

S. PASZKOWSKI (Wrocław)

NOWE METODY TABLICOWANIA FUNKCJI

1. Wstęp. Znaczenie metod numerycznych stale rośnie. Stosowanie matematyki w wielu dziedzinach nauki i techniki stwarza konieczność posługiwania się różnorodnymi tablicami funkcji elementarnych i specjalnych, tablicami częstokroć wielocyfrowymi, gdyż wzrastają także wymagania dotyczące dokładności tablic. Zwiększanie ich dokładności powoduje, bardzo znaczny najczęściej, wzrost objętości tablic, a więc i ich ceny. Jest to, być może, rzeczą małej wagi dla instytucji badawczych, ale nie jest bez znaczenia dla osób zajmujących się zagadnieniami numerycznymi. Takich zaś osób jest dużo, i wśród matematyków, i poza nimi. Dlatego chyba nie ulega wątpliwości celowość stworzenia typu tablic podręcznych o małej objętości, tanich, a jednocześnie możliwie dokładnych i obszernych pod względem ilości tablicowanych funkcji. Oczywiście, nie znaczy to, że dotychczasowe typy tablic nie są potrzebne. Po prostu zastosowania jednych i drugich są różne. Dawne, wielocyfrowe tablice są przystosowane do obliczeń z użyciem arytmometru, będą więc używane przy rachunkach masowych, podobnych do siebie. Krótkie zaś a zarazem obszerne tablice nowego typu będą używane sporadycznie, jednorazowo, gdy trzeba nam tablic wielu funkcji, ponieważ utrudnienia rachunkowe pochłonać mniej czasu niż szukanie tablic odpowiednich funkcji, przygotowanie arytmometru i tym podobne czynności.

Ważne jest wobec tego opracowanie metod konstrukcji tablic pozwalających na znaczne ich skrócenie przy niezmięnionej dokładności. Przy takim skracaniu nie obędzie się bez komplikacji rachunkowych przy używaniu tablic. Jeśli jednak utrudnienia spowodowane oszczędnością miejsca będą niewielkie — a do tego dążyłem opracowując opisane dalej metody — można będzie je usprawiedliwić. Zakładam, że rachunki potrzebne do znalezienia wartości funkcji z tablic powinny dać się wykonać bez trudu ręcznie, bez użycia arytmometru. Staram się też (patrz punkt 3.3), żeby tablice nie traciły na wartości, jeśli rachujący może używać arytmometru. Dla lepszego zrozumienia metod zamieszczam w tekście kilka tablic funkcji — w tym w całości czynnikowe tablice logarytmów dziesiętnych.

Metody tablicowania można podzielić na *indywidualne*, które uzyskują odrębne cechy tablicowanej funkcji (do takich metod należy znana metoda faktoryzacji w tablicach logarytmów, o której jeszcze będzie mowa), i *ogólne* (na przykład wykorzystanie interpolacji).

2. Nowe metody indywidualne. Omówię tu dwa nowe typy tablic logarytmicznych.

2.1. Pierwszy z nich stanowi nową odmianę tablic czynnikowych logarytmów. Zasada tych tablic opiera się na *faktoryzacji* liczby logarytmowanej, tj. na rozłożeniu jej na specjalnie dobrane czynniki, których logarytmy są dane w tablicach. W udoskonalonych tablicach tego typu (zob. np. [7]) oprócz logarytmów 255 liczb z przedziału $\langle 1, 10 \rangle$ znajdują się logarytmy liczb postaci $1+10^{-4}m$, $1+10^{-6}m$, $1+10^{-9}n$, gdzie $m = 0, 1, \dots, 99$, $n = 0, 1, \dots, 999$. Tablice takie przy wielkiej dokładności są niezwykle krótkie (30 stron), ale też używanie ich ma sens tylko przy korzystaniu z arytmometru. Dobierając inaczej czynniki osiągnąłem wprawdzie mniejsze skrócenie tablic, ale są one za to prostsze w użyciu.

Rozpatrzmy teraz siedmiocyfrowe tablice logarytmów dziesiętnych (patrz np. [6]) zawierające logarytmy liczb całkowitych pięciocyfrowych (i mające objętość 180 stron). Wszystkie liczby z przedziału $\langle 10^4, 10^5 \rangle$ można jednorazowym mnożeniem przez liczby

$$(1) \quad \frac{1}{9}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{2}, 2, 3, \dots, 9$$

(i ewentualną zmianą położenia przecinka) sprowadzić do jakiegoś węższego przedziału $\langle a, b \rangle$, gdzie a i b są liczbami naturalnymi. Po takim sprowadzeniu, mając dane logarytmy liczb naturalnych $a, a+1, \dots, b-1, b$, znajdujemy logarytm liczby otrzymanej w ten sposób z liczby wyjściowej, stosując zwykłą interpolację liniową. Ponieważ położenie przecinka nie jest istotne, więc ciąg (1) można zastąpić przez ciąg

$$\frac{10}{9}, \frac{10}{8}, \dots, \frac{10}{4}, 3, \frac{10}{3}, 4, 5, \dots, 9.$$

Liczby a i b należy wybrać tak, żeby:

1° każdą liczbę dało się w wyżej opisany sposób sprowadzić do przedziału $\langle a, b \rangle$,

2° przy znajdowaniu logarytmu liczby $x \in \langle a, b \rangle$ można było z wystarczającą dokładnością stosować interpolację liniową.

Z pierwszego warunku wynika, że przedziały

$$\langle a, b \rangle, \langle \frac{10}{9}a, \frac{10}{9}b \rangle, \dots, \langle \frac{10}{4}a, \frac{10}{4}b \rangle, \langle 3a, 3b \rangle, \langle \frac{10}{3}a, \frac{10}{3}b \rangle, \dots, \langle 9a, 9b \rangle$$

pokrywają łącznie przedział $\langle a, 10a \rangle$. Warunek ten wymaga więc spełnienia nierówności

$$b \geq \frac{10}{9}a, \quad \frac{10}{9}b \geq \frac{10}{8}a, \quad \dots, \quad 9b \geq 10a,$$

tj. nierówności

$$9b \geq 10a, \quad 8b \geq 9a, \quad \dots, \quad 4b \geq 5a,$$

które redukują się do ostatniej z nich. Oczywiście przyjmujemy najkorzystniejsze $b = 5a/4$. Liczbę a wyznaczamy z żądania, aby objętość tablic była najmniejsza.

Główną częścią tablic są tablice logarytmów liczb naturalnych z przedziału $\langle a, 5a/4 \rangle$ i tablice poprawek (P. p. — *Partes proportionales*). Poprawki te są iloczynami przez 1, 2, ..., 9 różnic między kolejnymi tablicowanymi wartościami funkcji $\log n$. Ponieważ $\log(n+1) - \log n \approx M/n$, więc różnice te zmieniają się od $[10^7 M/a]$ do $[10^7 M/(5a/4)]$ ¹⁾ w jednostkach siódmego miejsca po przecinku. Na jednej stronie tablicujemy 500 wartości funkcji logarytmicznej lub iloczyny 45 liczb przez 1, 2, ..., 9. Dlatego tablice zajmują

$$\begin{aligned} & \frac{1}{500} \left(\frac{5}{4}a - a \right) + \frac{1}{45} \left(\left[\frac{M}{a} 10^7 \right] - \left[\frac{M}{5a/4} 10^7 \right] \right) \approx \\ & \approx \frac{a}{2000} + \frac{1}{45} \left(\frac{M}{a} 10^7 - \frac{M}{5a/4} 10^7 \right) = \frac{a}{2000} + \frac{M}{225a} 10^7 \text{ stronic.} \end{aligned}$$

Objętość tablic jest najmniejsza, gdy

$$\frac{1}{2000} - \frac{M}{225a^2} 10^7 = 0,$$

i dlatego można przyjąć

$$a = [10^4 \sqrt{8M/9}] = 6213.$$

Dla uproszczenia bierzemy jednak $a = 6800$, $b = 5a/4 = 8500$ (zmiana ta ma nieznaczny wpływ na objętość tablic). Łącznie z pomocniczą tablicą wskazującą kolejność działań, tablice mają 7 stronic, w tym 3 stronicę wkładki z tablicą poprawek. Tablice te podajemy na stronicach 235-238 (tabl. 2.1).

¹⁾ Symbol $[t]$ oznacza część całkowitą liczby t , symbol M oznacza $\log e$.

TABLICA 2.1
Tablica pomocnicza (klucz)

num → log			log → num		
Zakres	Działania		Zakres	Działania	
num	num	log	log	log	num
100			0		
121	·7	+1549019,6	0,0847	+8450980,4	:7
141	·6	+2218487,5	0,1517	+7781512,5	:6
170	:2	+3010300,0	0,2305	+6989700,0	·2
212	·4	+3979400,1	0,3278	+6020599,9	:4
255	:3	+4771212,5	0,3554	+5228787,5	·3
272	·3	+5228787,5	0,4346	+4771212,5	:3
340	:4	+6020599,9	0,5319	+3979400,1	·4
408	·2	+6989700,0	0,6107	+3010300,0	:2
476	:6	+7781512,5	0,6777	+2218487,5	·6
595	:7	+8450980,4	0,7749	+1549019,6	·7
612	:8	+9030899,9	0,7870	+0969100,1	·8
680	:9	+9542425,1	0,8325089	+0457574,9	·9
850	·9	+0457574,9	0,9298785	+9542425,1	:9
945	·8	+0969100,1	0,9753	+9030899,9	:8
1000			1		

Tablica logarytmów

log n

n		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Δ
680	83	25089	25728	26366	27005	27643	28281	28919	29558	30195	30833	638
1		31471	32109	32746	33384	34021	34659	35296	35933	36570	37207	637
2		37844	38480	39117	39754	40390	41027	41663	42299	42935	43571	636
3		44207	44843	45479	46114	46750	47385	48021	48656	49291	49926	635
4		50561	51196	51831	52465	53100	53735	54369	55003	55638	56272	634
5		56906	57540	58174	58807	59441	60075	60708	61341	61975	62608	633
6		63241	63874	64507	65140	65773	66405	67038	67670	68303	68935	633
7		69567	70199	70832	71463	72095	72727	73359	73990	74622	75253	632
8		75884	76516	77147	77778	78409	79039	79670	80301	80931	81562	631
9		82192	82822	83453	84083	84713	85343	85973	86602	87232	87861	630
690	83	88491	89120	89750	90379	91008	91637	92266	92895	93523	94152	629
1		94780	95409	96037	96666	97294	97922	98550	99178	99806	*00433	628
2	84	01061	01688	02316	02943	03571	04198	04825	05452	06079	06706	627
3		07332	07959	08586	09212	09838	10465	11091	11717	12343	12969	626
4		13595	14220	14846	15472	16097	16723	17348	17973	18598	19223	625
5		19848	20473	21098	21722	22347	22971	23596	24220	24844	25468	624
6		26092	26716	27340	27964	28588	29211	29835	30458	31081	31705	624
7		32328	32951	33574	34197	34819	35442	36065	36687	37310	37932	623
8		38554	39176	39798	40420	41042	41664	42286	42907	43529	44150	622
9		44772	45393	46014	46635	47256	47877	48498	49119	49739	50360	621
700	84	50980	51601	52221	52841	53461	54081	54701	55321	55941	56561	620
n		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Δ

log n

P O P R A W K I
(do tabeli 2.1, str. 235)

	639	638	637	636	635	634	633	632	631	
1	63,9	63,8	63,7	63,6	63,5	63,4	63,3	63,2	63,1	1
2	127,8	127,6	127,4	127,2	127,0	126,8	126,6	126,4	126,2	2
3	191,7	191,4	191,1	190,8	190,5	190,2	189,9	189,6	189,3	3
4	255,6	255,2	254,8	254,4	254,0	253,6	253,2	252,8	252,4	4
5	319,5	319,0	318,5	318,0	317,5	317,0	316,5	316,0	315,5	5
6	383,4	382,8	382,2	381,6	381,0	380,4	379,8	379,2	378,6	6
7	447,3	446,6	445,9	445,2	444,5	443,8	443,1	442,4	441,7	7
8	511,2	510,4	509,6	508,8	508,0	507,2	506,4	505,6	504,8	8
9	575,1	574,2	573,3	572,4	571,5	570,6	569,7	568,8	567,9	9

	630	629	628	627	626	625	624	623	622	
1	63,0	62,9	62,8	62,7	62,6	62,5	62,4	62,3	62,2	1
2	126,0	125,8	125,6	125,4	125,2	125,0	124,8	124,6	124,4	2
3	189,0	188,7	188,4	188,1	187,8	187,5	187,2	186,9	186,6	3
4	252,0	251,6	251,2	250,8	250,4	250,0	249,6	249,2	248,8	4
5	315,0	314,5	314,0	313,5	313,0	312,5	312,0	311,5	311,0	5
6	378,0	377,4	376,8	376,2	375,6	375,0	374,4	373,8	373,2	6
7	441,0	440,3	339,6	438,9	438,2	437,5	436,8	436,1	435,4	7
8	504,0	503,2	502,4	501,6	500,8	500,0	499,2	498,4	497,6	8
9	567,0	566,1	565,2	564,3	563,4	562,5	561,6	560,7	559,8	9

	621	620	619	618	617	616	615	614	613	
1	62,1	62,0	61,9	61,8	61,7	61,6	61,5	61,4	61,3	1
2	124,2	124,0	123,8	123,6	123,4	123,2	123,0	122,8	122,6	2
3	186,3	186,0	185,7	185,4	185,1	184,8	184,5	184,2	183,9	3
4	248,4	248,0	247,6	247,2	246,8	246,4	246,0	245,6	245,2	4
5	310,5	310,0	309,5	309,0	308,5	308,0	307,5	307,0	306,5	5
6	372,6	372,0	371,4	370,8	370,2	369,6	369,0	368,4	367,8	6
7	434,7	434,0	433,3	432,6	431,9	431,2	430,5	429,8	429,1	7
8	496,8	496,0	495,2	494,4	493,6	492,8	492,0	491,2	490,4	8
9	558,9	558,0	557,1	556,2	555,3	554,4	553,5	552,6	551,7	9

