ZASTOSOWANIA MATEMATYKI
V (1961)

E. PLESZCZYŃSKA (Warszawa)

O ZASTOSOWANIU TEORII INFORMACJI DO PORÓWNYWANIA DWÓCH METOD STATYSTYCZNEJ KONTROLI JAKOŚCI

1. Wstęp. Porównuję badanie według właściwości liczbowej z badaniem alternatywnym. W pierwszym z nich każdemu elementowi w próbce przyporządkowuje się dokładną wartość badanej cechy X; w drugim element kwalifikuje się jako dobry lub zły, przez co zatraca się — mówiąc potocznie — część informacji zawartej w próbce. Ze względu na to w badaniu alternatywnym stosuje się większe próbki. Według stosowanych obecnie metod, tę zwiększoną liczność próbki dobiera się w ten sposób, żeby charakterystyki obu testów (alternatywnego i według właściwości liczbowej) możliwie dokładnie się pokrywały.

W niniejszej pracy stosuję nowe kryterium, wprowadzone przez Kullbacka i Leiblera w [1]: kryterium takiej samej rozdzielności hipotez o populacji, z której pochodzi prókba. Pozwala ono dobrać taką liczność próbki w badaniu alternatywnym, przy której ilość informacji o badanych hipotezach zawarta w próbce jest taka sama, jak w badaniu według właściwości liczbowej.

W dalszej części pracy wykazuję, że wyniki uzyskane na obu drogach niemal całkowicie się pokrywają. Ponieważ obliczanie liczności próbki według nowej metody jest bardzo łatwe, wydaje się, że w praktyce warto stosować tę metodę do znajdowania parametrów planu alternatywnego o żądanej charakterystyce.

Budzi to nadzieję na przyszłość: jeżeli dla jakiegoś testu trudno jest wyznaczyć parametry, przy których spełnione są pewne warunki nałożone na charakterystykę, być może da się dobrać inny test, weryfikujący te same hipotezy, w którym wyznaczenie parametrów będzie łatwe; przez porównanie rozdzielności hipotez obu testów można wyznaczyć parametry pierwszego testu i doświadczalnie sprawdzić, czy spełniają nasze wymagania. Opisany przeze mnie przykład wskazuje, że takie postępowanie może dać pozytywne rezultaty.

2. Rozdzielność dwóch hipotez statystycznych [1]. Poniższe wyjaśnienia wstępne wydają się użyteczne z uwagi na przeznaczenie niniejszego artykułu.

Kullback i Leibler [1] definiują rozdzielność hipotez w następujący sposób:

Niech X oznacza zbiór wartości zmiennej losowej X; S — borelowskie ciało podzbiorów X; $\mu(E)$ (dla $E\in S$) — rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej X, x — wylosowaną wartość X.

Stawiamy dwie proste alternatywne hipotezy:

(1) H_i: element x pochodzi z populacji o rozkładzie prawdopodobieństwa μ_i $(i=1,2)$.

Zakładamy przy tym, że miary μ_1 i μ_2 są absolutnie ciągłe względem siebie; to znaczy, że dla każdego zbioru $E\subset S$

$$\big(\mu_1(E)=0\big)\equiv\big(\mu_2(E)=0\big).$$

Do μ_1 i μ_2 dobieramy miarę λ absolutnie ciągłą względem μ_1 i μ_2. Z twierdzenia Radona — Nikodyma wynika, że istnieją funkcje $f_i(x)$ $(i=1,2)$, określone jednoznacznie z dokładnością do zbiorów miary zero ze względu na miarę λ i zawarte w przedziale $(0,\infty)$, takie że

$$\mu_i(E)=\int_E f_i(x)d\lambda(x)\qquad (i=1,2). \tag{2}$$

Dla rozkładu ciągłego najprościej przyjąć $\lambda(x)\equiv x$; wtedy $f_i(x)$ są gęstościami prawdopodobieństwa.

