

L. ZUBRZYCKA (Wrocław)

O ROZMIESZCZANIU PUNKTÓW PRÓBKOWYCH  
NA PŁASZCZYŹNIE

**1. Wstęp.** Znane jest zagadnienie kubatury mechanicznej, w którym chodzi o oszacowanie całki funkcji, określonej — powiedzmy — na kwadracie jednostkowym, gdy znamy wartości tej funkcji w wybranych punktach kwadratu. Są różne rozwiązania tego zagadnienia. Jedno z nich, *probabilistyczne*, zaleca losować punkty niezależnie z jednostajnym rozkładem prawdopodobieństwa na kwadracie. Wówczas wartości funkcji w wylosowanych punktach traktuje się jako realizacje niezależnych zmiennych losowych, a prawa wielkich liczb z rachunku prawdopodobieństwa zapewniają, że przy rosnącym  $n$  średnia z wartości funkcji w  $n$  wylosowanych punktach będzie coraz lepszym oszacowaniem estymowanej całki. Z tychże praw rachunku prawdopodobieństwa wynika jednak, że błąd oszacowania będzie malał wraz z  $n$  dość wolno, mniej więcej jak  $1/\sqrt{n}$ . Natomiast zaletą tego sposobu jest możliwość dobierania kolejnych punktów przez losowanie, gdyby dokładność uzyskanego oszacowania okazała się zbyt mała. To losowe powiększanie liczby punktów próbkowych ma przy tym tę dobrą właściwość, że struktura powiększanego zbioru punktów próbkowych jest w istocie taka sama jak poprzednio. Jednak przy losowym rozmieszczaniu punktów występuje nieuchronnie tendencja do pewnej nierównomierności w rozstawieniu punktów. Powstają w niektórych miejscach skupienia punktów, w innych puste miejsca. Tymczasem funkcje występujące w praktyce są zazwyczaj ciągłe i mają łagodny przebieg; dlatego uzasadnione jest przypuszczenie, że przy równomierniejszym rozstawieniu punktów można zyskać na dokładności oszacowania. Istnieją inne probabilistyczne sposoby, które usiłują realizować postulat równomierniejszego niż losowe rozmieszczania punktów. Takim sposobem jest na przykład rozmieszczanie *warstwowe*. Polega ono na tym, że gdy mamy rozmieścić w kwadracie  $n$  punktów, to dzielimy kwadrat na  $n$  przystających części i losujemy niezależnie po jednym punkcie z każdej części, z jednostajnym rozkładem prawdopodobieństwa na tych częściach. Można wreszcie mówić o *syste-*

*matycznym* rozmieszczaniu punktów; wówczas rozstawia się je według jakiejś regularnej siatki na przykład w wierzchołkach siatki kwadratowej lub trójkątnej.

Niektórzy autorzy, chcąc uzyskać ilościowe wskazówki co do zależności zachodzącej między dokładnością oszacowania a sposobem rozmieszczania punktów próbkowych, wprowadzają do swoich rozważań populację funkcyj, których całki trzeba szacować i w ten sposób dochodzą do rozpatrywania płaskich procesów stochastycznych jako modelu matematycznego. W tym modelu przyjmuje się zazwyczaj, że rozpatrywany proces jest stacjonarny, a czasem ponadto izotropowy. Łagodność przebiegu funkcyj podlegających oszacowaniu jest tu opisywana funkcją korelacyjną. Na takim modelu Zubrzycki ([10], [11]) studiował stosunki błędów oszacowania przy losowym, warstwowym i systematycznym rozmieszczaniu punktów pomiarowych. Udowodniono tam, że warstwowe rozmieszczenie punktów pomiarowych prowadzi zawsze do mniejszych błędów oszacowania niż losowe. Podano też warunki, przy których systematyczne rozmieszczanie punktów daje mniejsze błędy oszacowania niż warstwowe. Na przykładach wykazano jednak, że w pewnych przypadkach losowanie warstwowe może być bardziej celowe niż systematyczne. Wyniki te wskazują, że równomierniejsze rozstawienie punktów próbkowych daje mniejszy błąd oszacowania estymowanej całki.

Warstwowe i systematyczne rozmieszczanie punktów, chociaż prowadzi do równomierniejszego rozstawiania punktów niż losowe, ma jednak ten niedostatek, że nie pozwala na powiększanie zbioru punktów próbkowych bez zepsucia równomierności ich rozmieszczenia — chyba tylko przy zwielokrotnieniu ich ilości.

H. Steinhaus [8] zauważył, że w przypadku odcinka można z wielkim sukcesem zrealizować oba postulaty: równomierne rozmieszczanie punktów na odcinku i możliwość powiększania zbioru punktów pomiarowych z zachowaniem równomiernego rozmieszczenia. Wystarczy w tym celu brać jako punkty próbkowe na odcinku jednostkowym kolejne reszty modulo 1 z wielokrotności liczby złotej  $z = \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1) = 0,61803\dots$ . Jest tutaj wykorzystana własność ekwipartycji liczb niewymiernych; mówi ona, że jeżeli na odcinku  $(0, 1)$  będziemy odkładali kolejne reszty modulo 1 z wielokrotności liczby niewymiernej  $v$  a dla odcinka  $J$  zawartego w odcinku  $(0, 1)$  oznaczmy przez  $L(n, J)$  liczbę tych spośród pierwszych  $n$  reszt, które wpadają do  $J$ , to dla każdego  $J$  przy  $n$  zmierzającym do  $\infty$  zachodzić będzie relacja graniczna

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L(n, J)}{n} = |J|,$$

gdzie  $|J|$  jest długością odcinka  $J$ .