	612	611	610	609	608	607	606	605	604	
1	61,2	61,1	61,0	60,9	60,8	60,7	60,6	60,5	60,4	1
2	122,4	122,2	122,0	121,8	121,6	121,4	121,2	121,0	120,8	2
3	183,6	183,3	183,0	182,7	182,4	182,1	181,8	181,5	181,2	3
4	244,8	244,4	244,0	243,6	243,2	242,8	242,4	242,0	241,6	4
5	306,0	305,5	305,0	304,5	304,0	303,5	303,0	302,5	302,0	5
6	367,2	366,6	366,0	365,4	364,8	364,2	363,6	363,0	362,4	6
7	428,4	427,7	427,0	426,3	425,6	424,9	424,2	423,5	422,8	7
8	489,6	488,8	488,0	487,2	486,4	485,6	484,8	484,0	483,2	8
9	550,8	549,9	549,0	548,1	547,2	546,3	545,4	544,5	543,6	9

	603	602	601	600	599	598	597	596	595	
1	60,3	60,2	60,1	60,0	59,9	59,8	59,7	59,6	59,5	1
2	120,6	120,4	120,2	120,0	119,8	119,6	119,4	119,2	119,0	2
3	180,9	180,6	180,3	180,0	179,7	179,4	179,1	178,8	178,5	3
4	241,2	240,8	240,4	240,0	239,6	239,2	238,8	238,4	238,0	4
5	301,5	301,0	300,5	300,0	299,5	299,0	298,5	298,0	297,5	5
6	361,8	361,2	360,6	360,0	359,4	358,8	358,2	357,6	357,0	6
7	422,1	421,4	420,7	420,0	419,3	418,6	417,9	417,2	416,5	7
8	482,4	481,6	480,8	480,0	479,2	478,4	477,6	476,8	476,0	8
9	542,7	541,8	540,9	540,0	539,1	538,2	537,3	536,4	535,5	9

	594	593	592	591	590	589	588	587	586	
1	59,4	59,3	59,2	59,1	59,0	58,9	58,8	58,7	58,6	1
2	118,8	118,6	118,4	118,2	118,0	117,8	117,6	117,4	117,2	2
3	178,2	177,9	177,6	177,3	177,0	176,7	176,4	176,1	175,8	3
4	237,6	237,2	236,8	236,4	236,0	235,6	235,2	234,8	234,4	4
5	297,0	296,5	296,0	295,5	295,0	294,5	294,0	293,5	293,0	5
6	356,4	355,8	355,2	354,6	354,0	353,4	352,8	352,2	351,6	6
7	415,8	415,1	414,4	413,7	413,0	412,3	411,6	410,9	410,2	7
8	475,2	474,4	473,6	472,8	472,0	471,2	470,4	469,6	468,8	8
9	534,6	533,7	532,8	531,9	531,0	530,1	529,2	528,3	527,4	9

	585	584	583	582	581	580	579	578	577	
1	58,5	58,4	58,3	58,2	58,1	58,0	57,9	57,8	57,7	1
2	117,0	116,8	116,6	116,4	116,2	116,0	115,8	115,6	115,4	2
3	175,5	175,2	174,9	174,6	174,3	174,0	173,7	173,4	173,1	3
4	234,0	233,6	233,2	232,8	232,4	232,0	231,6	231,2	230,8	4
5	292,5	292,0	291,5	291,0	290,5	290,0	289,5	289,0	288,5	5
6	351,0	350,4	349,8	349,2	348,6	348,0	347,4	346,8	346,2	6
7	409,5	408,8	408,1	407,4	406,7	406,0	405,3	404,6	403,9	7
8	468,0	467,2	466,4	465,6	464,8	464,0	463,2	462,4	461,6	8
9	526,5	525,6	524,7	523,8	522,9	522,0	521,1	520,2	519,3	9

	576	575	574	573	572	571	570	569	568	
1	57,6	57,5	57,4	57,3	57,2	57,1	57,0	56,9	56,8	1
2	115,2	115,0	114,8	114,6	114,4	114,2	114,0	113,8	113,6	2
3	172,8	172,5	172,2	171,9	171,6	171,3	171,0	170,7	170,4	3
4	230,4	230,0	229,6	229,2	228,8	228,4	228,0	227,6	227,2	4
5	288,0	287,5	287,0	286,5	286,0	285,5	285,0	284,5	284,0	5
6	345,6	345,0	344,4	343,8	343,2	342,6	342,0	341,4	340,8	6
7	403,2	402,5	401,8	401,1	400,4	399,7	399,0	398,3	397,6	7
8	460,8	460,0	459,2	458,4	457,6	456,8	456,0	455,2	454,4	8
9	518,4	517,5	516,6	515,7	514,8	513,9	513,0	512,1	511,2	9

	567	566	565	564	563	562	561	560	559	
1	56,7	56,6	56,5	56,4	56,3	56,2	56,1	56,0	55,9	1
2	113,4	113,2	113,0	112,8	112,6	112,4	112,2	112,0	111,8	2
3	170,1	169,8	169,5	169,2	168,9	168,6	168,3	168,0	167,7	3
4	226,8	226,4	226,0	225,6	225,2	224,8	224,4	224,0	223,6	4
5	283,5	283,0	282,5	282,0	281,5	281,0	280,5	280,0	279,5	5
6	340,2	339,6	339,0	338,4	337,8	337,2	336,6	336,0	335,4	6
7	396,9	396,2	395,5	394,8	394,1	393,4	392,7	392,0	391,3	7
8	453,6	452,8	452,0	451,2	450,4	449,6	448,8	448,0	447,2	8
9	510,3	509,4	508,5	507,6	506,7	505,8	504,9	504,0	503,1	9

	558	557	556	555	554	553	552	551	550	
1	55,8	55,7	55,6	55,5	55,4	55,3	55,2	55,1	55,0	1
2	111,6	111,4	111,2	111,0	110,8	110,6	110,4	110,2	110,0	2
3	167,4	167,1	166,8	166,5	166,2	165,9	165,6	165,3	165,0	3
4	223,2	222,8	222,4	222,0	221,6	221,2	220,8	220,4	220,0	4
5	279,0	278,5	278,0	277,5	277,0	276,5	276,0	275,5	275,0	5
6	334,8	334,2	333,6	333,0	332,4	331,8	331,2	330,6	330,0	6
7	390,6	389,9	389,2	388,5	387,8	387,1	386,4	385,7	385,0	7
8	446,4	445,6	444,8	444,0	443,2	442,4	441,6	440,8	440,0	8
9	502,2	501,3	500,4	499,5	498,6	497,7	496,8	495,9	495,0	9

	549	548	547	546	545	544	543	542	
1	54,9	54,8	54,7	54,6	54,5	54,4	54,3	54,2	1
2	109,8	109,6	109,4	109,2	109,0	108,8	108,6	108,4	2
3	164,7	164,4	164,1	163,8	163,5	163,2	162,9	162,6	3
4	219,6	219,2	218,8	218,4	218,0	217,6	217,2	216,8	4
5	274,5	274,0	273,5	327,0	272,5	272,0	271,5	271,0	5
6	329,4	328,8	328,2	327,6	327,0	326,4	325,8	325,2	6
7	384,3	383,6	382,9	382,2	381,5	380,8	380,1	379,4	7
8	439,2	438,4	437,6	436,8	436,0	435,2	434,4	433,6	8
9	494,1	493,2	492,3	491,4	490,5	489,6	488,7	487,8	9

	541	540	539	538	537	536	535	534	
1	54,1	54,0	53,9	53,8	53,7	53,6	53,5	53,4	1
2	108,2	108,0	107,8	107,6	107,4	107,2	107,0	106,8	2
3	162,3	162,0	161,7	161,4	161,1	160,8	160,5	160,2	3
4	216,4	216,0	215,6	215,2	214,8	214,4	214,0	213,6	4
5	270,5	270,0	269,5	269,0	268,5	268,0	267,5	267,0	5
6	324,6	324,0	323,4	322,8	322,2	321,6	321,0	320,4	6
7	378,7	378,0	377,3	376,6	375,9	375,2	374,5	373,8	7
8	432,8	432,0	431,2	430,4	429,6	428,8	428,0	427,2	8
9	486,9	486,0	485,1	484,2	483,3	482,4	481,5	480,6	9

	533	532	531	530	529	528	527	526	
1	53,3	53,2	53,1	53,0	52,9	52,8	52,7	52,6	1
2	106,6	106,4	106,2	106,0	105,8	105,6	105,4	105,2	2
3	159,9	159,6	159,3	159,0	158,7	158,4	158,1	157,8	3
4	213,2	212,8	212,4	212,0	211,6	211,2	210,8	210,4	4
5	266,5	266,0	265,5	265,0	264,5	264,0	263,5	263,0	5
6	319,8	319,2	318,6	318,0	317,4	316,8	316,2	315,6	6
7	373,1	372,4	371,7	371,0	370,3	369,6	368,9	368,2	7
8	426,4	425,6	424,8	424,0	423,2	422,4	421,6	420,8	8
9	479,7	478,8	477,9	477,0	476,1	475,2	474,3	473,4	9

	525	524	523	522	521	520	519	518	
1	52,5	52,4	52,3	52,2	52,1	52,0	51,9	51,8	1
2	105,0	104,8	104,6	104,4	104,2	104,0	103,8	103,6	2
3	157,5	157,2	156,9	156,6	156,3	156,0	155,7	155,4	3
4	210,0	209,6	209,2	208,8	208,4	208,0	207,6	207,2	4
5	262,5	262,0	261,5	261,0	260,5	260,0	259,5	259,0	5
6	315,0	314,4	313,8	313,2	312,6	312,0	311,4	310,8	6
7	367,5	366,8	366,1	365,4	364,7	364,0	363,3	362,6	7
8	420,0	419,2	418,4	417,6	416,8	416,0	415,2	414,4	8
9	472,5	471,6	470,7	469,8	468,9	468,0	467,1	466,2	9

	517	516	515	514	513	512	511	510	
1	51,7	51,6	51,5	51,4	51,3	51,2	51,1	51,0	1
2	103,4	103,2	103,0	102,8	102,6	102,4	102,2	102,0	2
3	155,1	154,8	154,5	154,2	153,9	153,6	153,3	153,0	3
4	206,8	206,4	206,0	205,6	205,2	204,8	204,4	204,0	4
5	258,5	258,0	257,5	257,0	256,5	256,0	255,5	255,0	5
6	310,2	309,6	309,0	308,4	307,8	307,2	306,6	306,0	6
7	361,9	361,2	360,5	359,8	359,1	358,4	357,7	357,0	7
8	413,6	412,8	412,0	411,2	410,4	409,6	408,8	408,0	8
9	465,3	464,4	463,5	462,6	461,7	460,8	459,9	459,0	9

log n

n		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Δ
700	84	50980	51601	52221	52841	53461	54081	54701	55321	55941	56561	620
1		57180	57800	58419	59038	59658	60277	60896	61515	62134	62752	619
2		63371	63990	64608	65227	65845	66463	67081	67700	68318	68935	618
3		69553	70171	70789	71406	72024	72641	73258	73876	74493	75110	617
4		75727	76343	76960	77577	78193	78810	79426	80043	80659	81275	616
5		81891	82507	83123	83739	84355	84970	85586	86201	86817	87432	616
6		88047	88662	89277	89892	90507	91122	91736	92351	92965	93580	615
7		94194	94808	95423	96037	96651	97264	97878	98492	99106	99719	614
8	85	00333	00946	01559	02172	02786	03399	04011	04624	05237	05850	613
9		06462	07075	07687	08300	08912	09524	10136	10748	11360	11972	612
710	85	12583	13195	13807	14418	15030	15641	16252	16863	17474	18085	611
1		18696	19307	19917	20528	21139	21749	22359	22970	23580	24190	610
2		24800	25410	26020	26629	27239	27849	28458	29068	29677	30286	609
3		30895	31504	32113	32722	33331	33940	34548	35157	35765	36374	609
4		36982	37590	38198	38807	39414	40022	40630	41238	41845	42453	608
5		43060	43668	44275	44882	45489	46096	46703	47310	47917	48524	607
6		49130	49737	50343	50950	51556	52162	52768	53374	53980	54586	606
7		55192	55797	56403	57008	57614	58219	58824	59429	60035	60640	605
8		61244	61849	62454	63059	63663	64268	64872	65476	66081	66685	604
9		67289	67893	68497	69101	69704	70308	70912	71515	72118	72722	604
720	85	73325	73928	74531	75134	75737	76340	76943	77545	78148	78750	603
1		79353	79955	80557	81159	81761	82363	82965	83567	84169	84770	602
2		85372	85973	86575	87176	87777	88379	88980	89581	90181	90782	601
3		91383	91984	92584	93185	93785	94385	94986	95586	96186	96786	600
4		97386	97985	98585	99185	99784	*00384	*00983	*01583	*02182	*02781	599
5	86	03380	03979	04578	05177	05776	06374	06973	07571	08170	08768	599
6		09366	09964	10562	11160	11758	12356	12954	13552	14149	14747	598
7		15344	15941	16539	17136	17733	18330	18927	19524	20121	20717	597
8		21314	21910	22507	23103	23699	24296	24892	25488	26084	26680	596
9		27275	27871	28467	29062	29658	30253	30848	31443	32039	32634	595
730	86	33229	33823	34418	35013	35608	36202	36797	37391	37985	38580	594
1		39174	39768	40362	40956	41550	42143	42737	43331	43924	44517	594
2		45111	45704	46297	46890	47483	48076	48669	49262	49855	50447	593
3		51040	51632	52225	52817	53409	54001	54593	55185	55777	56369	592
4		56961	57552	58144	58735	59327	59918	60509	61100	61691	62282	591
5		62873	63464	64055	64646	65236	65827	66417	67008	67598	68188	590
6		68778	69.68	69958	70548	711.0	71728	72317	72907	73496	74086	590
7		74675	75264	75853	76442	77031	77620	78209	78798	79387	79975	589
8		80564	81152	81740	82329	82917	83505	84093	84681	85269	85857	588
9		86444	87032	87620	88207	88794	89382	89969	90556	91143	91730	587
740	86	92317	92904	93491	94077	94664	95251	95837	96423	97010	97596	586
1		98182	98768	99354	99940	*00526	*01112	*01697	*02283	*02868	*03454	586
2	87	04039	04624	05210	05795	06380	06965	07549	08134	08719	09304	585
3		09888	10473	11057	11641	12226	12810	13394	13978	14562	15146	584
4		15729	16313	16897	17480	18064	18647	19230	19814	20397	20980	583
5		21563	22146	22728	23311	23894	24476	25059	25641	26224	26806	582
6		27388	27970	28552	29134	29716	30298	30880	31462	32043	32625	582
7		33206	33787	34369	34950	35531	36112	36693	37274	37855	38435	581
8		39016	39597	40177	40757	41338	41918	42498	43078	43658	44238	580
9		44818	45398	45978	46557	47137	47716	48296	48875	49454	50034	579
750	87	50613	51192	51771	52349	52928	53507	54086	54664	55243	55821	579