Dla rozkładu skokowego można przyjąć np. $\lambda(x)=\mu_1(x)$ w punktach skokowych; wtedy z (2) wynika, że

$$\begin{aligned}\mu_1(x)&=f_1(x)\mu_1(x), &&\text{stąd}\quad f_1(x)\equiv 1,\\ \mu_2(x)&=f_2(x)\mu_1(x), &&\text{stąd}\quad f_2(x)=\frac{\mu_2(x)}{\mu_1(x)}.\end{aligned} \tag{3}$$

Definiujemy teraz wyrażenie $\log\big(f_1(x)/f_2(x)\big)$ jako ilość informacji zawartą w wylosowanym elemencie x do rozróżnienia hipotez H_1 i H_2 oraz obliczamy wartość oczekiwaną przy założeniu, że H_1 jest prawdziwa. Analogicznie obliczamy wartość oczekiwaną $\log\big(f_2(x)/f_1(x)\big)$ przy założeniu, że H_2 jest prawdziwa. Sumę tych oczekiwanych informacji nazy-

(1) Termin „rozdzielność" jest tu użyty jako odpowiednik terminu „divergence" wprowadzonego przez Kullbacka i Leiblera. Dosłownie tłumaczyć przez „dywergencję" (rozbieżność) nie można, gdyż terminy te mają już ustalone znaczenie w matematyce.

wamy *rozdzielnością hipotez H_1 i H_2* (lub *rozdzielnością populacji o rozkładach prawdopodobieństwa μ_1 i μ_2*):

$$J \stackrel{\text{def}}{=} \int [f_1(x) - f_2(x)] \log \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \, d\lambda(x), \tag{4}$$

przy czym całkuje się po zbiorze X.

Wielkość J ma następujące własności ([1]):

1. jest zawsze nieujemna, równa zeru wtedy i tylko wtedy, gdy obie hipotezy są identyczne,
2. jest symetryczna ze względu na obie hipotezy,
3. nie zależy od prawdopodobieństw a priori obu hipotez,
4. jest addytywna dla niezależnych zmiennych losowych, zatem wzrasta n-krotnie, gdy liczność próbki wzrasta n-krotnie.

Z pozostałych własności podaję jedną, która wymaga szerszego omówienia. Weryfikujemy hipotezy, tj. orzekamy, z której populacji pochodzi próbka, na podstawie jakiejś statystyki. Przez statystykę rozumiemy tu funkcję próbki w najbardziej ogólnym sensie, np. dowolny podzbiór próbki jest statystyką. Intuicyjnie jest jasne, że rozdzielność hipotez nie powinna wzrosnąć na skutek orzekania na podstawie statystyki próbki zamiast na podstawie próbki. Miara rozdzielności hipotez Kullbacka i Leiblera spełnia ten postulat, to jest rozdzielność obliczona na podstawie próbki jest nie mniejsza niż rozdzielność obliczona na podstawie statystyki próbki, przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy statystyka jest dostateczna. Dzięki temu miara ta może służyć do porównywania statystyk między sobą.

3. Zastosowanie J do porównania oceny według właściwości liczbowej i oceny alternatywnej. Rozpatrujemy następujący przypadek: Rozkład badanej cechy X w partiach przedstawianych do odbioru jest w przybliżeniu normalny ze stałym σ. Sztuka jest uważana za dobrą, jeśli $x < g$. Oznaczmy przez w wadliwość partii. Mamy weryfikować dwie alternatywne hipotezy

$$H_i\colon\ w = w_i \quad (i = 1, 2). \tag{5}$$

P r z y o c e n i e w e d ł u g w ł a ś c i w o ś c i l i c z b o w e j pobieramy próbkę $(x_1, \ldots, x_n)$, obliczamy $\bar{x}+kS$ ($\bar{x}$ — średnia z próbki, S — odchylenie średnie z próbki, k — odpowiednio dobrana liczba) i przyjmujemy H_1, gdy $\bar{x}+kS > g$; w przeciwnym razie przyjmujemy H_2; n i k są parametrami testu.

P r z y o c e n i e a l t e r n a t y w n e j pobieramy próbkę N-elementową, każdy element kwalifikujemy jako dobry lub zły i znajdujemy liczbę złych elementów y; gdy $y > m$, przyjmujemy H_1; w przeciwnym razie przyjmujemy H_2; N i m są parametrami testu.

Porównamy teraz te dwa testy ze względu na rozdzielność hipotez H_1 i H_2.

