, 20, 40, 80$. Odpowiadają temu ciągi $\mathcal{R}5$, $\mathcal{R}10$, $\mathcal{R}20$, $\mathcal{R}40$, $\mathcal{R}80$.

Wyrazy tych ciągów zaokrąglone według pewnych zasad nazywamy *liczbami normalnymi*. Ciągi liczb normalnych są podane w Polskiej Normie PN/N - 02100.

W zastosowaniach numerycznych niniejszej pracy przyjmujemy, że zawsze $n=80$, wobec czego możemy pisać krótko $L(\ )$ zamiast $L_{80}(\ )$.

Wyrazy $x$ ciągu $\mathcal{R}80$ zaokrąglone do czwartego znaku spisano, według zacytowanej normy, w tablicy 1 dodając wartości $L(x)$.

Należy zauważyć, że nasze definicje nieco odbiegają od przyjętych w Polskiej Normie.

### 3. Zastosowanie ciągów Renarda

**3.1. Uwagi ogólne.** Uważamy za znane dystrybuanty $F_1, F_2, \ldots$ zmiennych losowych $X, Y, \ldots$ i szukamy dystrybuanty $F$ zmiennej losowej $Z$, określonej przez wyrażenie (1).

Zakładamy, że $X, Y, \ldots$ przybierają tylko dodatnie wartości. To zwężające założenie jest dopuszczalne we wszystkich zastosowaniach wymienionych we wstępie, ze względu na fizyczny charakter występujących wielkości. Założenie to będzie ważne w całym rozdziale 3.

**3.2. Przypadek jednej zmiennej losowej.** Przyjmijmy, że wyrażenie (1) ma postać

$$Z = X^{p/s}, \tag{7}$$

gdzie $p/s > 0$.

Możemy napisać tożsamości

$$F_1(x) = P(X \leqslant x) = P(X^{p/s} \leqslant x^{p/s}) = P(Z \leqslant x^{p/s}). \tag{8}$$

Biorąc na $x$ kolejne wyrazy ciągu Renarda $\mathcal{R}n/s$ otrzymamy na $x^{p/s}$ kolejne wyrazy ciagu Renarda $\mathcal{R}n/p$. Mamy więc

$$P(Z \leqslant z) = F_1(x), \tag{9}$$

gdzie

$$L(x) = \frac{s}{p} L(z).$$

Przykład 1. Zmienna losowa $X$ ma rozkład normalny $N(40, 2{,}5)$. Wyznaczyć dystrybuantę zmiennej losowej $Z = X^{2/3}$.

Obliczenie ujmujemy w tablicę 2.

W pierwszym wierszu tablicy wypisano wskaźniki bieżące ciągu Renarda $\mathcal{R}\,80/3$, a w wierszu drugim odpowiadające im wyrazy tego ciągu wybrane z tablicy 1.

W wierszu 3 podano wartości dystrybuanty $F_1(x)$ otrzymane z tablicy rozkładu normalnego.

W wierszu 4 podano wartości $2/3 \cdot L(x)$ i odczytując z tablicy 1 odpowiadające im wartości $z$ otrzymano wiersz piąty.

Wiersze 3 i 5 dają poszukiwaną dystrybuantę zmiennej losowej $Z$. Na przykład $P(Z \leqslant 11{,}220) = 0{,}16693$.

Tablica 2

| $L(x)$ | 120 | 123 | 126 | 129 | 132 | 135 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 31,623 | 34,475 | 37,584 | 40,973 | 44,668 | 48,697 |
| $F_1(x)$ | 0,00040 | 0,01355 | 0,16693 | 0,65143 | 0,96906 | 0,99975 |
| $L(z) = \frac{2}{3} L(x)$ | 80 | 82 | 84 | 86 | 88 | 90 |
| $z$ | 10,000 | 10,592 | 11,220 | 11,885 | 12,589 | 13,355 |

**3.3. Przypadek ilorazu.** Przyjmijmy, że wyrażenie (1) ma postać

$$Z = \frac{X}{Y}, \tag{10}$$

gdzie $X$ i $Y$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o gęstościach odpowiednio $f_1(x)$ i $f_2(y)$ oraz dystrybuantach $F_1(x)$ i $F_2(y)$. Należy wyznaczyć dystrybuantę $F(z)$ rozkładu $Z$.

Jak wiadomo,

$$P(Z \leqslant z) = \iint\limits_{(x/y \leqslant z)} f(x) f(y)\, dx\, dy. \tag{11}$$

Podzielmy przedział, w którym jest określone $X$, na przedziały — nie koniecznie równe — $(x_i, x_{i+1})$.