log n

log n

n		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Δ
750	87	50613	51192	51771	52349	52928	53507	54086	54664	55243	55821	579
1		56399	56978	57556	58134	58712	59290	59868	60446	61023	61601	578
2		62178	62756	63333	63911	64488	65065	65642	66219	66796	67373	577
3		67950	68526	69103	69680	70256	70833	71409	71985	72561	73137	576
4		73713	74289	74865	75441	76017	76592	77168	77743	78319	78894	576
5		79470	80045	80620	81195	81770	82345	82919	83494	84069	84643	575
6		85218	85792	86367	86941	87515	88089	88663	89237	89811	90385	574
7		90959	91532	92106	92680	93253	93826	94400	94973	95546	96119	573
8		96692	97265	97838	98411	98983	99556	*00128	*00701	*01273	*01846	573
9	88	02418	02990	03562	04134	04706	05278	05850	06421	06993	07564	572
760	88	08136	08707	09279	09850	10421	10992	11563	12134	12705	13276	571
1		13847	14417	14988	15558	16129	16699	17269	17840	18410	18980	570
2		19560	20129	20699	21269	21839	22398	22968	23537	24107	24676	569
3		25245	25815	26384	26953	27522	28090	28659	29228	29797	30365	569
4		30934	31502	32070	32639	33207	33775	34343	34911	35479	36047	568
5		36614	37182	37750	38317	38885	39452	40019	40586	41154	41721	567
6		42288	42855	43421	43988	44555	45122	45688	46255	46821	47387	567
7		47954	48520	49086	49652	50218	50784	51350	51915	52481	53047	566
8		53612	54178	54743	55308	55874	56439	57004	57569	58134	58699	565
9		59263	59828	60393	60957	61522	62086	62651	63215	63779	64343	564
770	88	64907	65471	66035	66599	67163	67726	68290	68854	69417	69980	564
1		70544	71107	71670	72233	72796	73359	73922	74485	75048	75610	563
2		76173	76736	77298	77860	78423	78985	79547	80109	80671	81233	562
3		81795	82357	82918	83480	84042	84603	85165	85726	86287	86848	561
4		87410	87971	88532	89093	89653	90214	90775	91336	91896	92457	561
5		93017	93577	94138	94698	95258	95818	96378	96938	97498	98058	560
6		98617	99177	99736	*00296	*00855	*01415	*01974	*02533	*03092	*03651	559
7	89	04210	04769	05328	05887	06445	07004	07563	08121	08679	09238	559
8		09796	10354	10912	11470	12028	12586	13144	13702	14259	14817	558
9		15375	15932	16489	17047	17604	18161	18718	19275	19832	20389	557
780	89	20946	21503	22059	22616	23173	23729	24285	24842	25398	25954	556
1		26510	27066	27622	28178	28734	29290	29846	30401	30957	31512	556
2		32068	32623	33178	33733	34288	34843	35398	35953	36508	37063	555
3		37618	38172	38727	39281	39836	40390	40944	41498	42053	42607	554
4		43161	43715	44268	44822	45376	45929	46483	47037	47590	48143	554
5		48697	49250	49803	50356	50909	51462	52015	52568	53120	53673	553
6		54225	54778	55330	55883	56435	56987	57539	58092	58644	59195	552
7		59747	60299	60851	61403	61954	62506	63057	63608	64160	64711	551
8		65262	65813	66364	66915	67466	68017	68568	69118	69669	70220	551
9		70770	71320	71871	72421	72971	73521	74071	74621	75171	75721	550
790	89	76271	76821	77370	77920	78469	79019	79568	80117	80667	81216	549
1		81765	82314	82863	83412	83960	84509	85058	85606	86155	86703	549
2		87252	87800	88348	88897	89445	89993	90541	91089	91636	92184	548
3		92732	93279	93827	94375	94922	95469	96017	96564	97111	97658	547
4		98205	98752	99299	99846	*00392	*00939	*01486	*02032	*02579	*03125	547
5	90	03671	04218	04764	05310	05856	06402	06948	07494	08039	08585	546
6		09131	09676	10222	10767	11313	11858	12403	12948	13493	14038	545
7		14583	15128	15673	16218	16762	17307	17851	18396	18940	19485	545
8		20029	20573	21117	21661	22205	22749	23293	23837	24381	24924	544
9		25468	26011	26555	27098	27641	28185	28728	29271	29814	30357	543
800	90	30900	31443	31985	32528	33071	33613	34156	34698	35241	35783	542
n		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Δ

log n

log n

n		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Δ
800	90	30900	31443	31985	32528	33071	33613	34156	34698	35241	35783	542
1		36325	36867	37409	37951	38493	39035	39577	40119	40661	41202	542
2		41744	42285	42827	43368	43909	44450	44992	45533	46074	46615	541
3		47155	47696	48237	48778	49318	49859	50399	50940	51480	52020	540
4		52560	53101	53641	54181	54721	55260	55800	56340	56880	57419	540
5		57959	58498	59038	59577	60116	60655	61195	61734	62273	62812	539
6		63350	63889	64428	64967	65505	66044	66582	67121	67659	68197	539
7		68735	69273	69812	70350	70887	71425	71963	72501	73038	73576	538
8		74114	74651	75188	75726	76263	76800	77337	77874	78411	78948	537
9		79485	80022	80559	81095	81632	82169	82705	83241	83778	84314	536
810	90	84850	85386	85922	86458	86994	87530	88066	88602	89137	89673	536
1		90209	90744	91279	91815	92350	92885	93420	93955	94490	95025	535
2		95560	96095	96630	97165	97699	98234	98768	99303	99837	*00371	534
3	91	00905	01440	01974	02508	03042	03576	04109	04643	05177	05710	534
4		06244	06778	07311	07844	08378	08911	09444	09977	10510	11043	533
5		11576	12109	12642	13174	13707	14240	14772	15305	15837	16369	533
6		16902	17434	17966	18498	19030	19562	20094	20626	21157	21689	532
7		22221	22752	23284	23815	24346	24878	25409	25940	26471	27002	531
8		27533	28064	28595	29126	29656	30187	30717	31248	31778	32309	531
9		32839	33369	33899	34430	34960	35490	36019	36549	37079	37609	530
820	91	38139	38668	39198	39727	40257	40786	41315	41844	42373	42903	529
1		43432	43961	44489	45018	45547	46076	46604	47133	47661	48190	529
2		48718	49246	49775	50303	50831	51359	51887	52415	52943	53471	528
3		53998	54526	55054	55581	56109	56636	57163	57691	58218	58745	527
4		59272	59799	60326	60853	61380	61907	62433	62960	63487	64013	527
5		64539	65066	65592	66118	66645	67171	67697	68223	68749	69275	526
6		69800	70326	70852	71378	71903	72429	72954	73479	74005	74530	525
7		75055	75580	76105	76630	77155	77680	78205	78730	79254	79779	525
8		80303	80828	81352	81877	82401	82925	83449	83973	84497	85021	524
9		85545	86069	86593	87117	87640	88164	88687	89211	89734	90258	524
830	91	90781	91304	91827	92350	92873	93396	93919	94442	94965	95482	523
1		96010	96533	97055	97578	98100	98623	99145	99667	*00189	*00718	522
2	92	01233	01755	02277	02799	03321	03842	04364	04886	05407	05921	522
3		06450	06971	07493	08014	08535	09056	09577	10098	10619	11149	521
4		11661	12181	12702	13222	13743	14263	14784	15304	15824	16340	520
5		16865	17385	17905	18425	18945	19465	19984	20504	21024	21545	520
6		22063	22582	23102	23621	24140	24659	25179	25698	26217	26733	519
7		27255	27773	28292	28811	29330	29848	30367	30885	31404	31926	518
8		32440	32958	33477	33995	34513	35031	35549	36066	36584	37102	518
9		37620	38137	38655	39172	39690	40207	40724	41242	41759	42276	517
840	92	42793	43310	43827	44344	44860	45377	45894	46410	46927	47444	517
1		47960	48476	48993	49509	50025	50541	51057	51573	52089	52605	516
2		53121	53637	54152	54668	55184	55699	56215	56730	57245	57761	515
3		58276	58791	59306	59821	60336	60851	61366	61880	62395	62910	515
4		63424	63939	64453	64968	65482	65997	66511	67025	67539	68053	514
5		68567	69081	69595	70109	70622	71136	71650	72163	72677	73190	514
6		73704	74217	74730	75243	75757	76270	76783	77296	77808	78321	513
7		78834	79347	79859	80372	80885	81397	81909	82422	82934	83446	512
8		83959	84471	84983	85495	86007	86518	87030	87542	88054	88565	512
9		89077	89588	90100	90611	91123	91634	92145	92656	93167	93678	511
850	92	94189	94700	95211	95722	96233	96743	97254	97764	98275	98785	511
n		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Δ

log n

Obecnie wyjaśnię, w jaki sposób używa się tych tablic. Pierwsza tablica jest kluczem do całości. Jest ona podzielona na dwie części, odpowiadające obliczaniu logarytmu ($\text{num} \rightarrow \log$) i antylogarytmu ($\log \rightarrow \text{num}$).

Przy obliczaniu logarytmu szukamy w pierwszej kolumnie liczb, między którymi mieści się liczba utworzona z 3 początkowych cyfr znaczących liczby logarytmowanej. Stosownie do tego w wierszu umieszczonym między znalezionymi liczbami pierwszej kolumny jest wskazane, jakie działanie należy wykonać na liczbie (kolumna „Działania — num”) i na logarytmie wyniku (kolumna „Działania — log”). W tej ostatniej kolumnie liczby są wyrażone w jednostkach siódmego miejsca po przecinku. Jeśli liczba logarytmowana występuje — z dokładnością do położenia przecinka — w pierwszej kolumnie tablicy, to możemy posługiwać się obydwoma wierszami sąsiadującymi z tą liczbą. Na przykład liczbę 272, której logarytm chcemy obliczyć, można najpierw mnożyć przez 3 lub dzielić przez 4. A więc: liczbę logarytmowaną dzielimy lub mnożymy przez jedną z liczb jednocyfrowych według wskazań drugiej kolumny klucza. W czasie dzielenia lub mnożenia liczby logarytmowanej nie warto zwracać uwagi na położenie przecinka, ponieważ cechę logarytmu ustala się w zwykły sposób po wykonaniu wszystkich potrzebnych działań. Analogiczna uwaga odnosi się do obliczania antylogarytmu. Następnie znajdujemy logarytm ilorazu lub iloczynu obliczonego przedtem i dodajemy do niego liczbę według wskazań trzeciej kolumny klucza. Obliczanie logarytmu z podstawowej tablicy zawierającej mantysy logarytmów liczb 6800, 6801, ..., 8509 nie wymaga objaśnień, ponieważ jest takie samo, jak przy korzystaniu ze zwykłych tablic. W kolumnie z nagłówkiem Δ znajdują się różnice między kolejnymi wartościami funkcji logarytmicznej z odpowiedniego wiersza.

Przykład 2.1.1. Obliczyć $\log 4,813979$.

$$\begin{array}{rcl}
 (476 < 481 < 595) & 4813979 : 7 \rightarrow 6877113 & \\
 \log 6877 & 8373990 & (\text{poprawka } 632) \\
 632 \cdot 0,113 & \left\{ \begin{array}{l} 63,2 \\ 6,3 \\ 1,9 \end{array} \right. & \\
 \text{z klucza} & 8450980,4 & \\
 \log 4,813979 \approx 0,6825042. & &
 \end{array}$$

Ten sam wynik otrzymalibyśmy za pomocą zwykłych tablic logarytmicznych.

Druga część klucza („ $\log \rightarrow \text{num}$ ”) odpowiada obliczaniu antylogarytmu. Mając daną mantysę szukamy w kolumnie „Zakres log” przedziału,

w którym się ona mieści, a znalazłszy go, dodajemy do mantysy liczbę z kolumny „Działania — log” i z odpowiedniego wiersza. W ten sposób otrzymujemy liczbę, której antylogarytm można obliczyć za pomocą tablicy podstawowej. Obliczony zaś mnożymy lub dzielimy przez liczbę jednocyfrową (zgodnie ze wskazaniem ostatniej kolumny i odpowiedniego wiersza) otrzymując szukany antylogarytm.