Zaczniemy od obliczenia J dla badanej zmiennej losowej X. Przede wszystkim trzeba wyjaśnić kwestię sformułowania hipotez w (5), które nie zgadza się z (1) — podanie wadliwości nie wyznacza oczywiście jednoznacznie parametrów rozkładu prawdopodobieństwa μ_1 i μ_2. Wykażemy jednak zaraz, że przy ograniczeniu jednostronnym stałość σ wystarcza do określenia jednoznacznie rozdzielności obu hipotez, które napiszemy teraz w postaci

(6) H_i: element x pochodzi z populacji o rozkładzie prawdopodobieństwa

$$\mu_i(E) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int_E \exp\left(-\frac{(x-m_i)^2}{2\sigma^2}\right),$$

przy czym $\dfrac{g-m_i}{\sigma} = F^{-1}(1-w_i)$ $(i=1,2)$, gdzie

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx.$$

Otrzymujemy zatem

$$J = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\exp\left(-\frac{(x-m_1)^2}{2\sigma^2}\right)-\exp\left(\frac{(x-m_2)^2}{2\sigma^2}\right)\right]\times \tag{7}$$

$$\times\,[(x-m_2)^2-(x-m_1)^2]\frac{dx}{2\sigma^2} =$$

$$= \frac{(m_1-m_2)^2}{\sigma^2} \quad \text{(na podstawie pracy [2])}$$

$$= \left(\frac{g-m_1}{\sigma}-\frac{g-m_2}{\sigma}\right)^2 =$$

$$= [F^{-1}(1-w_1)-F^{-1}(1-w_2)]^2 = [F^{-1}(w_1)-F^{-1}(w_2)]^2.$$

Wynika stąd rozdzielność hipotez dla dowolnej statystyki dostatecznej z j-elementowej próbki:

$$J_D = j[F^{-1}(w_1)-F^{-1}(w_2)]^2. \tag{8}$$

Obliczymy teraz rozdzielność hipotez przy badaniu według właściwości liczbowej. Wiadomo, że statystyka $\bar{X}+kS$ z próbki n-elementowej ma w przybliżeniu rozkład normalny $N\left(m+k\sigma, \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\left(1+\dfrac{k^2}{2}\right)\right)$.

Oznaczmy gęstość tego rozkładu przez $g(x|m)$. Hipotezy przyjmą postać

(9) H_i: element $\bar{x}+kS$ pochodzi z populacji o rozkładzie prawdopodobieństwa

$$\mu_i(E) = \int_E g(x|m_i)dx, \quad \text{przy czym} \quad \frac{g-m_i}{\sigma} = F^{-1}(1-w_i) \quad (i = 1, 2).$$

Na mocy (7) otrzymujemy rozdzielność hipotez

$$J_{\bar{X}+kS} = n\frac{[F^{-1}(w_1)-F^{-1}(w_2)]^2}{1+k^2/2}. \tag{10}$$

Przez porównanie z (8) stwierdzamy, że $\bar{X}+kS$ nie jest statystyką dostateczną i jej rozdzielność jest $(1+k^2/2)$ razy mniejsza od J_D.

Z kolei obliczamy rozdzielność hipotez przy badaniu alternatywnym. Wiadomo, że statystyka Y_N ma rozkład dwumianowy w próbce N-elementowej. Najłatwiej przeprowadzić obliczenia dla $N = 1$. Hipotezy przyjmą postać

(11) H_i: element y pochodzi z populacji o rozkładzie prawdopodobieństwa

$$\mu_i(x) = \begin{cases} w_i & \text{dla} \quad x = 0 \\ 1-w_i & \text{dla} \quad x = 1 \end{cases} \quad (i = 1, 2).$$

Przyjmujemy $\lambda(x) = \mu_1(x)$.
Na podstawie (3) otrzymujemy

$$\begin{aligned} &f_1(x) \equiv 1 \quad \text{dla} \quad x = 0 \text{ lub } x = 1, \\ &f_2(x) = \begin{cases} \dfrac{w_2}{w_1} & \text{dla} \quad x = 0, \\ \dfrac{1-w_2}{1-w_1} & \text{dla} \quad x = 1. \end{cases} \end{aligned} \tag{12}$$