Tę własność dzielą ciągi reszt modulo 1 z wielokrotności liczby niewymiernej z ciągami punktów losowanych niezależnie z odcinka  $(0, 1)$ . Jednak ciągi reszt modulo 1 z wielokrotności liczby niewymiernej, której rozwinięcie na ułamek łańcuchowy ma ograniczone mianowniki, mają tę przewagę nad ciągami punktów losowych, że rozstawiają się na odcinku znacznie równomierniej. Jeśli bowiem mianowniki rozwinięcia liczby niewymiernej  $v$  na ułamek łańcuchowy nie przekraczają  $M$ , to dla każdego odcinka  $J$  zawartego w odcinku  $(0, 1)$  spełniona jest przy każdym  $n \geq 10$  nierówność

$$|L(n, J) - n|J|| \leq 36 M \log n,$$

udowodniona przez Ostrowskiego [5]. Dla  $v = z$  można przyjąć  $M = 1$ .

Dla liczb losowych analogiczne różnice z prawdopodobieństwem 1 dla nieskończenie wielu wartości  $n$  przekraczają  $\sqrt{n}$ , co jest bezpośrednią konsekwencją słynnego prawa iterowanego logarytmu (zobacz Chin-czyn [1] i Kołmogorow [3]). Orzeka ono, że dla ciągu  $\xi_1, \xi_2, \dots$  niezależnych zmiennych losowych o jednakowych rozkładach prawdopodobieństwa, o średniej  $m$  i wariancji  $s^2$  nierówność

$$|\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n - nm| > \lambda s \sqrt{2n \log \log n}$$

jest z prawdopodobieństwem 1 spełniona dla nieskończenie wielu  $n$ , gdy  $0 < \lambda < 1$ , i z prawdopodobieństwem 1 jest spełniona dla co najwyżej skończenie wielu  $n$ , gdy  $\lambda > 1$ .

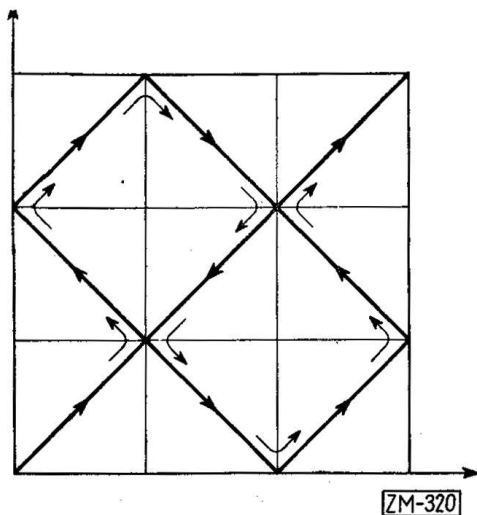
**2. Punkty złote.** Pozostało otwarte pytanie H. Steinhausa, czy można skonstruować w podobny sposób ciąg punktów taki, że dla każdego  $n$  początkowa  $n$ -ka punktów jest możliwie równomiernie rozstawiona w kwadracie, czyli, innymi słowy, taki sposób rozmieszczania punktów w kwadracie, żeby był zrealizowany zarówno postulat równomiernego rozmieszczenia jak i możliwość powiększania układu punktów bez jaskrawego naruszania tej równomierności.

Celem niniejszej noty jest przedstawienie takiego sposobu rozmieszczania punktów w kwadracie, który realizuje oba te postulaty. Polega on na wzięciu jako punktów w kwadracie obrazów reszt modulo 1 wielokrotności liczby  $z$  poprzez dziewiątkową krzywą Peano. Tak otrzymane punkty będziemy nazywać *punktami złotymi*.

A oto ich formalna definicja.

Niech  $\varphi(t)$  i  $\psi(t)$  oznaczają współrzędne punktu przyporządkowanego przez dziewiątkową krzywą Peano liczbie  $t$ ,  $0 \leq t \leq 1$ . Niech dalej  $\{x\}$  oznacza resztę modulo 1 liczby  $x$ . Ciągami punktów złotych nazywamy ciąg punktów  $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$  taki, że współrzędne  $n$ -tego punktu równają się odpowiednio  $\varphi(\{nz\})$  i  $\psi(\{nz\})$ .

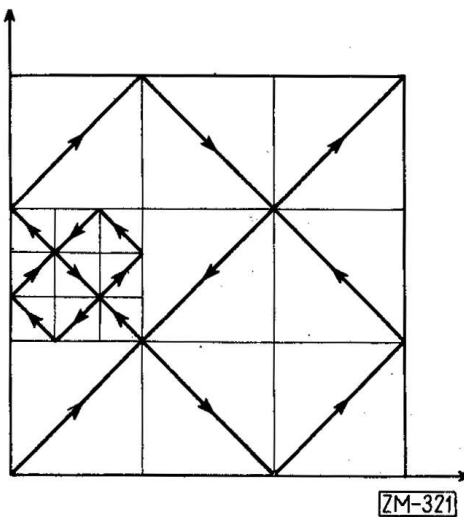
Jak wiadomo (porównaj Kuratowski [4] str. 170), dziewiątkową krzywą Peano wypełniającą kwadrat określa się jako granicę jednostajnie zbieżnego ciągu łamanych. Robi się to tak: kwadrat jednostkowy dzieli