Przykład 2.1.2. Obliczyć $N\log 3,5471814$ (antylogarytm $3,5471814$).

$$(0,5319 < 0,5471 < 0,6107)$$

		5471814	
	z klucza	3010300	
		<hr/> 8482114	
	log 7050	8481891	(poprawka 616)
		<hr/> 223	
		— 184,8	
		<hr/> 38,2	
		— 37,0	
		<hr/> 1,2	

$$616 \cdot \begin{cases} 0,3 \\ 0,06 \\ 0,002 \end{cases}$$

$$7050362:2 \rightarrow 3525,181 \approx N\log 3,5471814.$$

Pozostaje rozpatrzyć błąd popełniany przy korzystaniu z tablic. Przyjmując zamiast $\log(m+h)$, gdzie $0 \leq h < 1$, wartość otrzymaną z tablic popełniamy błąd nie większy niż

$$0,5 \cdot 10^{-7} + \frac{M}{8 \cdot 6800^2} < 0,512 \cdot 10^{-7}.$$

Pierwszy składnik błędu wynika stąd, że tablice są siedmiocyfrowe, drugi pochodzi ze stosowania interpolacji liniowej:

$$0 \leq \log(m+h) - \log m - h(\log(m+1) - \log m) \leq M \frac{h-h^2}{2m^2} \leq \frac{M}{8m^2}.$$

Przy obliczaniu logarytmu liczby n korzystamy ze wzoru

$$\log n = \log(n/x) + \log x,$$

gdzie x jest jedną z liczb $1/9, 1/8, \dots, 1/2, 2, \dots, 8, 9$. Dlatego do $0,512 \cdot 10^{-7}$ należy dodać jeszcze błąd zaokrąglenia $\log x$ wynoszący najwyżej $0,472 \cdot 10^{-8}$ (bo $\log 3 \approx (47712125 + 0,472)10^{-8}$) a średnio $0,163 \cdot 10^{-8}$. Łącznie błąd nie przekracza $0,56 \cdot 10^{-7}$. Podobnie można rozpatrzyć błąd przy obliczaniu antylogarytmu.

Dodam jeszcze, że przy układaniu klucza korzystałem z tego, że przedziały

$$\langle a, b \rangle, \left\langle \frac{10}{9}a, \frac{10}{9}b \right\rangle, \dots, \langle 8a, 8b \rangle, \langle 9a, 9b \rangle$$

częściowo zachodzą na siebie, to znaczy, że dla niektórych liczb można wybrać wykonywane na nich działanie. Kierowałem się tym, żeby błąd spowodowany zaokrąglaniem logarytmów liczb $1/9, 1/8, \dots, 1/2, 2, 3, \dots, 9$ był najmniejszy. Tak na przykład liczbę 114 można sprowadzić do przedziału $\langle 680, 850 \rangle$ mnożeniem przez 6 lub przez 7. Wybieramy tę drugą liczbę, bo $\log 7$ różni się od swej tablicowanej wartości nie więcej niż o $0,001 \cdot 10^{-8}$, a $\log 6$ o $0,038 \cdot 10^{-8}$.

2.2. Druga metoda — w zasadzie ogólna — daje najlepsze wyniki przy układaniu tablic logarytmicznych. Polega ona na dobraniu do tablicowanej funkcji ciągłej $x(t)$ ($t_1 \leq t \leq t_2$) funkcji $\alpha(a)$ i $\chi(h)$ tak, by wyrażenie

$$(2) \quad \max_{\substack{t_1 \leq a \leq t_2 - k \\ 0 \leq h \leq 1}} |x(a+hk) - (x(a) + \alpha(a)\chi(h))|$$

(gdzie a jest argumentem, dla którego $x(t)$ tablicujemy, k — krokiem tablic) było najmniejsze ze względu na wszystkie możliwe pary funkcji $\alpha(a)$, $\chi(h)$. Innymi słowy, chodzi o przybliżanie funkcji dwóch zmiennych $\xi(a, h)$ (postaci $x(a+hk) - x(a)$) przez iloczyn funkcji pojedynczych zmiennych. O ile mi wiadomo, zagadnienie to nie jest jeszcze opracowane ogólnie²⁾. Widać, że jeżeli $x(t)$ jest różniczkowalna w sposób ciągły w przedziale $\langle t_1, t_2 \rangle$, to pierwszymi przybliżeniami szukanych funkcji mogą być funkcje $\alpha_0(a) = x'(a)$, $\chi_0(h) = kh$. Następne przybliżenia — w każdym razie nie gorsze od poprzednich — można znajdować za pomocą procesu iteracyjnego, określonego w następujący sposób:

Niech będą dane m -te przybliżenia szukanych funkcji $\alpha_m(a)$ i $\chi_m(h)$. Załóżmy

$$A_m(a, \alpha) = \max_{0 \leq h \leq 1} |\xi(a, h) - \alpha \cdot \alpha_m(a)\chi_m(h)|.$$

Funkcję $\alpha^*(a)$ określamy z warunku

$$A_m(a, \alpha^*(a)) = \min_{\alpha} A_m(a, \alpha)$$

i zakładamy

$$\alpha_{m+1}(a) = \alpha^*(a)\alpha_m(a).$$

Funkcję $\chi_{m+1}(h)$ konstruujemy podobnie, tworząc funkcję

$$H_m(h, \chi) = \max_{t_1 \leq a \leq t_2 - k} |\xi(a, h) - \chi \cdot \alpha_{m+1}(a)\chi_m(h)|,$$

określając funkcję $\chi^*(h)$ z warunku

$$H_m(h, \chi^*(h)) = \min_{\chi} H_m(h, \chi)$$

²⁾ Analogiczne zagadnienie z zastąpieniem iloczynu przez sumę można znaleźć w pracy [2].

i zakładając

$$\chi_{m+1}(h) = \chi^*(h) \chi_m(h).$$

To, że funkcja $a_{m+1}(a) \chi_{m+1}(h)$ przybliża jednostajnie $\xi(a, h)$ nie gorzej niż funkcja $a_m(a) \chi_m(h)$, jest oczywiste. Jeśli uda się znaleźć takie funkcje $a(a)$ i $\chi(h)$, by dla nich liczba (2) była dostatecznie mała do celów tablicowania funkcji $x(t)$, to podstawą tablic będzie przybliżony wzór

$$(3) \quad x(a + hk) \approx x(a) + a(a) \chi(h),$$

z którego obliczamy $x(a + hk)$. Równość (3) można przy $a(a) > 0$ i $\chi(h) > 0$ napisać w postaci

$$x(a + hk) \approx x(a) + N \log(\log a(a) + \log \chi(h)),$$

a przy dowolnych $a(a)$ i $\chi(h)$ w postaci

$$x(a + hk) \approx x(a) + \varepsilon N \log(\log |a(a)| + \log |\chi(h)|),$$

gdzie $\varepsilon^2 = 1$. Ta sztuczna na pierwszy rzut oka postać wzoru (3) pozwala uniknąć mnożenia niewygodnego przy ręcznych rachunkach. Nie będę się wdawał w bliższą analizę powyższego wzoru; stwierdzę tylko, że oprócz tablic funkcji $x(a)$, $\log |a(a)|$, $\log |\chi(h)|$ są potrzebne dodatkowo tablice antylogarytmów, na przykład pięciocyfrowych. Nie jest to istotne, jeśli tablicuje się wiele funkcji.

Jak już wspomniałem, metoda ta daje najlepsze rezultaty przy układaniu tablic logarytmów. Rozpatrzmy teraz ponownie siedmiocyfrowe tablice logarytmów dziesiętnych. Niech n będzie liczbą całkowitą z przedziału $\langle 10^3, 10^4 \rangle$, $h \in \langle 0, 1 \rangle$. Należy przedstawić $\log(n + h) - \log n = \log(1 + h/n)$ w przybliżeniu w formie iloczynu funkcji zmiennej n i h . Ponieważ $\log t = M \ln t$ (przypominam, że symbol \log oznacza logarytm dziesiętny, \ln logarytm naturalny, $M = \log e$), więc dla wygody będziemy szukali takich funkcji $\nu(n)$ i $\chi(h)$, żeby z wystarczającą dokładnością

$$\ln(1 + h/n) \approx \nu(n) \chi(h).$$

Zgodnie z wzorem

$$\ln\left(1 + \frac{h}{n}\right) = \frac{h}{n} - \frac{h^2}{2n^2} + \dots$$

przyjmijmy $\chi_0(h) = h$, $\nu_0(n) = 1/n$. Rozważamy funkcję

$$N_0(n, \nu) = \max_{0 \leq h \leq 1} \left| \ln\left(1 + \frac{h}{n}\right) - \nu \frac{h}{n} \right|.$$

Jak łatwo sprawdzić, funkcja $\ln(1 + h/n) - \nu h/n$ ma ekstremum lokalne

ze względu na h w punkcie $h=(1-\nu)n/\nu$; wynosi ono $\nu-1-\ln\nu\geq 0$, wobec czego

$$N_0(n, \nu) = \max \left(\nu - 1 - \ln \nu, \left| \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) - \frac{\nu}{n} \right| \right).$$

Badanie przebiegu tej funkcji wykazuje, że szukana funkcja $\nu^*(n)$ spełniająca warunek

$$N_0(n, \nu^*(n)) = \min_{\nu} N_0(n, \nu)$$

jest najmniejszym pierwiastkiem równania

$$\nu - 1 - \ln \nu = \frac{\nu}{n} - \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right),$$

czyli równania

$$\left(1 - \frac{1}{n} \right) \nu - \ln \nu = 1 - \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right).$$

W przybliżeniu mamy

$$\nu^*(n) \approx 1 - \frac{\sqrt{2}-1}{n},$$

więc przyjmujemy

$$\nu_1(n) = \frac{1}{n} - \frac{\sqrt{2}-1}{n^2}.$$

Szukanie funkcji $\chi_1(h)$ i dalszych przybliżeń tą metodą byłoby kłopotliwe i dlatego zastosujemy inną metodę. Niech

$$\chi(h) = ph^2 + (r+1)h,$$

gdzie p, r są stałe i

$$\begin{aligned} \delta(n, h) &= \ln \left(1 + \frac{h}{n} \right) - \nu_1(n) \chi(h) = \\ &= \ln \left(1 + \frac{h}{n} \right) - \frac{1}{n} \left(1 - \frac{\sqrt{2}-1}{n} \right) (ph^2 + (r+1)h) = \\ &= \frac{h}{n} - \frac{h^2}{2n^2} + \frac{h^3}{3(n+\vartheta h)^3} - \frac{1}{n} \left(1 - \frac{\sqrt{2}-1}{n} \right) (ph^2 + (r+1)h) = \\ &= -\frac{h^2 - (2\sqrt{2}-2)h}{2n^2} - \frac{1}{n} \left(1 - \frac{\sqrt{2}-1}{n} \right) (ph^2 + rh) + \frac{h^3}{3(n+\vartheta h)^3} \end{aligned}$$

$$(0 < \vartheta < 1).$$

Wielomian $w_2(h) = h^2 - (2\sqrt{2} - 2)h$ najlepiej jednostajnie przybliża zero w przedziale $\langle 0, 1 \rangle$ wśród wielomianów postaci $h^2 + ah^3$). Dlatego, ż by $\delta(n, h)$ uczynić możliwie małym, założmy $r = -(2\sqrt{2} - 2)p$. Wtedy

$$\begin{aligned}\delta(n, h) &= -\frac{w_2(h)}{2n^2} - \frac{p}{n} \left(1 - \frac{\sqrt{2}-1}{n}\right) w_2(h) + \frac{h^3}{3(n+\vartheta h)^3} = \\ &= -w_2(h) \left(\frac{p}{n} + \frac{1}{2n^2}\right) + \frac{\sqrt{2}-1}{n^2} p w_2(h) + \frac{h^3}{3(n+\vartheta h)^3}.\end{aligned}$$

Liczbę p dobieramy tak, żeby $\max_{n \in \langle 10^4, 10^8 \rangle} |p/n + 1/2n^2|$ było jak najmniejsze.

Dlatego p ma spełniać równanie

$$\frac{p^2}{2} = \frac{1}{2 \cdot 10^6} + \frac{p}{10^3},$$

skąd $p = (1 - \sqrt{2})10^{-3}$. Przy takim p i przy $10^3 \leq n \leq 10^4$ mamy

$$\left| \frac{p}{n} + \frac{1}{2n^2} \right| \leq \frac{1}{2} (3 - 2\sqrt{2}) 10^{-6}.$$

Ponieważ $\max_{h \in \langle 0, 1 \rangle} |w_2(h)| = 3 - 2\sqrt{2}$, więc

$$\begin{aligned}|\delta(n, h)| &\leq \\ &\leq |w_2(h)| \frac{1}{2} (3 - 2\sqrt{2}) 10^{-6} + |w_2(h)| (\sqrt{2} - 1) 10^{-6} (\sqrt{2} - 1) 10^{-3} + \frac{h^3}{3 \cdot 10^9} \leq \\ &\leq 10^{-6} \left(\frac{1}{2} (17 - 12\sqrt{2}) + (17 - 12\sqrt{2}) 10^{-3} + \frac{10^{-3}}{3} \right) < \\ &< 1,509 \cdot 10^{-8},\end{aligned}$$

stąd zaś, przy poprzednio określonych p i r ,

$$M|\delta(n, h)| = |\log(1 + h/n) - M\nu_0(n) \nu^*(n) \chi(h)| < 0,656 \cdot 10^{-8}.$$

Dlatego z dokładnością wystarczającą do konstrukcji tablic siedmio-cyfrowych mamy

$\log(n + h) \approx$

$$\approx \log n + \frac{1}{n} \left(1 - \frac{\sqrt{2}-1}{n}\right) M(h - (\sqrt{2} - 1)10^{-3}(h^2 - (2\sqrt{2} - 2)h)).$$

^{a)} Łatwo wykazać to bezpośrednio, ale wynika to także z ogólnej teorii przybliżania z węzłami. Patrz [5].