Zatem rozdzielność hipotez w próbce jednoelementowej wynosi

$$\begin{aligned} J_{Y_1} &= \left(1-\frac{w_2}{w_1}\right)\left[\log\frac{w_1}{w_2}\right]w_1 + \left(1-\frac{1-w_2}{1-w_1}\right)\left[\log\frac{1-w_1}{1-w_2}\right](1-w_1) = \\ &= (w_1-w_2)\log\frac{w_1(1-w_2)}{w_2(1-w_1)}, \end{aligned} \tag{13}$$

a dla próbki N-elementowej

$$J_{Y_N} = N(w_1-w_2)\log\frac{w_1(1-w_2)}{w_2(1-w_1)}. \tag{14}$$

Jeżeli więc chcemy, by rozdzielność hipotez dla obu testów była jednakowa, musi zachodzić związek

$$(15)\qquad n\frac{[F^{-1}(w_1)-F^{-1}(w_2)]^2}{1+k^2/2} = N(w_1-w_2)\log\frac{w_1(1-w_2)}{w_2(1-w_1)},$$

z którego łatwo wyznaczyć liczność próbki N w badaniu alternatywnym.

4. Przybliżony wzór na liczność próbki planu alternatywnego o żądanej charakterystyce. Ciekawe rezultaty daje porównanie liczności próbki N obliczonej z (15) z licznością próbki planu alternatywnego, którego charakterystyka pokrywa się z charakterystyką przy badaniu według właściwości liczbowej.

Przypomnijmy najpierw [3], że jeśli przy badaniu według właściwości liczbowej nałożymy na charakterystykę warunki

$$(16)\qquad P(w_1) = \beta, \quad P(w_2) = 1-a$$

(P — prawdopodobieństwo przyjęcia partii), to parametry wyrażą się wzorami

$$(17)\qquad \begin{aligned} k &= \frac{F^{-1}(1-w_1)+F^{-1}(1-w_2)}{2}, \\ n &= \left(1+\frac{k^2}{2}\right)\frac{[F^{-1}(\beta)-F^{-1}(1-a)]^2}{[F^{-1}(w_1)-F^{-1}(w_2)]^2}. \end{aligned}$$

Porównując (17) i (10) stwierdzamy, że rozdzielność hipotez przy badaniu według właściwości liczbowej, przy którym spełnione są warunki (16), wyraża się wzorem

$$(18)\qquad J_{\overline{X}+kS} = [F^{-1}(\beta)-F^{-1}(1-a)]^2,$$

a więc zależy tylko od a i β.

Z (18) i (15) otrzymujemy

$$(19)\qquad N = \frac{[F^{-1}(\beta)-F^{-1}(1-a)]^2}{(w_1-w_2)\log\dfrac{w_1(1-w_2)}{w_2(1-w_1)}}.$$

Okazało się, że we wszystkich przerobionych przykładach do tak obliczonej liczności próbki N można dobrać takie m ($0 \leqslant m < N$), że plan alternatywny $N//m$ spełnia niemal dokładnie warunki (16).

Przykład 1. Szukamy planu alternatywnego $N//m$ spełniającego warunki (16) dla $a = 0{,}05$, $\beta = 0{,}10$, $w_1 = 0{,}025$, $w_2 = 0{,}005$.

Z (19) obliczamy

$$N = 262{,}44 \approx 262.$$

Następnie obliczamy

$$\lambda_1 = Nw_1 \approx 6{,}6, \quad \lambda_2 = Nw_2 \approx 1{,}3.$$

Z tablic dystrybuanty rozkładu Poissona odczytujemy, że należy przyjąć $m = 3$, i że wtedy

$$\alpha' = P(k > 3; \lambda_2) = 0{,}043,$$

$$\beta' = P(k \leqslant 3; \lambda_1) = 0{,}105.$$

PRZYKŁAD 2. Tablica 4.6.A. na str. 132 w [3] zawiera 10 planów alternatywnych tak dobranych, żeby ich charakterystyki pokrywały się możliwie dokładnie z charakterystykami odpowiednich planów badania według właściwości liczbowej. W planach tych zmienia się w_1 i w_2, natomiast nominalnie $\alpha = \beta = 0{,}05$ (w rzeczywistości są oczywiście pewne odchylenia).

Poniżej w tablicy porównuję te plany z planami alternatywnymi, które znalazłam w sposób opisany w przykładzie 1 dla tych samych w_1 i w_2 oraz $\alpha = \beta = 0{,}05$. Pierwsze plany zawiera część A tablicy, drugie — część B. W obu przypadkach podaję także rzeczywiste α i β, obliczane tak jak w przykładzie 1 (a więc obarczone błędem posługiwania się tablicami Poissona).

