ZASTOSOWANIA MATEMATYKI
V (1960)

B. KOPOCIŃSKI (Wrocław)

O PODZIALE TERYTORIALNYM POLSKI NA CZĘŚCI

Niniejsza praca przedstawia pewien sposób podziału na n części populacji zlokalizowanej i wybór środków tych części w tym sensie najlepszy, żeby suma momentów bezwładności części względem środków była minimalna.

Oznaczając moment bezwładności części K_i względem punktu A_i przez $J(K_i, A_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, szukamy układu części i środków $K = K_i$, $A = A_i$ takich, żeby

$$S(K, A) = \sum_{i=1}^{n} J(K_i, A_i) = \min.$$

W przypadku populacji ludzi w Polsce intuicyjny sens zagadnienia jest następujący: Jak ustawić n obserwatorów i wyznaczyć obszary obserwacji, żeby całkowita suma kwadratów odległości od osobników do obserwatorów była minimalna?

H. Steinhaus [1] podał warunek konieczny, jaki musi spełniać rozwiązanie tego zagadnienia. Warunek ten, pomijając założenia o samej gęstości, jest następujący:

Jeśli K_i, A_i jest rozwiązaniem zagadnienia, to A_i są środkami mas K_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ oraz rozgraniczenie sąsiednich obszarów leży na symetralnej ich środków. Rozwiązanie takie istnieje zawsze, a w zastosowaniach można się spodziewać, że istnieje tylko jedno. Mapę gęstości populacji ludzi w Polsce konstruuję według trzech zasad:

1. Na mapie umieszczam tylko punkty o masie 10000 osób.
2. Punkty odpowiadające ludności miast powyżej 10000 osób umieszczam we właściwym miejscu na mapie.
3. Punkty dla pozostałej ludności powiatu rozmieszczam losowo w obrębie tego powiatu.

Przykład. Powiat ciechanowski liczący 76000 osób, w tym Ciechanów 18000 mieszkańców, otrzyma dwa punkty w miejscu Ciechanowa i pięć punktów losowo rozmieszczonych w obrębie powiatu.

Dyskretny rozkład gęstości populacji wprowadzam dla łatwego znajdowania środków ciężkości obszarów. Masa punktu, w zasadzie dowolna, uwarunkowana jest dokładnością, z jaką chcemy otrzymać rozwiązanie, oraz dokładnością danych statystycznych o gęstości populacji.

Do rozwiązania dochodzimy w następujący sposób:

1. Rysujemy dowolny podział początkowy, który oznaczamy przez $\{K_i^0\}$, i wyznaczamy w każdym obszarze środek ciężkości masy. Oznaczmy środki te przez $\{A_i^0\}$.

2. Dla punktów $\{A_i^0\}$ wyznaczamy nowy podział $\{K_i^1\}$, którego boki leżą na symetralnych sąsiednich punktów $\{A_i^0\}$. Podział ten ma na ogół inne środki ciężkości $\{A_i^1\}$.

3. Dla $\{A_i^1\}$ postępujemy jak w 2 i powtarzamy postępowanie tak długo, aż podziały i środki przestaną się przesuwać. Ostatni podział przyjmujemy za rozwiązanie.

Rys. 1

(siódme kolejne przybliżenie)