Oznaczmy

$$N(n) = -\log\left(1 - \frac{\sqrt{2}-1}{n}\right),$$

$$\bar{H}(h) = \log M\left(h - (\sqrt{2}-1)10^{-3}(h^2 - (2\sqrt{2}-2)h)\right).$$

Stąd

$$(4) \quad \log(n+h) \approx \log n + N\log(-N(n) - \log n + \bar{H}(h)).$$

Dla celów, które wyjaśnię za chwilę, napiszemy wzór (4) w postaci

$$(5) \quad \log(n+h) \approx \log n + 10^{-8} \cdot N\log(H(h) - (\log n - 3) - N(n)),$$

gdzie $H(h) = \bar{H}(h) + 5$.

Siedmiocyfrowe tablice logarytmów dziesiętnych oparte na wzorze (5) zawierają:

1^o siedmiocyfrowe tablice mantys logarytmów liczb $10^3(1)10^4$ ⁴⁾, tj. tablice funkcji $\log n - 3$,

2^o tablice funkcji $N(n)$ podające 6 cyfr po przecinku tej funkcji dla liczb $10^3(1)10^4$ ($0 < N(n) \leq 180 \cdot 10^{-6}$),

3^o sześciocyfrowe tablice funkcji $H(h)$ dla h : 0(0,001)1.

Tablice mają 20 stron. Wyjaśnimy teraz metodę korzystania z nich. Istotną rolę odgrywa fakt, że różnica $\log(n+h) - \log n$ ma najwyżej 4 cyfry znaczące. Dlatego do znalezienia $N\log(-N(n) - \log n + \bar{H}(h))$ wystarczą podstawowe tablice logarytmów liczb czterocyfrowych. Przekształciłem wzór (4) do jego ostatecznej postaci (5) po to, by część całkowita sumy $H(h) - (\log n - 3) - N(n)$ wskazywała od razu ilość cyfr znaczących poprawki $\log(1+h/n)$. Fragment tablic przedstawia się następująco:

n	log n										$10^7 \times$ $\times N(n)$
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
180	25 52725	55137	57548	59957	62365	64772	67177	69582	71984	74386	1000
1	76786	79185	81582	83978	86373	88766	91158	93549	95939	98327	990
2	26 00714	03099	05484	07867	10248	12629	15008	17385	19762	22137	990
3	24511	26883	29255	31625	33993	36361	38727	41092	43455	45817	980
4	48178	50538	52896	55253	57609	59964	62317	64669	67020	69369	980
5	71717	74064	76410	78754	81097	83439	85780	88119	90457	92794	970
6	95129	97464	99797	*02129	*04459	*06788	*09116	*11443	*13769	*16093	960
7	27 18416	20738	23058	25378	27696	30013	32328	34643	36956	39268	960
8	41578	43888	46196	48503	50809	53114	55417	57719	60020	62320	950
9	64618	66915	69211	71506	73800	76092	78383	80673	82962	85250	950

⁴⁾ Symbol $a(k)b$ oznacza, że funkcję tablicujemy dla argumentów $a, a+k, a+2k, \dots, b-k, b$.

$H(h)$										
h	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,70	4,4	82905	83525	84144	84762	85379	85996	86611	87226	87839
1		89064	89675	90285	90895	91503	92111	92718	93324	93929
2		95136	95739	96341	96942	97542	98141	98739	99337	99934
3	4,5	01125	01719	02313	02905	03497	04088	04679	05268	05857
4		07032	07618	08204	08788	09372	09956	10538	11120	11700
5		12860	13438	14016	14593	15169	15744	16319	16893	17466
6		18610	19181	19751	20321	20889	21457	22024	22591	23156
7		24286	24849	25412	25974	26535	27096	27655	28215	28773
8		29888	30444	30999	31554	32108	32662	33214	33766	34318
9		35418	35968	36516	37064	37611	38157	38703	39248	39793

W tablicach z nagłówkiem „ $\log n$ ” tablicujemy mantysy siedmiocyfrowe. W kolumnie „ $10^7 N(n)$ ” jest dane $10^7 N(n)$, tj. $N(n)$ w jednostkach siódmego miejsca po przecinku, jednak z dokładnością do pięciu jednostek ostatniego miejsca. Zrobiono tak dlatego, że większa dokładność jest nam tutaj niepotrzebna, a podanie $N(n)$ z sześciu cyframi po przecinku mogłoby łatwo wywołać błędy przy dodawaniu sześciocyfrowej wartości funkcji $N(n)$ do siedmiocyfrowej mantysy. W wyniku tego dodawania (patrz przykłady 2.2.1 i 2.2.2) siódmą cyfrę kasujemy jako niepotrzebną.

A oto przykłady posługiwania się tablicami. Liczby w nawiasach kwadratowych oznaczają kolejność zapisywania i obliczania składników; liczby oznaczone gwiazdką wzięto z tablic.

Przykład 2.2.1. Obliczyć $\log 1,864786$.

$$\begin{array}{llll}
 [7] & 0,2706290 & [1^*] + [6^*] & \approx \log 1,864786 \\
 [6^*] & + \quad 1831 & N \log [5] & \\
 [1^*] & + \quad 2704459 & \log 1,864 & \\
 [2^*] & + \quad 960 & N(1864) & \\
 [3] & - \quad 270542 & [1^*] + [2^*] & \\
 [4^*] & - \quad 4,533214 & H(0,786) & \\
 [5] & 4,262672 & [4^*] - [3] &
 \end{array}$$

Przykład 2.2.2. Obliczyć $N \log 0,2588219$.

$$\begin{array}{llll}
 [4] & 1846 & [1] - [2^*] & \\
 [1] & - \quad 2588219 & \text{dane} & \\
 [2^*] & + \left\{ \begin{array}{l} 2586373 \\ 990 \\ 266232 \end{array} \right. & \begin{array}{l} \log 1,814 \\ N(1814) \\ \log [4] \end{array} & \\
 [3^*] & & & \\
 [5^*] & & & \\
 [6] & 4,524968 & [2^*] + [3^*] + [5^*], & \text{część całkowita równa ilości} \\
 & & & \text{cyfr } [4]
 \end{array}$$

Wynik: $N \log 0,2588219 \approx 1,814771$ ($H^{-1}(4,524968) \approx 0,771$).

Po nabraniu pewnej wprawy i przyzwyczajeniu się do ustalonego schematu obliczeń posługiwanie się tablicami staje się zupełnie łatwe. A oto kilka końcowych uwag o omawianych tablicach.

A. Jak pokazałem na przykładach, obliczanie logarytmu i antylogarytmu wymaga 3 sumowań i 3 odczytań ($\log n$ i $N(n)$ są umieszczone w jednym wierszu). Zwykle tablice logarytmiczne wymagały 2 sumowań i 2 odczytań (logarytmu i poprawki). Nie ulega więc wątpliwości, że dawne tablice są prostsze w użyciu. Ale też są one 9 razy obszerniejsze, bo omawiane przeze mnie tablice liczą 20 stron. Mniejsza zaś objętość tablic skraca czas potrzebny do odszukania wartości funkcji. Dlatego nowy typ tablic logarytmicznych można uznać za pożyteczny.

B. W moich tablicach i w tablicach dawniej używanych wyniki są obarczone błędami wywołanymi zaokrągleniem liczb i przyjęciem pewnych przybliżonych założeń. W tablicach 2.2 opartych na wzorze (5) błąd powstaje z następujących powodów:

1° Wzór (5) jest tylko przybliżony. Na str. 244 pokazaliśmy, że różnica między rzeczywistą wartością logarytmu a prawą stroną wzoru (5) nie przewyższa $0,0656 \cdot 10^{-7}$.

2° W tablicach znajdujemy nie wartości dokładne logarytmu, ale ich przybliżenia z błędem nie przekraczającym $0,5 \cdot 10^{-7}$.

3° W tablicach znajdujemy sześciocyfrowe wartości funkcji $H(h)$, $\log n - 3$ i $N(n)$. Wobec tego wyrażenie $H(h) - (\log n - 3) - N(n)$ może być obarczone błędem $1,5 \cdot 10^{-6}$. Błąd ten przenosi się na

$$N \log (H(h) - (\log n - 3) - N(n)).$$

To ostatnie wyrażenie, równe z wystarczającą przy ocenie błędu dokładnością $\log(n+h) - \log n$, może wynosić najwyżej

$$\log(n+1) - \log n \leq \log(1 + 1/10^3) < 0,0004343.$$

Dlatego $N \log (H(h) - (\log n - 3) - N(n))$ obliczamy z błędem nie większym niż

$$(N \log(1,5 \cdot 10^{-6}) - 1) 0,0004343 < 0,0151 \cdot 10^{-7}.$$

Wobec tego stwierdzamy, że z tablic 2.2 obliczamy logarytmy z błędem nie przekraczającym

$$(0,0656 + 0,5 + 0,0151) 10^{-7} < 0,581 \cdot 10^{-7}.$$

3. Nowe metody ogólne. Podam teraz kilka metod ogólnych zaczynając od najprostszej.

3.1. Weźmy pod uwagę tablice jakiejś funkcji $x(t)$ zawierające jej wartości dla $a(k)b$ i takie, że stosowanie interpolacji liniowej jest w nich

dopuszczalne. Przyjmijmy, że kroku k nie można już znacznie powiększyć bez odrzucenia interpolacji liniowej. Niech na przykład funkcją $x(t)$ będzie $\sin t$ dla $0^0(10'')90^0$ (więc $k=10''$). Zwróćmy uwagę na fragment tablicy zawierającej siedmiocyfrowe wartości $\sin t$ i pierwsze różnice w jednostkach siódmego miejsca po przecinku:

$$\begin{array}{ll} \sin \alpha & \\ \sin(\alpha + k) & \delta_0 = 10^7(\sin(\alpha + k) - \sin \alpha) \\ & \delta_1 = 10^7(\sin(\alpha + 2k) - \sin(\alpha + k)) \\ . & . \\ \sin(\alpha + 5k) & . \\ \sin(\alpha + 6k) & \delta_5 = 10^7(\sin \alpha + 6k) - \sin(\alpha + 5k) \end{array}$$

(α jest kątem wyrażającym się całkowitą liczbą minut). W zwykłych tablicach wartości $\sin(\alpha + (m+h)k)$, gdzie $0 \leq h < 1$, oblicza się z przybliżonego wzoru interpolacyjnego

$$\sin(\alpha + (m+h)k) \approx \sin(\alpha + mk) + h\delta_m 10^{-7} \quad (m=0, 1, \dots, 5).$$

Ponieważ

$$\sin(\alpha + mk) = \sin \alpha + (\delta_0 + \dots + \delta_{m-1})10^{-7},$$

więc

$$\sin(\alpha + (m+h)k) \approx \sin \alpha + (\delta_0 + \dots + \delta_{m-1})10^{-7} + h\delta_m 10^{-7}.$$

Największą częścią poprawki, którą dodajemy do $\sin \alpha$, jest, w jednostkach siódmego miejsca po przecinku,

$$\delta_0 + \dots + \delta_{m-1} = 10^7(\sin(\alpha + mk) - \sin \alpha).$$

Poprawkę tę podzielimy na dwie części. Ponieważ

$$\sin(\alpha + mk) - \sin \alpha \approx \frac{m}{6}(\sin(\alpha + 6k) - \sin \alpha),$$

więc

$$\delta_0 + \dots + \delta_{m-1} \approx \frac{m}{6}\delta, \quad \text{gdzie} \quad \delta = 10^7(\sin(\alpha + 6k) - \sin \alpha).$$

Liczba $m\delta/6$ nie jest jednak całkowita, choć $\delta_0, \dots, \delta_5$ są całkowite. Dlatego przyjmujemy jeszcze

$$(6) \quad \Delta = 12[\delta/12],$$

tak że $\Delta \leq \delta < \Delta + 12$ i $\Delta/6$ jest liczbą całkowitą. Utwórzmy wyrażenia

$$(7) \quad d_m = \begin{cases} 0 & \text{dla } m=0, \\ \delta_0 + \dots + \delta_{m-1} - m\Delta/6 & \text{dla } m=1, 2, \dots, 6. \end{cases}$$

Przy tych oznaczeniach mamy

$$\sin(a + (m + h)k) \approx \sin a + \left(\frac{m}{6} \Delta + d_m\right) 10^{-7} + h \left(d_{m+1} - d_m + \frac{1}{6} \Delta\right) 10^{-7}.$$

Wzór

$$\sin(a + (m + h)k) \approx \sin a + (m + h) \frac{\Delta}{6} 10^{-7} + d_m 10^{-7} + h(d_{m+1} - d_m) 10^{-7}$$

jest podstawą tablic. Kąt a wyraża się całkowitą liczbą minut, krok tablic $k=10''$, $m=0, 1, \dots, 5$, $0 \leq h < 1$, liczby Δ i d_m są określone wzorami (6) i (7). Wybór liczby 12 we wzorze (6) nie jest przypadkowy, lecz wynika z warunków natury praktycznej. Poza wspomnianą podzielnością przez 6 chcemy jeszcze, żeby poprawki d_1, d_2, \dots, d_6 były jednocyfrowe (będzie tak przy $\Delta=6[\delta/6]$ i $\Delta=12[\delta/12]$) oraz żeby objętość pomocniczej tablicy poprawek zawierającej iloczyny $m\Delta/6$ była mała. Ten ostatni wzgląd decyduje o wybraniu liczby 12.

Na zamieszczonym fragmencie tablic funkcji $\sin t$ (tablica 3.1) objaśnię prosty sposób używania tych tablic.

Tablica 3.1 zawiera wartości funkcji sinus dla kątów $47^\circ(1')48''$ — zarazem wartości funkcji cosinus dla kątów $42^\circ(1')43''$ — i wielkości pomocnicze.