TABLICA

			A				B			
lp.	w_1	w_2	N	m	α	β	N	m	α	β
1	26%	0,52%	10	0	0,049	0,074	10	0	0,049	0,074
2	39%	3,7%	10	1	0,062	0,090	11	1	0,062	0,072
3	11%	0,23%	25	0	0,058	0,067	25	0	0,058	0,067
4	23%	3,3%	25	2	0,047	0,077	25	2	0,047	0,077
5	4,7%	0,36%	100	1	0,062	0,052	95	1	0,061	0,061
6	13%	4%	100	7	0,051	0,055	94	7	0,040	0,081
7	1,6%	0,21%	400	2	0,047	0,046	385	2	0,047	0,054
8	7,9%	3,9%	400	22	0,058	0,041	364	20	0,054	0,052
9	0,92%	0,2%	1000	4	0,053	0,049	980	4	0,053	0,049
10	6,4%	4,1%	1000	51	0,055	0,055	1001	41	0,055	0,055

Dla przypadków 1, 3 i 4 plany A i B są identyczne, dla 2, 7 i 8 plany A mniej dokładnie spełniają warunki nałożone na charakterystykę, dla 5 plan B jest trochę gorzej dobrany.

Wyróżnia się przypadek 6, w którym charakterystyka planu B bardziej odbiega od szukanej. Te dwa gorsze przypadki mają za to mniejszą liczność próbki.

Wyniki tego przykładu przemawiają za tym, by w praktyce liczność próbki planu alternatywnego obliczać metodą opisaną w przykładzie 1.

Prace cytowane

[1] S. Kullback, R. Leibler, *On information and sufficiency*, Ann. of Math. Society 22 (1951), str. 79.

[2] S. Kullback, *An application of information theory to multivariate analysis I*, Ann. of Math. Society 23 (1952), str. 88.

[3] J. Oderfeld, *Zarys statystycznej kontroli jakości*, Warszawa 1954, str. 127-133.

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK

Praca wpłynęła 23. 7. 1959

Э. ПЛЕЩИНСКАЯ (Варшава)

О ПРИМЕНЕНИИ ТЕОРИИ ИНФОРМАЦИИ К СРАВНЕНИЮ ДВУХ МЕТОДОВ СТАТИСТИЧЕСКОГО КОНТРОЛЯ КАЧЕСТВА

РЕЗЮМЕ

С точки зрения возможности непосредственных приложений в практике работа интересна тем, что в ней даётся очень лёгкий способ приближенного определения параметров альтернативного плана, на характеристику которого $P(w)$ наложены два условия:

$$P(w_1) = \beta, \quad P(w_2) = 1-\alpha.$$

Описание смотри в примере 1. Пример 2 показывает, насколько хорошим является это приближение.

В целом работа содержит сравнение двух тестов, применяемых в статистическом контроле качества — альтернативного и числовых качеств, при одной и той же дивергенции гипотез, определенной в [1]. Анализ результатов наводит на мысль, что два теста (альтернативный и числовых качеств) с одной и той же дивергенцией гипотез, имеют подобные характеристики. Подтверждают это примеры. Это приводит к упоминавшемуся выше способу определения параметров альтернативного плана с заданной характеристикой.

E. PLESZCZYŃSKA (Warszawa)

ON THE APPLICATION OF INFORMATION THEORY TO THE COMPARISON OF TWO METHODS OF STATISTICAL QUALITY CONTROL

SUMMARY

From the point of view of the possibilities of direct application in practice the paper contains the following result: we are given a very simple method of approxi-

mate determination of the parameters of an alternative sampling plan on whose characteristic $P(w)$ two conditions are imposed

$$P(w_1) = \beta, \quad P(w_2) = 1-\alpha.$$

A description is contained in Example 1. Example 2 shows how good that approximation is.

As a whole, the paper contains a comparison of two tests applied in Statistical Quality Control (first of them being alternative and the second being based on sampling by variables) by means of identical divergence of hypotheses, defined in [1]. An analysis of the results suggests that if the two tests have identical divergence, they also have similar characteristics, which is confirmed by examples. This leads to the above-mentioned method of determining the parameters of an alternative plan with the required characteristic.