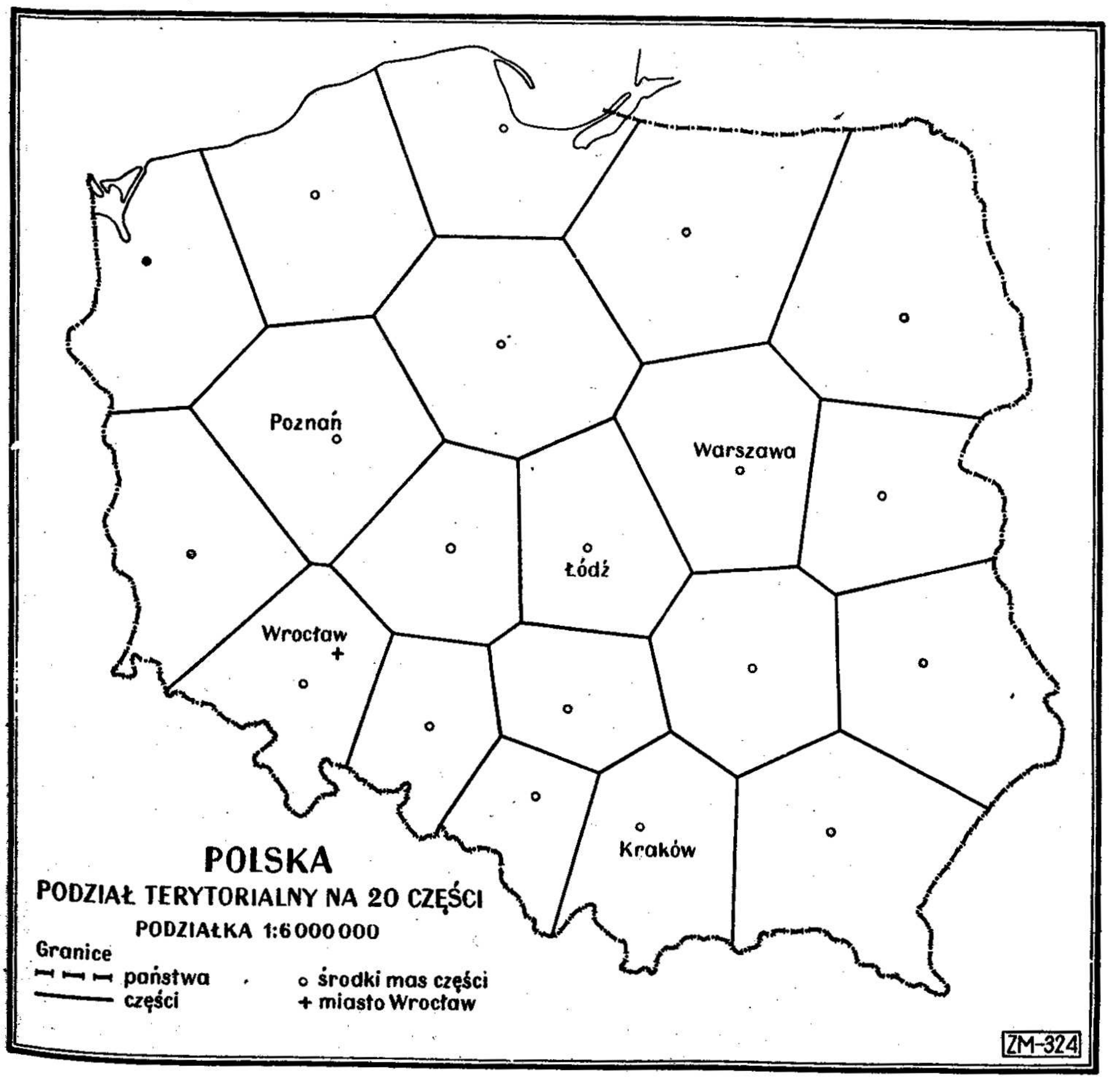
Rozwiązanie to spełnia warunek konieczny.

Postępowanie to zawsze musi się skończyć, ponieważ $S(K^n, A^n)$ stanowi malejący i ograniczony od dołu ciąg liczb

$$0 \leqslant S(K^{n+1}, A^{n+1}) \leqslant S(K^n, A^n).$$

Aby zwiększyć wiarogodność, że otrzymane rozwiązanie realizuje jedyne minimum absolutne, wskazane jest poszukiwanie rozwiązania z dwu lub kilku warunków początkowych. Rozwiązania we wszystkich przypadkach powinny być jednakowe.