Funkcji sinus odpowiada górny nagłówek i lewa kolumna minut, funkcji cosinus — dolny nagłówek i prawa kolumna minut. Metodę korzystania z tablic omówimy dla funkcji sinus. Jednej minucie odpowiadają dwa wiersze tablicy wydzielone kreskami poziomymi, umieszczonymi po jej lewej stronie. W pierwszym wierszu jest podana ilość minut i odpowiednia wartość funkcji sinus. W drugim (pod cyframi nagłówka 1 2 3 4 5) mieszczą się liczby d_1, d_2, d_3, d_4, d_5 oraz (pod literą Δ) litera zastępująca Δ , która zarazem jest nagłówkiem odpowiedniej części tablicy P. p. podającej wielokrotności liczby $\Delta/6$ przez $1, 2, \dots, 9$. Liczby występujące w tablicy w miejscach odpowiadających tłustym liniom nagłówek nie są potrzebne do obliczania wartości funkcji sinus. Liczby d_6 jako rzadko używanej (tylko do obliczania $d_6 - d_5$) w tablicy nie ma; dla obu funkcji jest to suma d_5 dla funkcji sinus i d_1 dla funkcji cosinus z odpowiedniego wiersza (np. dla $\sin 47^\circ 11'$ lub $\cos 42^\circ 48'$ mamy $d_6 = 7 + 2 = 9$). Liczba d_0 równa się zeru. Wielkości związanych z funkcją cosinus szuka się podobnie; należy pamiętać tylko o tym, że jednej mi-

TABLICA 3. 1

47°

sin 12345 — Δ	sin 12345 — Δ	sin 12345 — Δ	P. p.
0 0,7313537 60 11223 12233 a	20 0,7353090 40 11223 01122 b	40 0,7392394 20 11223 01122 c	a
1 0,7315521 59 01122 00112 a	21 0,7355061 39 11222 11122 b	41 0,7394353 19 01112 01112 c	10 330
2 0,7317503 58 11222 11122 a	22 0,7357032 38 00111 11122 b	42 0,7396311 18 00111 00011 c	20 660
3 0,7319486 57 00111 00011 a	23 0,7359002 37 00011 00111 b	43 0,7398268 17 11111 00000 c	30 990
4 0,7321467 56 11111 11111 a	24 0,7360971 36 00000 11111 b	44 0,7400225 16 00000 00000 c	40 1320
5 0,7323449 55 00000 00000 a	25 0,7362940 35 00000 00000 b	45 0,7402181 15 00000 00000 c	50 1650
6 0,7325429 54 00000 00000 a	26 0,7364908 34 13579 24680 c	46 0,7404137 14 23579 24689 d	60 1980
7 0,7327409 53 24579 24679 b	27 0,7366875 33 24579 24679 c	47 0,7406092 13 13578 23579 d	70 2310
8 0,7329388 52 24579 24679 b	28 0,7368842 32 13578 23579 c	48 0,7408046 12 23568 24578 d	80 2640
9 0,7331367 51 13568 24579 b	29 0,7370808 31 13568 13468 c	49 0,7410000 11 13467 23568 d	90 2970
10 0,7333345 50 13467 23568 b	30 0,7372773 30 23568 13467 c	50 0,7411953 10 12457 13467 d	b
11 0,7335322 49 13467 23568 b	31 0,7374738 29 23467 23567 c	51 0,7413905 9 13457 13457 d	10 328
12 0,7337299 48 12456 23467 b	32 0,7376703 28 12356 12456 c	52 0,7415857 8 12356 12456 d	20 656
13 0,7339275 47 12456 12356 b	33 0,7378666 27 13456 12346 c	53 0,7417808 7 12345 12345 d	30 984
14 0,7341250 46 13456 12346 b	34 0,7380629 26 12456 12356 c	54 0,7419758 6 12345 12345 d	40 1312
15 0,7343225 45 12345 12345 b	35 0,7382592 25 12344 11234 c	55 0,7421708 5 12345 12345 d	50 1640
16 0,7345199 44 12345 12345 b	36 0,7384553 24 12345 12345 c	56 0,7423658 4 01233 11234 d	60 1968
17 0,7347173 43 12334 12234 b	37 0,7386515 23 01233 11234 c	57 0,7425606 3 12234 01223 d	70 2296
18 0,7349146 42 11234 01233 b	38 0,7388475 22 11233 11233 c	58 0,7427554 2 11223 12233 d	80 2624
19 0,7351118 41 12233 11223 b	39 0,7390435 21 11223 01122 c	59 0,7429502 1 01112 01112 d	90 2952
20 0,7353090 40 11223 01122 b	40 0,7392394 20 11223 01122 c	60 0,7431448 0 11122 00111 d	c
— 12345 Δ cos	— 12345 Δ cos	— 12345 Δ cos	d

42°

nucie odpowiadają dwa wiersze wydzielone kreskami poziomymi po prawej stronie tablicy.

Przykład 3.1.1. Obliczyć $\sin 47^{\circ}14'35''6$.

$$\begin{array}{rcl}
 \sin 47^{\circ}14' & 7341250 & \\
 \text{poprawka } (b) \left\{ \begin{array}{l} 30'' \\ 5'' \\ 0''6 \end{array} \right. & \begin{array}{l} 984 \\ 164 \\ 19,7 \end{array} & \left. \vphantom{\begin{array}{l} 30'' \\ 5'' \\ 0''6 \end{array}} \right\} + \\
 d_3 & 4 & \\
 0,56(d_4 - d_3) & 0,6 & \\
 \hline
 \sin 47^{\circ}14'35''6 \approx & 0,7342422 &
 \end{array}$$

Przykład 3.1.2. Obliczyć $\cos 42^{\circ}3'43''1$.

$$\begin{array}{rcl}
 \cos 42^{\circ}3' & 7425606 & \\
 \text{poprawka } (d) \left\{ \begin{array}{l} 40'' \\ 3'' \\ 0''1 \end{array} \right. & \begin{array}{l} 1296 \\ 97,2 \\ 3,2 \end{array} & \left. \vphantom{\begin{array}{l} 40'' \\ 3'' \\ 0''1 \end{array}} \right\} - \\
 d_4 & 3 & \\
 0,31(d_5 - d_4) & 0,3 & \\
 \hline
 \cos 42^{\circ}3'43''1 \approx & 0,7424206 &
 \end{array}$$

(Uwaga: wszystkie poprawki przy obliczaniu wartości funkcji sinus dodaje się, przy obliczaniu zaś wartości funkcji cosinus odejmuje się).

Przykład 3.1.3. Obliczyć $\arcsin 0,7350214$.

$$\begin{array}{rcl}
 & 7350214 & \\
 \sin 47^{\circ}18' & - 7349146 & \\
 \hline
 & 1068 & \\
 30'' & - 984 & \\
 \hline
 & 84 & \\
 d_3 & - 2 & \\
 \hline
 & 82 & \\
 2'' & - 65,6 & \\
 \hline
 & 16,4 & \\
 0''5 & &
 \end{array}$$

$$\arcsin 0,7350214 \approx 47^{\circ}18'32''5.$$

Oczywiście, w praktyce przy obliczaniu na przykład wartości funkcji sinus nie wypisuje się wszystkich składników poprawki osobno, ponieważ np. d_m jest liczbą jednocyfrową, a $h(d_{m+1} - d_m)$ przeważnie jest mniejsze od 1. Dlatego na przykład obliczenie $\sin 47^{\circ}32'14''8$ wygląda następująco:

Przykład 3.1.4. Obliczyć $\sin 47^{\circ}32'14''8$.

$$\begin{array}{r}
 7376704,5 \quad (\sin 47^{\circ}32' + 10^{-7}d_1 + 0,48(d_2 - d_1)10^{-7}) \\
 326 \\
 130,4 \\
 26,1 \\
 \hline
 \sin 47^{\circ}32'14''8 \approx 0,7377187
 \end{array}$$

Metodę opisaną poprzednio da się zastosować i przy innych funkcjach. Zmieni się wtedy tylko liczba 12, na przykład na 10, i ilość tablicowanych poprawek d_m między argumentami tablic odległymi o krok.

Tablice te dlatego zasługują na uwagę, że:

1^o łatwo je budować, jeśli są już odpowiednio obszerne tablice (w przytoczonym przykładzie były potrzebne tablice funkcji sinus z krokiem $k=10''$),

2^o są bardzo proste w użyciu,

3^o ich dokładność jest taka sama, jak tablice dawnych, opartych na interpolacji liniowej,

4^o obliczanie funkcji odwrotnych jest w nich wykonalne wtedy, kiedy jest wykonalne w zwykłych tablicach (gdy tymczasem przy użyciu interpolacji kwadratowej jest to poważnie utrudnione).

3.2. Załóżmy teraz, że tablicowana funkcja $x(t)$ ma w przedziale $\langle t_1, t_2 \rangle$ pochodne ciągle aż do czwartego rzędu włącznie, skąd

$$(8) \quad x(a + hk) =$$

$$= x(a) + hkx'(a) + \frac{(hk)^2}{2} x''(a) + \frac{(hk)^3}{6} x'''(a) + \frac{(hk)^4}{24} x^{(4)}(a + \vartheta hk),$$

gdzie $t_1 \leq a \leq t_2 - k$, $x(a)$ jest wartością tablicowaną, k — krokiem tablicy, $0 \leq h < 1$, $0 < \vartheta < 1$. Wzór (8) przekształcam następująco:

$$\begin{aligned}
 x(a + hk) &= x(a) + hkx'(a) + \frac{phk^2}{2} x''(a) + \frac{rpk^3}{6} x'''(a) + \\
 &+ \frac{(h^2 - ph)k^2}{2} x''(a) + \frac{(h^3 - rh)k^3}{6} x'''(a) + \frac{h^4 k^4}{24} x^{(4)}(a + \vartheta hk) = \\
 &= x(a) + h \left(kx'(a) + \frac{pk^2}{2} x''(a) + \frac{rk^3}{6} x'''(a) \right) + \\
 &+ \frac{(h^2 - ph)k^2}{2} x''(a) + \frac{s(h^2 - ph)k^3}{6} x'''(a) +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{(h^3 - rh - s(h^2 - ph))k^3}{6} x'''(a) + \frac{h^4 k^4}{24} x^{(4)}(a + \vartheta hk) = \\
 & = x(a) + h \left(kx'(a) + \frac{pk^2}{2} x''(a) + \frac{rk^3}{6} x'''(a) \right) + \\
 & + (h^2 - ph) \left(\frac{k^2}{2} x''(a) + \frac{sk^3}{6} x'''(a) \right) + \\
 & + \frac{(h^3 - sh^2 + (ps - r)h)k^3}{6} x'''(a) + \frac{h^4 k^4}{24} x^{(4)}(a + \vartheta hk).
 \end{aligned}$$

Wprowadziliśmy stałe p, r i s ; r i s dobieramy tak, żeby wielomian $h^3 - sh^2 + (ps - r)h$ najlepiej jednostajnie przybliżał zero wśród wielomianów postaci $h^3 + ah^2 + \beta h$ dla $0 \leq h \leq 1$. Stąd (zob. [5])

$$h^3 - sh^2 + (ps - r)h \equiv h^3 - 3\sqrt{3}(2 - \sqrt{3})h^2 + 6(7 - 4\sqrt{3})h,$$

czyli

$$(9) \quad r = 3\sqrt{3}(2 - \sqrt{3})p - 6(7 - 4\sqrt{3}) \approx 1,3923048454p - 0,4307806183,$$

$$(10) \quad s = 3\sqrt{3}(2 - \sqrt{3}) \approx 1,3923048454.$$

Niech

$$w_3(h) = h^3 - 3\sqrt{3}(2 - \sqrt{3})h^2 + 6(7 - 4\sqrt{3})h,$$

$$\bar{A}(a) = \log \left| kx'(a) + \frac{pk^2}{2} x''(a) + \frac{rk^3}{6} x'''(a) \right|,$$

$$\alpha(a) = \frac{k^2}{2} x''(a) + \frac{sk^3}{6} x'''(a),$$

$$\chi(h) = h^2 - ph,$$

$$\nu(a, h) = \alpha(a)\chi(h),$$

$$R(a, h) = \frac{w_3(h)k^3}{6} x'''(a) + \frac{h^4 k^4}{24} x^{(4)}(a + \vartheta hk),$$

gdzie r i s są dane przez wzory (9) i (10). Dobierając odpowiednio mały krok tablic k , możemy uczynić wartość $R(a, h)$ dowolnie małą. Dlatego dla $0 \leq h \leq 1$, $t_1 \leq a \leq t_2$ jest słuszny przybliżony wzór

$$(11) \quad x(a + hk) \approx x(a) + \varepsilon(a)N \log(\log h + \bar{A}(a)) + \nu(a, h),$$

gdzie

$$\varepsilon(a) = \operatorname{sgn} \left(kx'(a) + \frac{pk^2}{2} x''(a) + \frac{rk^3}{6} x'''(a) \right).$$

Wyrażenie $N\log(\log h + \bar{A}(a))$ nazwiemy *poprawką logarytmiczną*, $v(a, h)$ — *poprawką nomograficzną*. Zanim przejdziemy do omówienia metody tablicowania opartej na wzorze (11), oszacujemy wielkość odrzuconej reszty $R(a, h)$. Niech

$$M_3 = \max_{t_1 \leq t \leq t_2} |x'''(t)|, \quad M_4 = \max_{t_1 \leq t \leq t_2} |x^{(4)}(t)|.$$

Ponieważ

$$\max_{0 \leq h \leq 1} |w_3(h)| = 2(26 - 15\sqrt{3}) < 0,038476,$$

więc

$$(12) \quad |R(a, h)| < 0,006413k^3 M_3 + 0,04167k^4 M_4.$$

Wprowadzenie stałych p , r i s miało między innymi na celu wydatne zmniejszenie reszty. Odrzucenie zamiast $R(a, h)$ wyrazu $(h^3 k^3 / 6) x'''(a)$ i dalszych we wzorze (8) spowodowałoby błąd $0,1667k^3 M_3$, więc około 26 razy większy. W przypadku, gdy M_4 jest taka duża, że w istotny sposób wpływa na wielkość reszty $R(a, h)$, prawą stronę wzoru (8) można przekształcać dalej.