Rys. 1

się na 9 jednakowych kwadratów (nazwijmy je *kwadratami pierwszego przybliżenia*) i prowadzi się w nich przekątne jak na rysunku 1. Z kolei odcinek domknięty  $\langle 0, 1 \rangle$  dzieli się na 9 równych odcinków i przekształca się liniowo każdy z nich w odpowiednią przekątną w kolejności podanej na rysunku 1. Tak określona funkcja  $f_1(t)$  przekształca w sposób ciągły odcinek domknięty  $\langle 0, 1 \rangle$  w łamaną złożoną z 9 przekątnych. Z kolei dzielimy każdy z 9 kwadratów na 9 równych kwadratów (są to *kwadraty drugiego przybliżenia*) i prowadzimy w każdym z nich przekątną i to tak, żeby prze-

kątne w kwadratach 2-go przybliżenia leżących na wybranej przekątnej kwadratu pierwszego przybliżenia pokrywały się z przekątną pierwszego przybliżenia. W ten sposób pierwszy kwadrat pierwszego przybliżenia będzie wyglądał jak kwadrat na rysunku 1 po odpowiednim zmniejszeniu. Przekątne drugiego przybliżenia i kolejność ich obiegu w drugim kwadracie pierwszego przybliżenia przedstawione są na rysunku 2. Następnie dzielimy każdy z odcinków o końcach  $\frac{1}{9}(n-1)$ ,  $\frac{1}{9}n$ , gdzie  $n = 1, 2, \dots, 9$ , na 9 równych części i każdą z tych części przekształcamy liniowo w odpowiednią przekątną kwadratów 2-go przybliżenia. Daje to określenie funkcji  $f_2(t)$ , przekształcającej w sposób ciągły odcinek  $\langle 0, 1 \rangle$  w łamaną złożoną z 81 odcinków. Postępując podobnie dalej określamy nieskończony ciąg funkcji ciągłych. Ich granica  $f(t)$  nazywa się krzywą Peano; jest ona ciągłym przekształceniem domkniętego odcinka w kwadrat wraz z brzegiem.



Rys. 2

Z tego co powiedzieliśmy wynika algorytm pozwalający obliczać współrzędne punktu na krzywej Peano dla zadanej liczby  $t$ . Jeśli jest

dane dziewiątkowe rozwinięcie liczby  $t$ , to pierwsza cyfra tego rozwinięcia wskazuje kwadrat pierwszego przybliżenia, w którym znajduje się szukany punkt, druga cyfra wskazuje zawarty w nim kwadrat drugiego przybliżenia itd. Stąd już można z kolejnych cyfr dziewiątkowego rozwinięcia liczby  $t$  odczytywać kolejne cyfry trójkowych rozwinięć współrzędnych punktu  $f(t)$ .

W tablicy I podajemy, z dokładnością do 4 cyfr z zaokrągleniem, współrzędne punktów złotych przeliczone na układ dziesiętny. Na rysunku 3 narysowano te punkty z zaznaczeniem ich kolejności.

**3. Charakterystyki rozmieszczenia.** Przedstawimy obecnie kilka charakterystyk rozmieszczenia punktów złotych. Zaczniemy od wskaźnika zgęszczenia. Jak wiadomo, przy losowym rozmieszczaniu punktów ilość punktów przypadających na oczko o ustalonej wielkości ma rozkład Póissona, a więc wariancję równą średniej. Otóż H. Steinhaus [7] bada równomierność rozmieszczenia punktów za pomocą stosunku wariancji  $\sigma^2$  do średniej  $\bar{k}$  liczby punktów w oczkach regularnej siatki. Stosunek ten nazywa *wskaźnikiem zgęszczenia*. Im mniejszy jest wskaźnik zgęszczenia, tym równomierniej są rozmieszczone punkty.

Podzieliśmy nasz kwadrat kolejno na 4, 9, 16, 25 jednakowych kwadratów i kolejno dla pierwszych 50, 100, 150, 200, 248 punktów złotych obliczyliśmy ten wskaźnik. Uzyskane wyniki przedstawiono w tablicy 2. Wskaźnik ten nigdzie nie przekracza  $\frac{1}{2}$ , a przy podziale na 9 części nie dochodzi nawet do  $\frac{1}{10}$ , co świadczy o tym, że punkty złote rozstawiają się dużo równomierniej niż losowe, dla których ten wskaźnik jest, w granicach błędu próbkowego, równy 1.