Podwójną całkę (11) możemy oszacować pisząc

$$P(Z \leqslant z) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} [F_1(x_{i+1}) - F_1(x_{i-1})][1 - F_2(x_i/z)], \tag{12}$$

gdzie $i$ jest liczbą parzystą.

Jeśli wartości na $x_i$ i na $z$ będziemy przyjmowali z ciągu $\mathcal{R}80$, to wartości na $x_i/z$ również będą wyrazami ciągu $\mathcal{R}80$.

Wprowadzając nowe zmienne losowe $L(X)$, $L(Y)$, $L(Z)$ zdefiniowane zgodnie z (6) i oznaczając dystrybuanty zmiennych losowych $L(X)$ i $L(Y)$ odpowiednio przez $\Phi_1$ i $\Phi_2$, możemy przepisać (12) w postaci

$$(13)\quad P(Z \leqslant z) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \{\Phi_1[L(x_{i+1})] - \Phi_1[L(x_{i-1})]\} \{1 - \Phi_2[L(x_i) - L(z)]\}.$$

Oznaczmy dla dogodności pierwszy nawias klamrowy przez $a$, drugi przez $b$. Otrzymujemy

$$(13')\quad P(Z \leqslant z) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} ab.$$

P r z y k ł a d 2. Zmienna losowa $X$ ma rozkład normalny $N(500, 80)$, a zmienna losowa $Y$ ma rozkład normalny $N(40, 2{,}5)$. Wyznaczyć dystrybuantę zmiennej losowej $Z = X/Y$.

Przykład ten wybraliśmy dlatego, że znane jest jego rozwiązanie analityczne, co pozwala na oszacowanie błędu zaproponowanej metody. Zrobimy to w rozdziale 4.

Obliczenie ujęto w tablicę 3.

W kolumnie 1 są wartości $L(x_i)$. Biorąc z tablicy 1 odpowiadające im wyrazy ciągu $\mathcal{R}80$ obliczamy wartości $a$ spisane w kolumnie 2. Na przykład dla $L(x_i) = 200$ mamy

$$x_{201} = 325{,}46, \qquad \Phi_1(201) = F_1\left(\frac{325{,}46 - 500}{80}\right) = 0{,}01456,$$

$$x_{199} = 307{,}26, \qquad \Phi_1(199) = F_1\left(\frac{307{,}26 - 500}{80}\right) = 0{,}00800,$$

$$a = \Phi_1(201) - \Phi_1(199) = 0{,}00656.$$

W 1 wierszu nagłówka są wartości $L(x_i) - L(z)$. Biorąc z tablicy 1 odpowiadające im wyrazy ciągu $\mathcal{R}80$ obliczamy wartości $b$ spisane w kolumnie 2. Na przykład dla $L(x_i) - L(z) = 130$ mamy odpowiadający wyraz ciągu $\mathcal{R}80$ 42,170; a więc

$$b = 1 - \Phi_2(130) = 1 - F_2\left(\frac{42{,}170 - 40}{2{,}5}\right) = 0{,}19271.$$