Obecnie zajmijmy się funkcją

$$(13) \quad v(a, h) = a(a) \chi(h).$$

Jej nazwa (poprawka nomograficzna) tłumaczy się tym, że w tablicach znajduje się ją za pomocą nomogramu. Zakładając dla prostoty $v = v(a, h)$, $a = a(a)$, $\chi = \chi(h)$, możemy równanie (13) napisać w postaci wyznacnikowej:

$$\begin{vmatrix} 1 & ba & 0 \\ 1 & 0 & \frac{c}{1-d\chi} \\ 1 & bdr & c \end{vmatrix} = 0;$$

stąd równania skal nomogramu dla zależności (13) są następujące:

$$(14) \quad \begin{array}{ll} \text{skala } a: & u = ba, \quad v = 0, \\ \text{skala } h: & u = 0, \quad v = \frac{c}{1-d\chi}, \\ \text{skala } v: & u = bdr, \quad v = c, \end{array}$$

gdzie b, c, d są stałymi określającymi rozmiary nomogramu, dobranymi tak, by zapewnić możliwie najlepszą dokładność przy odczytywaniu liczby v .

Dotąd nie ustaliliśmy wielkości p , od której zależy $\chi(h)=h^2-ph$. Przyjmijmy $p=0,84$ — wartość bliską $2\sqrt{2}-2\approx 0,8284$, przy której $\chi(h)$ najlepiej przybliża zero dla $0\leq h\leq 1$ (patrz punkt 2.2). Zaokrąglenie jest potrzebne dla prostoty nomogramu. Dla $p=0,84$ mamy

$$-0,1764 \leq \chi(h) \leq 0,16.$$

Skala wyników ma długość około 10 cm, co pozwala odczytać 2 cyfry poprawki nomograficznej $v(a, h)$.

Jak już wspomniałem, mówimy o tablicach siedmiocyfrowych. Krok k , od którego zależy reszta $R(a, h)$, obieramy tak, by ta reszta była dostatecznie mała i by poprawka logarytmiczna była co najwyżej pięciocyfrowa.

Tablica zawiera w części liczbowej siedmiocyfrowe tablice funkcji $x(t)$ dla $t: t_1(k)t_2$, sześciocyfrowe tablice funkcji $\bar{A}(t)+8$ także dla $t: t_1(k)t_2$, i funkcję $\varepsilon(t)$ teoretycznie również dla tych samych t . Przeważnie jednak $\varepsilon(t)$ jest wspólne dla całej tablicy (przypominam, że funkcja $\varepsilon(a)$ wskazuje znak, jakim należy zaopatrzyć poprawkę $N\log(\log h + \bar{A}(a))$). Tablicujemy $\bar{A}(t)+8$ a nie $\bar{A}(t)$ z powodów analogicznych do tych, które wyjaśnialiśmy w 2.2. Korzystamy z wzoru

$$(11') \quad x(a + hk) \approx x(a) + 10^{-8}\varepsilon(a)N\log(\log h + \bar{A}(a) + 8) + v(a, h)$$

po to, aby część całkowita $N\log(\log h + \bar{A}(a) + 8)$ wskazywała ilość cyfr znaczących poprawki logarytmicznej. Z postaci wzoru (11') wynika, że potrzebne są także tablice logarytmów i antylogarytmów — wspólne dla wszystkich funkcji tablicowanych omawianym sposobem. Pierwszymi mogą być tablice omówione w punkcie 2.2. Drugie są to tablice pięciocyfrowe podające $N\log t$ dla $t: 0(10^{-4})1$, mające objętość 20 stron. Dlatego przy tablicowaniu wielu funkcji dodanie tych tablic nie powiększa znacznie objętości całego zbioru.

Drugą część tablic stanowi nomogram. Tylko skala a zależy od tablicowanej funkcji. Wygodnie jest więc (i celowo ze względu na oszczędność miejsca) skale h i v umieścić na luźnej wkładce wspólnej dla wszystkich funkcji, a skalę a umieszczać na górze odpowiedniej stronicy tak, aby nie trzeba było przewracać kart szukając nomogramu. Poprawkę nomograficzną $v(a, h)$ znajdujemy nakładając wkładkę na odpowiednią stronicę tablic.

Przy takiej ilości cyfr tablicowanych wartości $x(t)$ i $\bar{A}(t)+8$, jaką podaliśmy wyżej, i przy założeniu, że $|R(a, h)| < 0,26 \cdot 10^{-7}$, łączny błąd obciążający obliczoną z wzoru (11') wartości $x(a+hk)$ nie przekracza dwóch jednostek ostatniego miejsca po przecinku ($0,5$ z zaokrąglenia $x(a)$, $0,24 \approx 10^5(10^{10^{-8}} - 1)$ z zaokrąglenia $\bar{A}(a)$ i $\log h$, $0,5$ z zaokrąglenia

antylogarytmu, 0,5 z zaokrąglenia poprawki nomograficznej i 0,26 z odrzucenia reszty $R(a, h)$). Oczywiście jest to dużo, ale czasem może być nawet celowe dodanie jednego miejsca dziesiętnego dla zredukowania błędu, gdyż i tak zyska się na objętości tablic.


Cechą omawianej metody tablicowania funkcji jest trudność obliczania argumentu t , gdy znana jest wartość funkcji $x(t)$; to rzuca się w oczy zwłaszcza, gdy wielkości poprawek nomograficznej i logarytmicznej są tego samego rzędu. Jednakże takie same trudności występują wtedy, gdy korzystamy z interpolacji kwadratowej lub stopnia wyższego. W przypadku funkcji niemonotonicznych (jak funkcje Bessla) rzadko trzeba obliczać argument t . Warto też zwrócić uwagę, że w skład wielu nowoczesnych zbiorów tablic wchodzi również tablice funkcji odwrotnych, jak $\arcsin t$, $\arcsinh t$ itp. (patrz np. [1]).

Na przykładzie zamieszczonego dalej fragmentu tablic funkcji Bessla $J_0(t)$ (tablica 3.2) objaśnię posługiwanie się tablicami opartymi na wzorze (11') i nomogramem oraz pokażę ilość działań potrzebnych do znalezienia wartości funkcji.

Tablica składa się z 2 części. Pierwsza zawiera dla $t: 0(0,01)1$ siedmiocyfrowe wartości funkcji $J_0(t)$ i sześciocyfrowe funkcji $A(t) = -\bar{A}(t) + 8$. Układ tablic jest taki prosty, że nie wymaga objaśnień. Ponadto w tablicy jest podane, że dla całego przedziału $(0,1)$ funkcja $\varepsilon(t) = -1$, co znaczy, że poprawkę logarytmiczną trzeba zawsze odejmować. W drugiej części tablicy są dane pięciocyfrowe antylogarytmy liczb $0,87(0,0001)0,8799$ w zrozumiałym układzie, a poza tym pomocnicza tabliczka zastępująca tablicę P. p. Jak już wspomniałem, sumę $\bar{A}(t) + 8 + \log h = A(t) + \log h$ oblicza się z sześcioma cyframi po przecinku. Obliczając $N \log(A(t) + \log h)$ znajdujemy cztery początkowe cyfry tej sumy w nagłówku tablicy antylogarytmów i wypisujemy odpowiednią wartość funkcji $N \log t$. Różnice między kolejnymi wartościami antylogarytmu w tablicy wynoszą $17 \cdot 10^{-5}$ albo $18 \cdot 10^{-5}$. Odpowiadają im w tabliczce pomocniczej (z nagłówkiem 17 18) kolumny 17 i 18. W odpowiedniej z nich odszukujemy kolejne liczby, między którymi mieści się dwucyfrowe zakończenie sumy $A(t) + \log h$. W środkowej kolumnie w wierszu między tymi liczbami otrzymujemy poprawkę, którą należy dodać do odszukanego uprzednio antylogarytmu. Przy tym dwucyfrowej liczbie umieszczonej w kolumnach 17 lub 18 odpowiada górna wartość z kolumny środkowej (np. liczbie 49 z kolumny 17 odpowiada poprawka 8). Dla obliczania $\log h$ korzystamy z pierwszej części tablicy 2.2.

U góry strony znajduje się skala a nomogramu; przy tym jej odcinek odpowiadający wartościom argumentu z przedziału $\langle 0,1 \rangle$ ma długość około 10 mm. Osobną wkładkę z pozostałymi skalami nakładamy na stronę z wydrukowaną skalą, tak by pionowe kreski u góry wkładki

TABLICA 3.2



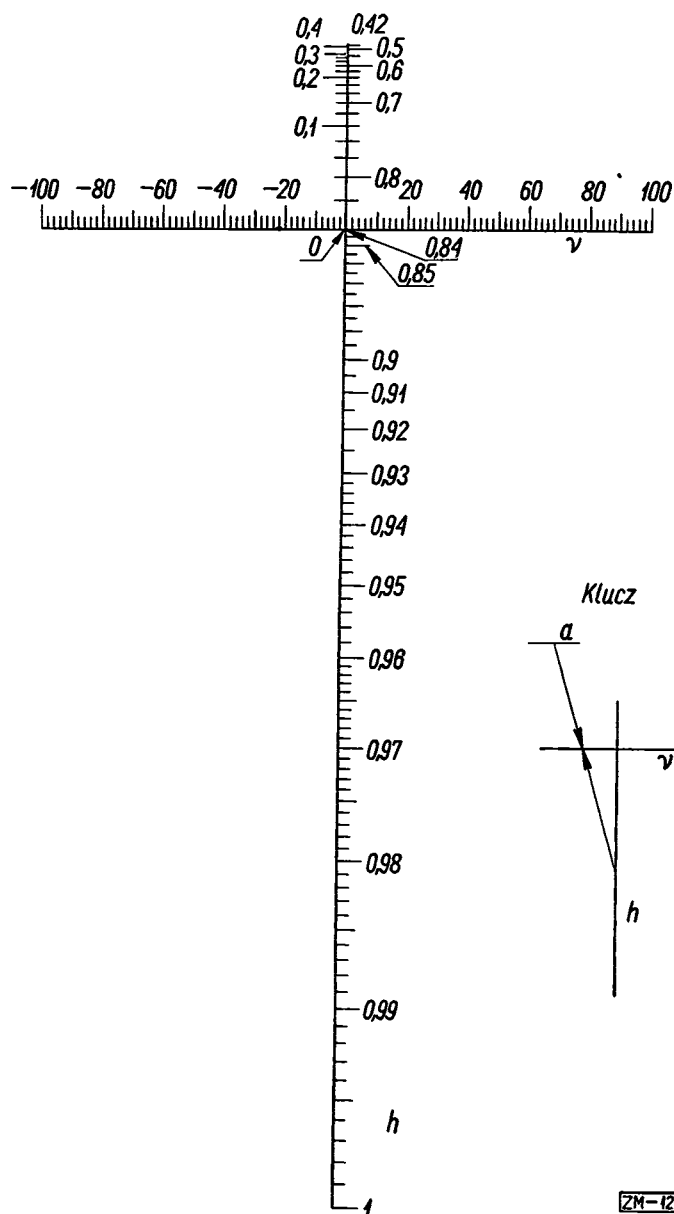
ZM-441

t	$J_0(t)$	$A(t)$	t	$J_0(t)$	$A(t)$	t	$J_0(t)$	$A(t)$
0,00	1,0000000	3,322219	0,35	0,9696087	5,241390	0,70	0,8812009	5,519460
01	0,9999750	3,851258	36	0,9678615	5,253088	71	0,8778904	5,524797
02	0,9999000	4,082749	37	0,9660667	5,264449	72	0,8745391	5,530038
03	0,9997750	4,232920	38	0,9642245	5,275489	73	0,8711471	5,535184
04	0,9996000	4,344294	39	0,9623350	5,286223	74	0,8677147	5,540238
0,05	0,9993751	4,432809	0,40	0,9603982	5,296665	0,75	0,8642423	5,545201
06	0,9991002	4,506275	41	0,9584145	5,306832	76	0,8607300	5,550077
07	0,9987754	4,569069	42	0,9563838	5,316733	77	0,8571780	5,554867
08	0,9984006	4,623900	43	0,9543065	5,326383	78	0,8535868	5,559572
09	0,9979760	4,672541	44	0,9521825	5,335791	79	0,8499565	5,564195
0,10	0,9975016	4,716245	0,45	0,9500121	5,344968	0,80	0,8462874	5,568738
11	0,9969773	4,755928	46	0,9477955	5,353924	81	0,8425797	5,573201
12	0,9964032	4,792252	47	0,9455328	5,362665	82	0,8388338	5,577587
13	0,9957795	4,825744	48	0,9432242	5,371203	83	0,8350500	5,581897
14	0,9951060	4,856307	49	0,9408698	5,379545	84	0,8312284	5,586134
0,15	0,9943829	4,885763	0,50	0,9384698	5,387698	0,85	0,8273695	5,590297
16	0,9936102	4,912875	51	0,9360245	5,395667	86	0,8234734	5,594388
17	0,9927880	4,938370	52	0,9335339	5,403462	87	0,8195405	5,598410
18	0,9919164	4,962417	53	0,9309983	5,411087	88	0,8155711	5,602363
19	0,9909953	4,985170	54	0,9284179	5,418550	89	0,8115654	5,606248
0,20	0,9900250	5,006761	0,55	0,9257928	5,425854	0,90	0,8075238	5,610067
21	0,9890054	5,027297	56	0,9231233	5,433005	91	0,8034465	5,613821
22	0,9879366	5,046873	57	0,9204096	5,440008	92	0,7993339	5,617510
23	0,9868187	5,065576	58	0,9176518	5,446869	93	0,7951863	5,621137
24	0,9856518	5,083474	59	0,9148501	5,453590	94	0,7910039	5,624702
0,25	0,9844359	5,100632	0,60	0,9120049	5,460179	0,95	0,7867871	5,628206
26	0,9831713	5,117106	61	0,9091162	5,466636	96	0,7825361	5,631650
27	0,9818579	5,132948	62	0,9061843	5,472967	97	0,7782514	5,635034
28	0,9804958	5,148201	63	0,9032094	5,479175	98	0,7739332	5,638361
29	0,9790853	5,162905	64	0,9001918	5,485263	99	0,7695819	5,641631
0,30	0,9776262	5,177095	0,65	0,8971316	5,491236	1,00	0,7651977	5,644844
31	0,9761189	5,190805	66	0,8940292	5,497094	$\varepsilon(t) = -1$		
32	0,9745634	5,204063	67	0,8908846	5,502843			
33	0,9729597	5,216897	68	0,8876982	5,508485			
34	0,9713081	5,229331	69	0,8844702	5,514024			
t	$J_0(t)$	$A(t)$	t	$J_0(t)$	$A(t)$	t	$J_0(t)$	$A(t)$

pokryły się z końcami skali a . Nomogram wykorzystujemy według schematu zamieszczonego na wkładce⁵⁾.