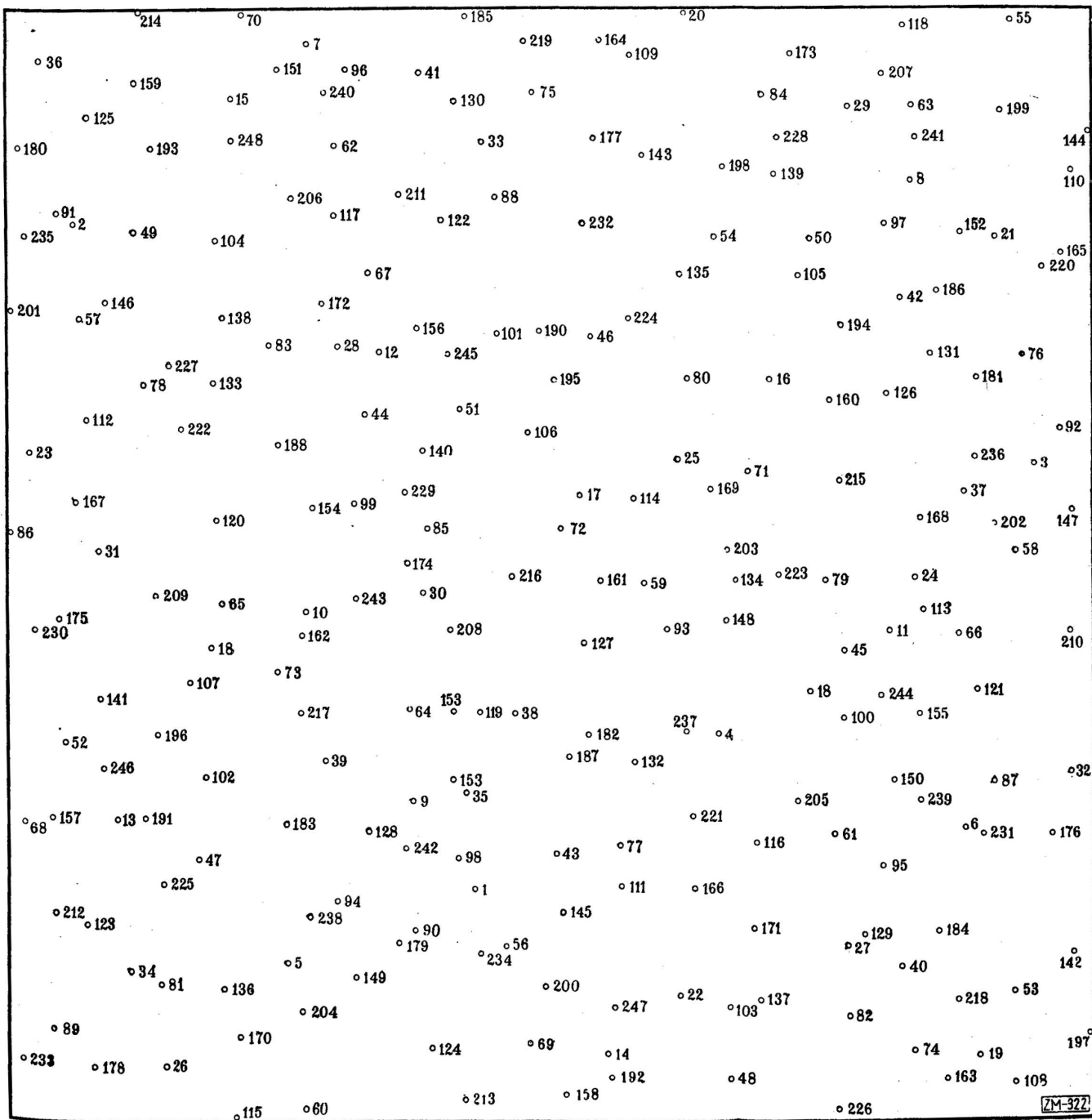
Opiszę jeszcze badanie rozmieszczenia punktów złotych za pomocą dendrytów sposobem użytym przy zagadnieniu łańcuszków gwiazdnych przez S. Zubrzyckiego [9]. Porównałam mianowicie 3 układy punktów. Jeden, to 248 punktów złotych rozmieszczonych w kwadracie. Drugi, to 248 punktów losowych. Mapkę punktów losowych sporządzono w ten sposób, że z tablic liczb losowych (W. Sadowski [6], str. 93) brano za współrzędne punktów kolejne trójki cyfr. Trzeci, to fragment nieba wyznaczony przez następujące nierówności dla współrzędnych astronomicznych:  $52^\circ < \alpha < 60^\circ$ ,  $31,5^\circ < \delta < 34^\circ$ ; zawiera on 248 gwiazd o wielkościach do  $10^m$ . Badanie polega na tym, że rysuje się na badanym zbiorze punktów dendryty I rzędu, dendryty II rzędu i dendryty rozpięte na całym zbiorze. Dendryty I rzędu są to konfiguracje powstałe przez połączenie odcinkiem każdego punktu z najbliższym, dendryty II rzędu otrzymuje się łącząc każdy dendryt I rzędu z najbliższym dendrytem tego rzędu. Przez odległość dwóch dendrytów rozumie się tu długość najkrótszego z odcinków, którego jeden koniec jest

wierzchołkiem jednego dendrytu, drugi drugiego. Łącząc dalej w opisany sposób dendryty II rzędu i dalsze otrzymuje się w końcu dendryt obejmujący wszystkie punkty. Wierzchołki tak powstałych dendrytów klasyfikuje się według następującej zasady: wierzchołek jest węzłem rzędu  $k$ , jeśli schodzi się w nim  $k$  odcinków. W badaniu tym chodzi o porównanie częstości występowania węzłów poszczególnych rzędów w interesującym nas zbiorze punktów z odpowiednimi częstościami wśród punktów losowych. Wynik tego porównania przedstawiamy w tablicy III.