Załączone mapki przedstawiają rozwiązania dla $n = 17$ i $n = 20$ skonstruowane na tej samej mapce gęstości populacji. Za rozwiązanie przyjąłem odpowiednio siódme i piąte kolejne przybliżenie. Liczba przybliżeń zależy silnie od warunków początkowych. W przypadku $n = 17$



Rys. 2

(piąte kolejne przybliżenie)

za warunek początkowy przyjęto granice obecnych województw nie będących miastami wydzielonymi; rozwiązanie jest ich poprawieniem w sensie postawionego zagadnienia. Wydaje się, że granice te i granice rozwiązania nie różnią się zbytnio, lecz środki poszczególnych części, poza Warszawą, Łodzią, Krakowem i Poznaniem, nie pokrywają się z położeniem miast wojewódzkich.

Druga mapa przedstawia podział Polski na 20 części; znaczy to, że tak należałoby rozmieścić istniejących obecnie 20 województw, aby rozmieszczenie było w podanym sensie najlepsze. Wydaje się, że podziały te mogą znaleźć zastosowanie zarówno w badaniach nad populacją ludzi, jak i w innych dziedzinach.

Praca cytowana

[1] H. Steinhaus, *Sur la division des corps matériels en parties*, Bull. Acad. Soc. Pol., Cl. III, 1956, str. 801-804.

Praca wpłynęła 12. 5. 1959

Б. КОПОЦИНСКИ (Вроцлав)

О ТЕРРИТОРИАЛЬНОМ ДЕЛЕНИИ ПОЛЬШИ НА ЧАСТИ

РЕЗЮМЕ

В статье дается деление на n частей локализированной популяции и выбор центров этих частей, таких, чтобы

$$S(K, A) = \sum_{i=1}^{n} J(K_i, A_i) = \min,$$

где $J(K_i, A_i)$ обозначает момент инерции части K_i относительно центра A_i.

Г. Штейнхауз приводит необходимое условие, которому должно удовлетворять решение. Если K_i, A_i является решением проблемы, тогда A_i являются центрами масс K_i и разделение соседних областей лежит на симметральной их центров.

Для простоты принимается дискретное распределение плотности популяции и постоянную массу точки.

Решение, которому удовлетворяет необходимое условие, получается путем последовательных приближений. Чертится произвольное деление. Для произвольного приближения находятся центры масс части, а новое деление, стороны которого лежат на симметральных этих центров, являются следующим приближением. Процесс этот сходящийся, так как последовательность $S(K^n, A^n)$ — это последовательность убывающих чисел и ограничена с низу.

Прилагаемые карты выявляют большое соответствие произведенного деления с современным административным делением Польши. Центры масс часто совпадают с местонахождением больших скоплений населения. Предполагается, что описанный метод может найти применение также в других отраслях.

B. KOPOCIŃSKI (Wrocław)

ON THE DIVISION OF POLISH TERRITORY INTO PARTS

SUMMARY

The paper presents a division into n parts of a localised population and a choice of the centres of these parts such that

$$S(K, A) = \sum_{i=1}^{n} J(K_i, A_i) = \min,$$

where $J(K_i, A_i)$ denotes the moment of inertia of part K_i with respect to the centre A_i.

H. Steinhaus has given the necessary condition which must be satisfied by the solution. If K_i, A_i is the solution of the problem, then A_i are the centres of the masses K_i and the delimitation of the neighbouring regions lies on the axis of symmetry of their centres.

For simplicity a discrete density distribution of the population and a constant point mass are assumed.

The solution which satisfies the necessary condition is obtained by the method of successive approximations. We draw an arbitrary initial division. We find the mass centres of the parts for an arbitrary approximation, and the new division whose sides lie on the axes of symmetry of those centres is the next approximation. The procedure is convergent because $S(K^n, A^n)$ is a sequence of decreasing numbers bounded from below.

The enclosed maps show considerable agreement of the division obtained with the existing administrative division of Poland. The mass centres often coincide with the position of the larger concentrations of the population. It is supposed that the method described here may find application in other fields.