⁵⁾ W tablicach zbudowanych według metody z punktu 3.2 zmieniłby się chyba sposób wykonania wkładki dla zapewnienia jej trwałości.

Uwaga: Przed użyciem wkładki odciąć wzdłuż linii x x



TABLICA ANTYLOGARYTMÓW

Nlog t										
t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,870	74	131	148	165	182	199	216	234	251	268
1	302	319	336	353	370	388	405	422	439	456
2	473	490	508	525	542	559	576	593	611	628
3	645	662	679	696	714	731	748	765	783	800
4	817	834	851	869	886	903	920	938	955	972
5	989	*007	*024	*041	*059	*076	*093	*110	*128	*145
6	75	162	180	197	214	232	249	266	284	301
7	336	353	370	388	405	422	440	457	474	492
8	509	527	544	561	579	596	614	631	648	666
9	683	701	718	736	753	770	788	805	823	840

17	18	17	18
02	0	02	55
08	1	08	61
14	2	13	67
20	3	19	73
26	4	24	79
32	5	30	85
38	6	36	91
44	7	41	97
49	8	47	99
55	9	52	99

A oto 2 przykłady obliczania wartości funkcji $J_0(t)$ — pierwszy z objaśnieniami, drugi w postaci, w jakiej używa się praktycznie przy korzystaniu z tablic.

Przykład 3.2.1. Obliczyć $J_0(0,911823)$.

$$a=0,91 \quad h=0,1823$$

$$v(a, h) \quad 21$$

$$J_0(a) \quad 8034465 \quad A(a) \quad 5,613821$$

$$N\log(A(a) + \log h) \quad -7492 \quad \log h \quad \bar{1},260787$$

$$J_0(0,911823) \approx 0,8026994 \quad 4,874608$$

Przykład 3.2.2. Obliczyć $J_0(\underbrace{0,081802}_a \underbrace{\quad}_h)$.

$$30$$

$$9984006 \quad 4,623900$$

$$-758 \quad \bar{1},255755$$

$$J_0(0,081802) \approx 0,9983278 \quad 3,879655$$

Jak widać z przytoczonych przykładów, gdy h jest liczbą czterocyfrową (tj. $\log h$ można odczytać w tablicy 2.2), obliczenie wartości funkcji wymaga 3 lub 4 sumowań i odczytania z tablic wartości 5 funkcji: $x(a)$, $A(a)$, $\log h$, $v(a, h)$ i $N\log(A(a) + \log h)$ zawartych na 3 różnych stronicach ($x(a)$, $A(a)$, $v(a, h)$ odczytujemy na tej samej stronie). Uwzględniając jeszcze, że sumujemy od razu trzy liczby ($x(a)$, $v(a, h)$ i $\varepsilon(a)N\log(A(a) + \log h)$), dochodzimy do wniosku, że znaczne skrócenie tablic może te trudności usprawiedliwić. Dla porównania podaję, że tablice funkcji $J_0(t)$ obejmujące również przedział $\langle 0,1 \rangle$, w których błąd interpolacji liniowej nie przekraczałby $2,5 \cdot 10^{-7}$, miałyby objętość 3,5 strony. Przy tym różnice między kolejnymi tablicowanymi wartościami funkcji sięgałyby $8800 \cdot 10^{-7}$, więc interpolacja byłaby utrudniona ze względu na duże poprawki. Dla uzyskania na przykład poprawek trzycyfrowych trzeba by zmniejszyć krok tablic do 0,0002, przy którym objętość tablic wynosiłaby około 34 strony.

3.3. Główną część tablic omawianych w 3.1 i 3.2, tj. tablice funkcji $x(t)$, można wykorzystać także przy posługiwaniu się arytmometrem. Wykorzystamy mianowicie wzór interpolacji kwadratowej w postaci

$$(15) \quad \begin{aligned} x(a + hk) &\approx \\ &\approx \frac{1}{2} (1 - h)(2 - h)x(a) + h(2 - h)x(a + k) - \frac{1}{2} h(1 - h)x(a + 2k). \end{aligned}$$

Jak wiadomo z teorii interpolacji,

$$\begin{aligned} \left| x(a + hk) - \left(\frac{1}{2} (1 - h)(2 - h)x(a) + h(2 - h)x(a + k) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{2} h(1 - h)x(a + 2k) \right) \right| \leq \\ \leq \frac{k^3 M_3}{6} \max_{0 \leq h \leq 1} |h(1 - h)(2 - h)| = \frac{k^3 M_3}{9\sqrt{3}} \approx 0,064 k^3 M_3, \end{aligned}$$

gdzie — jak dawniej — $M_3 = \max_{t_1 \leq t \leq t_2} |x'''(t)|$. Jak widzimy, największy błąd popełniony przy wykorzystaniu wzoru (15) jest — przy małym M_4 — około 10 razy większy niż błąd wzoru (11) (patrz (12)). Dlatego w razie potrzeby można się posłużyć interpolacją czteropunktową. W obu przypadkach są potrzebne tylko kilkustronicowe tablice współczynników interpolacyjnych Lagrange'a⁶⁾.

4. Wnioski i zakończenie. Kończąc krótki przegląd rozmaitych metod tablicowania funkcji, porównam omówione metody ogólne zaliczając do nich także metodę z punktu 2.2. Metoda 2.2 jest trudna do zastosowania: po pierwsze ze względu na trudności w znalezieniu funkcji $\alpha(a)$ i $\chi(h)$, przy których wyrażenie (2) będzie wystarczająco małe (jeśli w ogóle takie funkcje istnieją) i, po drugie, z powodu konieczności tablicowania funkcji $\chi(h)$ osobno dla każdej funkcji $x(t)$, co może znacznie wpłynąć na objętość tablic. Tablice 3.1 odznaczają się łatwością wykonania, ale też dają stosunkowo niewielkie zmniejszenie objętości. Szczególnie jest korzystne zastosowanie metody 3.1 do funkcji trygonometrycznych i ich logarytmów przy podziale kąta na stopnie i minuty, gdyż wtedy poprawki d_m zajmują mało miejsca. Za najważniejszą uważam metodę 3.2, która pozwala na znaczne zmniejszenie objętości, wyróżnia się prostym układem tablic i jasnym schematem rachunkowym. Przy układaniu tablic dużo czasu wymaga obliczanie wartości funkcji $A(a)$ i $\alpha(a)$; to jednakże nie obchodzi tego, kto z tablic korzysta.

⁶⁾ Można je znaleźć np. w pracach [3] lub [4].

W niniejszej pracy nie omówiłem, z powodu ich odrębnego charakteru, metod tablicowania funkcji wielu zmiennych.

Spis tablic użytych przy układaniu tablic zamieszczonych w tekście

Tables of the Bessel functions of the first kind of orders zero and one, Cambridge, Mass. 1947.

Tables of the Bessel functions of the first kind of orders two and three, Cambridge, Mass. 1947.

W. Jordan, *Sinus- und Cosinus-Tafeln*, Leipzig-Hannover 1913.

Л. А. Люстерник, И. Я. Акушский, В. А. Диткин, *Таблицы бесселевых функций*, Москва-Ленинград 1949.

J. Peters, *Siebenstellige Logarithmentafel, erster Band: Logarithmen der Zahlen, Antilogarithmen, Additions- und Subtraktionslogarithmen*, Berlin 1940.

G. W. Spenceley, R. M. Spenceley, E. R. Epperson, *Smithsonian logarithmic tables to base e and base 10*, Washington 1952.

Prace cytowane

[1] L. J. Comrie, *Chambers's six-figure mathematical tables*, vol. II: *Natural values*, Edinburgh-London 1949.

[2] S. P. Diliberto, E. G. Straus, *On the approximation of a function of several variables by the sum of functions of fewer variables*, Pacific Journal of Mathematics 1.2 (1951), str. 195-210.

[3] S. Hausbrandt, *Bezpośrednia interpolacja wielomianowa*, Warszawa 1950.

[4] — *Rozwiązywanie zagadnień rachunkowych przy pomocy zestawu arytmetycznego*, Warszawa 1952.

[5] S. Paszkowski, *Sur l'approximation uniforme avec des noeuds*, Annales Polonici Mathematici 2(1955), str. 118-135.

[6] J. Peters, *Siebenstellige Logarithmentafel, I Band*, Berlin 1940.

[7] M. Warmus, *36-cyfrowe tablice logarytmów naturalnych*, Wrocław 1953.

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK

Praca wpłynęła dnia 1. 10. 1954 r.

С. ПАЗКОВСКИЙ (Вроцлав)

НОВЫЕ МЕТОДЫ ТАБУЛЯЦИИ ФУНКЦИЙ

РЕЗЮМЕ

Предметом работы является описание новых методов табуляции функций, имеющих целью сокращение существующих таблиц, не нарушая их точности. При этом предполагается, что пользующийся таблицами не располагает арифмометром — так что может производить без труда лишь сложение и вычитание.

В первой части работы рассмотрены два метода, пользующиеся свойством логарифмической функции, дана сокращенная таблица десятичных логарифмов и фрагмент таблиц, построенных по формуле

$$\log_{10}(n+h) \approx \log_{10} n + N \log_{10}(-N(n) - \log_{10} n + H(h)),$$

где $10^3 \leq n \leq 10^4$, $0 \leq h < 1$ и

$$N(n) = -\log_{10} \left(1 - \frac{\sqrt{2}-1}{n} \right),$$

$$H(h) = \log_{10} \log_{10} e + \log_{10} (h - (\sqrt{2}-1) 10^{-3} (h^2 - (2\sqrt{2}-2)h)).$$

Эта формула получена при помощи методов, применимых также к иным функциям для выведения приближенной формулы

$$x(a+hk) \approx x(a) + a(a)\chi(h),$$

где $x(a)$ — табличное значение функции $x(t)$, k — шаг таблицы, $0 \leq h < 1$.

Во второй части исследованы два общих метода, пользующихся лишь непрерывностью производных функции достаточно высокого порядка. Один из них заключается в разбивке разности $x(a+hk) - x(a)$ на две части, обе находящиеся по таблицам, специальным образом. Второй основывается на формуле

$$x(a+hk) \approx x(a) + \varepsilon N \log_{10}(\log_{10} h + A(a)) + \nu(a, h),$$

в которой функция $\nu(a, h)$ отыскивается при помощи номограммы из выравненных точек, а $\varepsilon^2 = 1$. Приведены фрагменты таблиц функции $\sin t$, построенных первым методом и функции Бесселя $J_0(t)$ (вместе с номограммой), построенных вторым методом.

S. PASZKOWSKI (Wrocław)

NEW METHODS OF TABULATING FUNCTIONS

SUMMARY

The subject of the paper is a description of new methods of tabulating functions, aiming at a considerable shortening of the existing tables without lessening their accuracy. It is assumed that those using the tables have no arithmometer and therefore can perform without difficulty only addition and subtraction.

In the first part two methods making use of the characteristics of the logarithmic function are discussed, and a radix table of decimal logarithms is given together with a fragment of tables based on the formula

$$\log_{10}(n+h) \approx \log_{10} n + N \log_{10}(-N(n) - \log_{10} n + H(h)),$$

where $10^3 \leq n \leq 10^4$, $0 \leq h < 1$,

$$N(n) = -\log_{10} \left(1 - \frac{\sqrt{2}-1}{n} \right),$$

$$H(h) = \log_{10} \log_{10} e + \log_{10} (h - (\sqrt{2}-1) 10^{-3} (h^2 - (2\sqrt{2}-2)h)).$$

This formula is introduced by means of certain methods which can be applied also in the case of other functions in order to find the approximate formula

$$x(a+hk) \approx x(a) + a(a)\chi(h),$$

where $x(a)$ is the tabulated value of the function $x(t)$, h — the interval of the argument, $0 \leq h < 1$.

In the second part two general methods making use only of the continuity of the derivatives of functions of sufficiently high order are discussed. One of them consists in decomposing the difference $x(a+h) - x(a)$ into two parts, both to be found in the tables, in a special way. The other is based on the formula

$$x(a+h) \approx x(a) + \varepsilon N \log_{10}(\log_{10} h + A(a)) + v(a, h),$$

in which the function $v(a, h)$ is found by means of an alignment chart and $\varepsilon^2 = 1$. The paper contains fragments of the tables of the function $\sin t$ for the first method and of Bessel's function $J_0(t)$ (together with the alignment chart) for the second method.

•