Z tablicy tej widzimy, że punkty złote mają mniej węzłów II rzędu niż punkty losowe i gwiazdy, to znaczy że nie mają tendencji do układania się w łańcuszki. Różnice w ilości węzłów są jednak nieoczekiwanie małe. Widać stąd, że częstości węzłów nie wykazują wielkiego związku z równomiernością rozmieszczenia punktów.

#### 4. Wskazówki do praktycznego korzystania z punktów złotych.

Punkty złote nadają się do wybierania punktów próbkowych. Dotychczas mówiliśmy o punktach złotych jako o punktach rozstawiających się dobrze w kwadracie. Można ich jednak używać także do rozstawiania punktów próbkowych na obszarach płaskich dowolnego kształtu. Wystarczy w tym celu obszar, na którym chcemy rozmieścić punkty próbkowe, odpowiednio zmniejszony wstawić do kwadratu jednostkowego i za punkty próbkowe brać te punkty złote, które będą kolejno wpadały do narysowanego konturu. Można do tego wykorzystać rysunek 3. Przy takim sposobie użycia punktów złotych, zachowane są obie dobre ich własności, to znaczy równomiernego rozmieszczenia i możliwości powiększania zbioru punktów próbkowych bez szkody dla tej równomierności. Stosować to można wszędzie tam, gdzie przedtem pobiera się próbkę rekonesansową i na jej podstawie ustala się licznosc ostatecznej próbki. W przypadku, kiedy nie idzie nam o zagęszczanie sieci punktów próbkowych, ale o rozstawienie zadanej z góry liczby punktów próbkowych, można sobie zadanie nieco bardziej zrutynizować. H. Steinhaus zaproponował mianowicie następujące postępowanie: robimy raz na zawsze szablon kwadratowy, na którym umieszczona jest dość duża liczba punktów złotych (por. rys. 3); oznaczmy ją przez  $N$ . Jeżeli teraz chcemy rozmieścić  $n$  punktów próbkowych na jakimś obszarze, a na szablonie przypada średnio 1 punkt złoty na  $k$  cm<sup>2</sup>, to wystarczy w tym celu tak zmniejszyć mapkę obszaru, żeby miała  $n/k$  cm<sup>2</sup>. (Na rys. 3  $k = 1,63$ ). Wówczas łatwo zdołamy tak umieścić mapkę obszaru na szablonie z punktami złotymi, żeby objęła ona dokładnie  $n$  punktów. Praktycznie będzie to zawsze możliwe, gdy  $n$  jest dość małe w stosunku do  $N$ . Matematyczne sprecyzowanie warunków zapewniających możliwość



Rys 3



takiego nasunięcia było przedmiotem rozważań Fasta i Świerczkowskiego [2].

Wyrażam serdeczne podziękowanie prof. H. Steinhausowi za zachęcenie mnie do napisania tej pracy, a dr S. Zubrzyckiemu za wskazówki przy jej redagowaniu.