**Tablica 3**

| $L(x_i)$ | $10^5 a$ | $L(x_i)-L(z)$ / $10^5 b$ → / $10^6 S$ ↓ | 118 | 120 | 122 | 124 | 126 | 128 | 130 | 132 | 134 | 136 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $10^5 b$ | 10000 | 99960 | 99536 | 96466 | 83307 | 53014 | 19271 | 3094 | 174 | 1 |
| 184 | 5 | 120 | 50 | 50 | 50 | 48 | 42 | 26 | 10 | 2 | 0 | 0 |
| 186 | 9 | 240 | 90 | 90 | 90 | 87 | 75 | 48 | 17 | 3 | 0 | 0 |
| 188 | 17 | 380 | 170 | 170 | 169 | 164 | 142 | 90 | 33 | 5 | 0 | 0 |
| 190 | 31 | 690 | 310 | 310 | 309 | 299 | 258 | 164 | 60 | 10 | 1 | 0 |
| 192 | 57 | 1270 | 570 | 570 | 567 | 550 | 475 | 302 | 110 | 18 | 1 | 0 |
| 194 | 108 | 2350 | 1080 | 1080 | 1075 | 1041 | 900 | 573 | 208 | 33 | 2 | 0 |
| 196 | 200 | 4350 | 2000 | 1999 | 1990 | 1929 | 1666 | 1060 | 385 | 62 | 3 | 0 |
| 198 | 365 | 8000 | 3650 | 3649 | 3633 | 3521 | 3041 | 1935 | 703 | 113 | 6 | 0 |
| 200 | 656 | 14560 | 6560 | 6557 | 6530 | 6328 | 5465 | 3478 | 1264 | 203 | 11 | 0 |
| 202 | 1159 | 26150 | 11590 | 11585 | 11536 | 11480 | 9655 | 6144 | 2234 | 359 | 20 | 0 |
| 204 | 1983 | 45980 | 19830 | 19822 | 19738 | 19129 | 16520 | 10513 | 3821 | 614 | 34 | 0 |
| 206 | 3257 | 78550 | 32570 | 32557 | 32419 | 31419 | 27133 | 17267 | 6276 | 1008 | 56 | 0 |
| 208 | 5103 | 129580 | 51030 | 51010 | 50793 | 49226 | 42512 | 27053 | 9834 | 1579 | 87 | 1 |
| 210 | 7514 | 204720 | 75140 | 75110 | 74791 | 72456 | 62597 | 39835 | 14480 | 2325 | 128 | 1 |
| 212 | 10266 | 307380 | 102660 | 102619 | 102484 | 99031 | 85523 | 54424 | 19783 | 3176 | 176 | 1 |
| 214 | 12792 | 435300 | 127920 | 127869 | 127326 | 123399 | 106566 | 67815 | 24651 | 3958 | 219 | 1 |
| 216 | 14310 | 578400 | 143100 | 143043 | 142436 | 138043 | 119212 | 75863 | 27577 | 4428 | 245 | 1 |
| 218 | 14064 | 719040 | 140640 | 140584 | 139987 | 135670 | 117163 | 74559 | 27103 | 4351 | 240 | 1 |
| 220 | 11852 | 837560 | 118520 | 118472 | 117970 | 114331 | 98735 | 62832 | 22840 | 3667 | 203 | 1 |
| 222 | 8364 | 921200 | 83640 | 83606 | 83252 | 80684 | 69678 | 44340 | 16118 | 2588 | 143 | 1 |
| 224 | 4786 | 969060 | 47860 | 47840 | 47638 | 46169 | 39871 | 25372 | 9223 | 1481 | 82 | 0 |
| 226 | 2150 | 990560 | 21500 | 21491 | 21400 | 20740 | 17911 | 11398 | 4143 | 665 | 37 | 0 |
| 228 | 730 | 997860 | 7300 | 7297 | 7266 | 7042 | 6081 | 3870 | 1407 | 226 | 12 | 0 |
| 230 | 180 | 999660 | 1800 | 1799 | 1791 | 1736 | 1500 | 954 | 347 | 56 | 3 | 0 |
| 232 | 30 | 999960 | 300 | 300 | 299 | 289 | 250 | 159 | 58 | 9 | 1 | 0 |

| $L(z)$ | $p$ |
|---|---|
| $L(z)=58$ | $p=0{,}0001$ |
| 60 | 0,0003 |
| 62 | 0,0006 |
| 64 | 0,0011 |
| 66 | 0,0022 |
| 68 | 0,0041 |
| 70 | 0,0076 |
| 72 | 0,0137 |
| 74 | 0,0244 |
| 76 | 0,0424 |
| 78 | 0,0718 |
| 80 | 0,1173 |
| 82 | 0,1836 |
| 84 | 0,2740 |
| 86 | 0,3873 |
| 88 | 0,5167 |
| 90 | 0,6496 |
| 92 | 0,7703 |
| 94 | 0,8663 |
| 96 | 0,9320 |
| 98 | 0,9704 |
| 100 | 0,9892 |
| 102 | 0,9966 |
| 104 | 0,9991 |
| 106 | 0,9998 |
| $L(z)=108$ | $p=0{,}9999$ |

ZM-59

Na skrzyżowaniach wierszy i kolumn, w części tablicy 3 ujętej w podwójną ramkę, są iloczyny $10^6ab$.

Zgodnie z wzorem (13') należy dla danej wartości $z$ zsumować wszystkie iloczyny $ab$ na skrzyżowaniach wierszy i kolumn odpowiadających $L(z)$. Leżą one na ukośnych liniach, przy których wypisano wartości $L(z)$. Tu występuje dogodność korzystania z ciągów Renarda. Polega ona na tym, że każde skrzyżowanie kolumny z wierszem odpowiada całkowitej liczbie $L(z)$. Zbędne więc stają się takie zabiegi jak zaliczanie wyników do klas, po czym na ogół potrzebna jest interpolacja.