TABLICA I

| $n$ | $\varphi(\{nz\})$ | $\psi(\{nz\})$ | $n$ | $\varphi(\{nz\})$ | $\psi(\{nz\})$ | $n$ | $\varphi(\{nz\})$ | $\psi(\{nz\})$ |
|-----|-------------------|----------------|-----|-------------------|----------------|-----|-------------------|----------------|
| 1   | 0,4289            | 0,2085         | 39  | 0,2931            | 0,3233         | 77  | 0,5656            | 0,2478         |
| 2   | 0,0622            | 0,8080         | 40  | 0,8294            | 0,1399         | 78  | 0,1257            | 0,6635         |
| 3   | 0,9474            | 0,5912         | 41  | 0,3804            | 0,9424         | 79  | 0,7558            | 0,4879         |
| 4   | 0,6566            | 0,3484         | 42  | 0,8244            | 0,7389         | 80  | 0,6287            | 0,6676         |
| 5   | 0,2570            | 0,1413         | 43  | 0,5057            | 0,2387         | 81  | 0,1395            | 0,1230         |
| 6   | 0,8843            | 0,2647         | 44  | 0,3297            | 0,6347         | 82  | 0,7746            | 0,0933         |
| 7   | 0,2785            | 0,9707         | 45  | 0,7718            | 0,4239         | 83  | 0,2419            | 0,6978         |
| 8   | 0,8368            | 0,8441         | 46  | 0,5386            | 0,7051         | 84  | 0,6982            | 0,9227         |
| 9   | 0,3740            | 0,2867         | 47  | 0,1760            | 0,2341         | 85  | 0,3882            | 0,5318         |
| 10  | 0,2757            | 0,4577         | 48  | 0,6653            | 0,0366         | 86  | 0,0018            | 0,5281         |
| 11  | 0,8144            | 0,4394         | 49  | 0,1166            | 0,8006         | 87  | 0,9090            | 0,3059         |
| 12  | 0,3438            | 0,6900         | 50  | 0,7435            | 0,7920         | 88  | 0,4513            | 0,8308         |
| 13  | 0,1001            | 0,2711         | 51  | 0,4184            | 0,6401         | 89  | 0,0402            | 0,0837         |
| 14  | 0,5514            | 0,0594         | 52  | 0,0503            | 0,3429         | 90  | 0,3740            | 0,1715         |
| 15  | 0,2071            | 0,9200         | 53  | 0,9268            | 0,1157         | 91  | 0,0448            | 0,8176         |
| 16  | 0,7032            | 0,6662         | 54  | 0,6539            | 0,7942         | 92  | 0,9712            | 0,6219         |
| 17  | 0,5295            | 0,5642         | 55  | 0,9287            | 0,9904         | 93  | 0,6072            | 0,4431         |
| 18  | 0,1875            | 0,4239         | 56  | 0,4582            | 0,1555         | 94  | 0,3027            | 0,1975         |
| 19  | 0,8953            | 0,0572         | 57  | 0,0668            | 0,7229         | 95  | 0,8061            | 0,2282         |
| 20  | 0,6251            | 0,9963         | 58  | 0,9310            | 0,5126         | 96  | 0,3141            | 0,9447         |
| 21  | 0,9131            | 0,7952         | 59  | 0,5866            | 0,4833         | 97  | 0,8102            | 0,8061         |
| 22  | 0,6187            | 0,1125         | 60  | 0,2753            | 0,0096         | 98  | 0,4143            | 0,2350         |
| 23  | 0,0192            | 0,6027         | 61  | 0,7613            | 0,2579         | 99  | 0,3192            | 0,5556         |
| 24  | 0,8368            | 0,4883         | 62  | 0,3018            | 0,8770         | 100 | 0,7718            | 0,3617         |
| 25  | 0,6187            | 0,5953         | 63  | 0,8363            | 0,9131         | 101 | 0,4527            | 0,7069         |
| 26  | 0,1449            | 0,0498         | 64  | 0,3690            | 0,3704         | 102 | 0,1820            | 0,3086         |
| 27  | 0,7737            | 0,1564         | 65  | 0,1975            | 0,4655         | 103 | 0,6648            | 0,1011         |
| 28  | 0,3054            | 0,6964         | 66  | 0,8775            | 0,4385         | 104 | 0,1920            | 0,7920         |
| 29  | 0,7769            | 0,9118         | 67  | 0,3333            | 0,7627         | 105 | 0,7298            | 0,7599         |
| 30  | 0,3836            | 0,4742         | 68  | 0,0160            | 0,2693         | 106 | 0,4787            | 0,6200         |
| 31  | 0,0832            | 0,5126         | 69  | 0,4797            | 0,0681         | 107 | 0,1674            | 0,3941         |
| 32  | 0,9813            | 0,3141         | 70  | 0,2177            | 0,9954         | 108 | 0,9296            | 0,0325         |
| 33  | 0,4385            | 0,8802         | 71  | 0,6836            | 0,5853         | 109 | 0,5748            | 0,9575         |
| 34  | 0,1029            | 0,1344         | 72  | 0,5103            | 0,5322         | 110 | 0,9826            | 0,8541         |
| 35  | 0,4220            | 0,2954         | 73  | 0,2483            | 0,4033         | 111 | 0,5647            | 0,2108         |
| 36  | 0,0297            | 0,9543         | 74  | 0,8345            | 0,0613         | 112 | 0,0727            | 0,6310         |
| 37  | 0,8848            | 0,5647         | 75  | 0,4856            | 0,9246         | 113 | 0,8455            | 0,4591         |
| 38  | 0,4682            | 0,3663         | 76  | 0,9364            | 0,6886         | 114 | 0,5784            | 0,5592         |



TABLICA I (cd.)