Osobnego wyjaśnienia wymaga kolumna oznaczona w tablicy 3 symbolem $10^6S$. Otóż $L(x_i)-L(z)$ przybiera we wzorach (13) i (13') wszystkie wartości całkowite od $-\infty$ do $\infty$. Jak jednak widzimy z tablicy 3, dla $L(x_i)-L(z)\leqslant 118$, $b$ jest praktycznie równe jedności. Ponadto dla $L(x_i)-L(z)>136$, $b$ jest praktycznie równe zeru. Pamiętając, że na $i$ przyjmujemy tylko parzyste wartości, możemy przepisać (13') w postaci

$$P(Z\leqslant z)=S+\sum_{i=118+L(z)}^{130+L(z)} ab, \tag{14}$$

gdzie

$$S=\sum_{i=-\infty}^{116+L(z)}. \tag{15}$$

Obliczenie $S$ nie nastręcza trudności, bo jak wynika ze wzoru (13),

$$S=\Phi_1\{L[x_{117+L(z)}]\}=F_1[x_{117+L(z)}]. \tag{16}$$

Jest to więc po prostu dystrybuanta zmiennej losowej $X$. Jej wartości wpisujemy w kolumnie $S$ na przecięciu z ukośnymi liniami dla danych wartości $L(z)$.

Wyniki sumowania napisano na ukośnych liniach, zachowując 4 cyfry znaczące.

Odczytując z tablicy 1 odpowiednie wartości $z$ otrzymano ostatecznie dystrybuantę $Z$ w postaci tablicy 4 (kolumny 2 i 3). O kolumnie czwartej tej tablicy będzie mowa w rozdziale 4.

**3.4. Przypadek iloczynu.** Rozkład iloczynu dwóch niezależnych zmiennych losowych uzyskuje się przez drobną modyfikację wzoru (13). Jest mianowicie

$$(17)\quad P(Z \leqslant z) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \{\Phi_1[L(x_{i+1})] - \Phi_1[L(x_{i-1})]\}\, \Phi_2[L(z) - L(x_i)],$$

przy czym znaczenie symboli jest takie jak w rozdziale 3.3.

Tablica 4

| $L(z)$ | $z$ | $P(Z \leqslant z)$ metodą ciągów Renarda | $P(Z \leqslant z)$ według wzoru Geary'ego | $L(z)$ | $z$ | $P(Z \leqslant z)$ metodą ciągów Renarda | $P(Z \geqslant z)$ według wzoru Geary'ego |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 58 | 5,3089 | 0,0001 | | 84 | 11,220 | 0,2740 | |
| 60 | 5,6234 | 0,0003 | | 86 | 11,885 | 0,3873 | |
| 62 | 5,9566 | 0,0006 | | 88 | 12,589 | 0,5167 | 0,5165 |
| 64 | 6,3096 | 0,0011 | 0,0012 | 90 | 13,335 | 0,6496 | |
| 66 | 6,6834 | 0,0022 | | 92 | 14,125 | 0,7703 | |
| 68 | 7,0795 | 0,0041 | | 94 | 14,962 | 0,8663 | |
| 70 | 7,4990 | 0,0076 | | 96 | 15,849 | 0,9320 | 0,9332 |
| 72 | 7,9433 | 0,0137 | 0,0135 | 98 | 16,788 | 0,9704 | |
| 74 | 8,4140 | 0,0244 | | 100 | 17,783 | 0,9892 | |
| 76 | 8,9125 | 0,0424 | | 102 | 18,837 | 0,9966 | |
| 78 | 9,4406 | 0,0718 | | 104 | 19,953 | 0,9991 | 0,9992 |
| 80 | 10,000 | 0,1173 | 0,1164 | 106 | 21,135 | 0,9998 | |
| 82 | 10,592 | 0,1836 | | 108 | 22,387 | 0,9999 | |

Tablica robocza jest podobna do tablicy 3, tylko sumowanie przebiega od dolnego lewego rogu do górnego prawego.

**3.5. Ogólny przypadek iloczynu wymiernych potęg niezależnych zmiennych losowych.** Jeśli zmienna losowa ma kształt (1), to stosując kilkakrotnie sposoby opisane w poprzednich rozdziałach, otrzymamy dystrybuantę $Z$. Dużym ułatwieniem rachunków będzie okoliczność, że po każdym kroku otrzymujemy wartości dystrybuanty dla argumentów należących do ciągów Renarda, a więc od razu w takiej postaci, jaka jest potrzebna do następnego kroku.