| $n$ | $\varphi(\{nz\})$ | $\psi(\{nz\})$ | $n$ | $\varphi(\{nz\})$ | $\psi(\{nz\})$ | $n$ | $\varphi(\{nz\})$ | $\psi(\{nz\})$ |
|-----|-------------------|----------------|-----|-------------------|----------------|-----|-------------------|----------------|
| 115 | 0,2099            | 0,0110         | 160 | 0,7581            | 0,6475         | 204 | 0,2689            | 0,0960         |
| 116 | 0,6904            | 0,2483         | 161 | 0,5464            | 0,4865         | 205 | 0,7284            | 0,2876         |
| 117 | 0,3013            | 0,8144         | 162 | 0,2716            | 0,4362         | 206 | 0,2625            | 0,8299         |
| 118 | 0,8272            | 0,9845         | 163 | 0,8651            | 0,0357         | 207 | 0,8080            | 0,9419         |
| 119 | 0,4353            | 0,3663         | 164 | 0,5464            | 0,9694         | 208 | 0,4069            | 0,4417         |
| 120 | 0,1920            | 0,5405         | 165 | 0,9721            | 0,7805         | 209 | 0,1363            | 0,4733         |
| 121 | 0,8953            | 0,3868         | 166 | 0,6319            | 0,2085         | 210 | 0,9803            | 0,4403         |
| 122 | 0,4010            | 0,8102         | 167 | 0,0636            | 0,5578         | 211 | 0,3635            | 0,8336         |
| 123 | 0,0713            | 0,1783         | 168 | 0,8436            | 0,5414         | 212 | 0,0430            | 0,1879         |
| 124 | 0,3909            | 0,0654         | 169 | 0,6488            | 0,5674         | 213 | 0,4207            | 0,0178         |
| 125 | 0,0732            | 0,9040         | 170 | 0,2131            | 0,0754         | 214 | 0,1221            | 0,9982         |
| 126 | 0,8212            | 0,6543         | 171 | 0,6868            | 0,1715         | 215 | 0,7682            | 0,5752         |
| 127 | 0,5309            | 0,4303         | 172 | 0,2917            | 0,7353         | 216 | 0,4650            | 0,4892         |
| 128 | 0,3324            | 0,2588         | 173 | 0,7238            | 0,9579         | 217 | 0,2702            | 0,3672         |
| 129 | 0,7910            | 0,1687         | 174 | 0,3685            | 0,5007         | 218 | 0,8747            | 0,1075         |
| 130 | 0,4129            | 0,9159         | 175 | 0,0476            | 0,4527         | 219 | 0,4783            | 0,9698         |
| 131 | 0,8528            | 0,6891         | 176 | 0,9630            | 0,2570         | 220 | 0,9556            | 0,7677         |
| 132 | 0,5770            | 0,3224         | 177 | 0,5414            | 0,8820         | 221 | 0,6310            | 0,2734         |
| 133 | 0,1902            | 0,6639         | 178 | 0,0778            | 0,0494         | 222 | 0,1605            | 0,6237         |
| 134 | 0,6717            | 0,4861         | 179 | 0,3589            | 0,1596         | 223 | 0,7115            | 0,4906         |
| 135 | 0,6214            | 0,7609         | 180 | 0,0096            | 0,8761         | 224 | 0,5734            | 0,7206         |
| 136 | 0,1984            | 0,1180         | 181 | 0,8953            | 0,6662         | 225 | 0,1436            | 0,2126         |
| 137 | 0,6936            | 0,1075         | 182 | 0,5345            | 0,3461         | 226 | 0,7641            | 0,0082         |
| 138 | 0,1985            | 0,7229         | 183 | 0,2561            | 0,2675         | 227 | 0,1481            | 0,6795         |
| 139 | 0,7087            | 0,8500         | 184 | 0,8573            | 0,1701         | 228 | 0,7128            | 0,8829         |
| 140 | 0,3841            | 0,6027         | 185 | 0,4248            | 0,9936         | 229 | 0,3663            | 0,5652         |
| 141 | 0,0860            | 0,3800         | 186 | 0,8583            | 0,7458         | 230 | 0,0242            | 0,4422         |
| 142 | 0,9835            | 0,1509         | 187 | 0,5167            | 0,3260         | 231 | 0,8994            | 0,2575         |
| 143 | 0,5866            | 0,8674         | 188 | 0,2497            | 0,6081         | 232 | 0,5309            | 0,8066         |
| 144 | 0,9986            | 0,8889         | 189 | 0,7403            | 0,3864         | 233 | 0,0110            | 0,0540         |
| 145 | 0,5112            | 0,1971         | 190 | 0,4925            | 0,7106         | 234 | 0,4358            | 0,1504         |
| 146 | 0,0905            | 0,7371         | 191 | 0,1257            | 0,2721         | 235 | 0,0146            | 0,7979         |
| 147 | 0,9822            | 0,5487         | 192 | 0,5565            | 0,0380         | 236 | 0,8935            | 0,5967         |
| 148 | 0,6626            | 0,4499         | 193 | 0,1326            | 0,8747         | 237 | 0,6251            | 0,3507         |
| 149 | 0,3205            | 0,1294         | 194 | 0,7714            | 0,7142         | 238 | 0,2780            | 0,1834         |
| 150 | 0,8171            | 0,3068         | 195 | 0,5043            | 0,6662         | 239 | 0,8413            | 0,2867         |
| 151 | 0,2506            | 0,9460         | 196 | 0,1358            | 0,3484         | 240 | 0,2936            | 0,9246         |
| 152 | 0,8811            | 0,7993         | 197 | 0,9950            | 0,0754         | 241 | 0,8381            | 0,8820         |
| 153 | 0,4111            | 0,3068         | 198 | 0,6612            | 0,8560         | 242 | 0,3667            | 0,2455         |
| 154 | 0,2812            | 0,5514         | 199 | 0,9172            | 0,9081         | 243 | 0,3210            | 0,4691         |
| 155 | 0,8441            | 0,3663         | 200 | 0,4943            | 0,1189         | 244 | 0,8052            | 0,3836         |
| 156 | 0,3781            | 0,7128         | 201 | 0,0027            | 0,7298         | 245 | 0,4060            | 0,6978         |
| 157 | 0,0393            | 0,2739         | 202 | 0,9118            | 0,5350         | 246 | 0,0873            | 0,3178         |
| 158 | 0,5121            | 0,0233         | 203 | 0,6644            | 0,5139         | 247 | 0,5578            | 0,1015         |
| 159 | 0,1175            | 0,9351         |     |                   |                | 248 | 0,2076            | 0,8820         |

TABLICA II

Steinhaus'a wskaźniki zgęszczenia  
dla punktów złotych

| Ilość<br>punktów<br>złotych | Liczba oczek podziału |       |       |       |
|-----------------------------|-----------------------|-------|-------|-------|
|                             | 4                     | 9     | 16    | 25    |
| 50                          | 0,020                 | 0,085 | 0,475 | 0,360 |
| 100                         | 0,060                 | 0,086 | 0,388 | 0,260 |
| 150                         | 0,186                 | 0,054 | 0,252 | 0,293 |
| 200                         | 0,130                 | 0,058 | 0,190 | 0,290 |
| 248                         | 0,056                 | 0,057 | 0,161 | 0,281 |