## 4. Dokładność zaproponowanej metody

Pewne pojęcie o dokładności metody może dać porównanie wyników przykładu 2 z rozwiązaniem analitycznym Geary'ego, które dla ilorazu dwóch niezależnych zmiennych losowych jest następujące.

Jeśli licznik ułamka $Z=X/Y$ ma rozkład normalny $N(m_1, \sigma_1)$ a mianownik rozkład normalny $N(m_2, \sigma_2)$ i jeśli $m_2 \gg \sigma_2$, czyli jeśli można przyjąć, że mianownik nigdzie nie jest ujemny, to wyrażenie

$$\frac{m_1 - m_2 Z}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 Z^2}}$$

ma rozkład normalny $N(0,1)$.

W naszym więc przykładzie wyrażenie

$$\frac{500 - 40Z}{\sqrt{6400 + 6{,}25Z^2}}$$

ma rozkład normalny $N(0,1)$.

W ostatniej kolumnie tablicy 4 podano kilka wartości $P(Z \leqslant z)$ obliczonych tym sposobem. Zgodność jest dobra.

### 5. Uwagi końcowe

Na zakończenie spróbujmy odpowiedzieć na dwa naturalne pytania:

1°. Czy mamy od praktyka żądać, żeby w każdym konkretnym przypadku układał tablicę podobną do tablicy 3 i powtarzał to kilkakrotnie, jeśli jest więcej zmiennych niezależnych niż dwie?

Odpowiedź jest przecząca. Tego od praktyka nie można wymagać. Wydaje się jednak, że dla pewnych rozkładów występujących częściej i dla pewnych postaci szczególnych wyrażenia (1) można przygotować dogodne tablice odpowiadające pewnym wartościom parametrów. Zresztą nie zawsze potrzebna jest cała dystrybuanta, zwykle wystarcza jej część, na przykład w okolicy zera lub jedynki.

Zauważymy jeszcze, że celowa może być zmienna gęstość stopniowania, na przykład według ciągu $\mathcal{R}\,320$ w miejscach interesujących, a $\mathcal{R}\,80$ lub nawet $\mathcal{R}\,40$ w miejscach mniej ciekawych.

2° Czy można się zgodzić na podawanie dystrybuanty i frekwencji zależnie od argumentu rosnącego według postępu geometrycznego, zamiast — jak to zwykle bywa — arytmetycznego?

Niewątpliwie stopniowanie w postępie arytmetycznym ułatwia interpolację. Znane są jednak tablice, bardzo dogodne w praktyce, w których tego się nie przestrzega. Zresztą, odczytując w zwykłej tablicy logarytmów liczbę według mantysy, mamy przedziały nierówne.

Zaletą opisanej metody jest możność użycia jej we wszystkich przypadkach, gdy rozkłady niezależnych zmiennych losowych są znane. Postać rozkładów jest przy tym zupełnie obojętna. Może być więc nie tylko analityczna, ale także tablicowa. Pozwala to na wykonywanie operacyj rachunkowych wprost na materiale doświadczalnym, surowym lub wygładzonym znanymi metodami, z zupełnym pominięciem analitycznej postaci rozkładu.

Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk

(*Praca wpłynęła dnia 30. 12. 1952 r.*)

---

Я. ОДЕРФЕЛЬД (Варшава)

## *РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОИЗОВЕДЕНИЯ РАЦИОНАЛЬНЫХ СТЕПЕНЕЙ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН*

### РЕЗЮМЕ

В технике и естествознание часто приходится определять распределение случайной величины

$$Z = X^{\alpha} Y^{\beta} U^{\gamma} \ldots,$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ — рациональные числа, а $X, Y, U, \ldots$ попарно независимые случайные величины. Аналитическое решение возможно лишь в отдельных случаях.

Предлагаемая работа содержит простой численный способ определения закона распределения $Z$. Состоит он в том, что все действия производятся на последовательностях Ренарда

$$\{10^{i/(5\cdot 2^k)}\},$$

где $k$ — параметр принимающий натуральные значения, а $i$ — номер члена последовательности; $i$ принимает конечные значения $\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$

В работе подробно изучены случаи $Z = X^{\alpha}$, $Z = X/Y$, $Z = XY$ и показан общий способ определения закона распределения $Z$ в табелярном виде. Кроме того решено несколько примеров и сравнено решение одного из них с эффективным аналитическим решением, получая хорошую согласованность.

---