TABLICA III

Liczebności węzłów

| Mapka                                    | Rząd węzłów |     |     |    |
|--|-------------|-----|-----|----|
|  | I           | II  | III | IV |
| Dendryty I rzędu                         |             |     |     |    |
| gwiazd                                   | 168         | 65  | 15  | —  |
| punktów losowych                         | 171         | 72  | 5   | —  |
| punktów złotych                          | 174         | 69  | 5   | —  |
| Dendryty II rzędu                        |             |     |     |    |
| gwiazd                                   | 84          | 128 | 36  | —  |
| punktów losowych                         | 85          | 125 | 38  | —  |
| punktów złotych                          | 93          | 117 | 36  | 2  |
| Dendryty rozpięte na wszystkich punktach |             |     |     |    |
| gwiazd                                   | 64          | 128 | 55  | 1  |
| punktów losowych                         | 59          | 134 | 54  | 1  |
| punktów złotych                          | 75          | 114 | 55  | 4  |

## Prace cytowane

- [1] A. Khintchino, *Über einen Satz der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Fund Math. 6 (1924), str. 9-20.  
 [2] H. Fast and K. Świerczkowski, *On the number of lattice points inside a closed curve*, Coll. Math. 6 (1958), str. 211-214.  
 [3] A. N. Kołmogorow, *Das Gesetz des iterierten Logarithmus*, Math. Annalen 101 (1929), str. 126-135.  
 [4] K. Kuratowski, *Wstęp do teorii mnogości i topologii*, Warszawa 1955.

[5] A. Ostrowski, *Bemerkungen zur Theorie der Diophantischen Approximation*, Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität 1 (1922), str. 77-98; 3 (1924), str. 250-251.

[6] W. Sadowski, *Tablice statystyczne*, Warszawa 1957.

[7] H. Steinhaus, *O wskaźniku zgęszczenia i rozproszenia*, Przegląd Geograficzny 21 (1947).

[8] — *Liczby złote i żelazne*, Zastosowania Matematyki 3 (1956), str. 51-65.

[9] S. Zubrzycki, *O łańcuskach gwiazdnych*, Zastosowania Matematyki 1 (1954), str. 197-205.

[10] — *O szacowaniu parametrów złóż geologicznych*, Zastosowania Matematyki 3 (1957), str. 105-153.

[11] — *Remarks on random, stratified and systematic sampling in a plane*, Coll. Math. 6 (1958), str. 251-264.

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK

*Praca wpłynęła 17. 4. 1959*

Л. ЗУБРЖИЦКА (Вроцлав)

## О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ВЫБОРНЫХ ТОЧЕК НА ПЛОСКОСТИ

### РЕЗЮМЕ

В статье определяется последовательность точек  $p_n$ , каждый сегмент которой распределяется в единичном квадрате значительно больше равномерно чем, в среднем, то же число выборных точек. Точку  $p_n$  определяется как точку на непрерывной кривой Пеано, трансформирующей замкнутый сегмент в замкнутый квадрат, соответствующий остатку модуля 1 числа  $nz$  определяемого ниже посредством  $t_n$ , где

$$z = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = 0,61803...$$

Таблица I содержит координаты точек  $p_n$  для  $n = 1, 2, \dots, 248$ . Эти точки показаны на черт. 3.

Для исследования равномерности точек  $p_n$  разделено единичный квадрат последовательно на 4, 9, 16 и 25 одинаковых квадратов и для первых 50, 100, 150, 200, 248 точек  $p_n$  вычислено отношение дисперсии наблюдаемых чисел точек  $p_n$  в отдельных квадратах к средней этих чисел. Результаты собрано в таблице II.

Распределение точек исследовано также по дендритному методу, способом описанным в [9]. Сравнено число узлов разных рядов в дендритах разбитых на 248 точках  $p_n$ , на 248 выборных точках и на 248 звездах в выбранном участке неба. Разницы оказались неожиданно малы.

Статья окончена некоторыми замечками о практическом использовании точек  $p_n$ .

L. ZUBRZYCKA (Wrocław)

## ON THE DISTRIBUTION OF SAMPLING POINTS IN A PLANE

## SUMMARY

In this note a sequence of points  $p_n$  in the unit square is defined such that each segment of this sequence is distributed more uniformly than, on an average, the same number of random points. The point  $p_n$  is defined as a point on the continuous Peano curve which transforms a closed segment into a closed square corresponding to the rest modulo 1 of  $nz$ , denoted below by  $t_n$ , where

$$z = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0,61803\dots$$

In table I the coordinates of the points  $p_n$ ,  $n = 1, 2, \dots, 248$ , are given. These points are shown in fig. 3.

In order to examine the uniformity of the distribution of the points  $p_n$ , the unit square has been divided into 4, 9, 16 and 25 equal squares and, for the first 50, 100, 150, 200 and 248 of the points  $p_n$ , the ratio of the variance of the observed numbers of points  $p_n$  in the individual squares to their mean was computed. The results obtained are presented in table II.

The distribution of the points  $p_n$  has also been examined with the aid of a dendritic method in the way described in [9]. The numbers of vertices of different orders in dendrites spanned over 248 points  $p_n$ , 248 random points and 248 stars in a given sky area have been compared. The differences have turned out to be unexpectedly small.

The note terminates with some indications as to the practical use of the points  $p_n$ .

---